DA "SCUOLA E DIDATTICA" N.5 del 15 NOVEMBRE 1988

Matematica dell'incerto. L'insegnamento della statistica e della probabilità

L'Autore espone alcune idee fondamentali del calcolo delle probabilità, inteso come un capitolo della dottrina che insegna a decidere in condizioni di informazione incompleta.

Carlo Felice Manara

Si potrebbe dire che per l'uomo è quasi necessario prendere spesso delle decisioni in condizioni di incertezza; e molti hanno anche la radicata abitudine di rischiare, cioè di prendere delle decisioni e degli atteggiamenti che possono avere delle conseguenze incognite molto spiacevoli oppure molto gradite. Pertanto si potrebbe dire che è connaturato nell'uomo l'atteggiamento che lo porta a considerare degli eventi sui quali egli non ha informazioni complete, eventi che vengono abitualmente chiamati «casuali» oppure anche «aleatori». Per fare un esempio antichissimo, ricordiamo che nella Bibbia (Salmo XXI-19) si trova già ricordata l'operazione di tirare a sorte. Ed il vocabolo latino «alea», che significa originariamente «dado», è entrato nella nostra lingua col significato di «rischio», o anche «pericolo». Anche Dante parla del «gioco della zara» (Purg. VI-1); ed i commentatori fanno risalire questo vocabolo ad una parola araba, dalla quale potrebbe derivare anche il termine italiano «azzardo».

Questi pochi esempi, tra i molti che si potrebbero citare, mostrano che il gioco d'azzardo è stato praticato in tempi molto antichi, e che l'uomo ha sempre preso in considerazione il fatto che certi eventi non sono prevedibili con certezza; il che ha anche originato il concetto di «caso». Tuttavia soltanto in epoca relativamente recente si è pensato di sottoporre gli eventi casuali ad una trattazione matematica; e forse ciò è anche dovuto al fatto che la Matematica è sempre stata considerata come una scienza tipicamente certa, il che fa apparire a prima vista paradossale il fatto che si possano trattare matematicamente degli eventi incerti.

Le prime considerazioni razionali che riguardano i giochi d'azzardo furono svolte la prima volta nel secolo XVII; gli storici ricordano certe domande riguardanti le scommesse che il Cavaliere De Méré (egli stesso uomo colto e studioso di Matematica) pose al grande matematico e filosofo Blaise Pascal (1623-1662); Pascal risolse i problemi che gli erano stati posti ed iniziò sull'argomento uno scambio di lettere con un altro grande matematico, pure francese: Pierre de Fermat (1601-1665). L'opinione comune degli storici vede in questi studi dei due matematici l'origine del Calcolo delle probabilità, modernamente inteso; tuttavia va ricordato che, nella stessa epoca in cui lavorarono Pascal e Fermat, un altro grande matematico e fisico olandese, Ch. Huygens (1629-1695) scrisse un trattato (comparso nel 1656), intitolato in latino «De rationibus in ludo aleae»; titolo che potrebbe essere tradotto liberamente in italiano con la frase «Analisi razionale del gioco dei dadi». In questo libro Huygens poneva e risolveva alcuni problemi riguardanti le scommesse.

La dottrina che era stata fondata da questi grandi matematici si sviluppò nei secoli successivi; è da ricordarsi anche che a quell'epoca si strinsero i primi contratti di assicurazione (nel senso moderno del termine) e si fondarono le prime società di mutuo soccorso con intenti abbastanza analoghi a quelli delle moderne casse pensioni.

Nel secolo XVIII è da ricordarsi la celebre opera di G. Bernoulli (1654-1705) intitolata in latino «Ars conjectandi» (che si potrebbe tradurre liberamente in italiano con la frase «Arte di ragionare»), in cui l'autore si pone dei problemi di decisione in condizioni di informazione incompleta. Infine, nel 1812 venne pubblicato il trattato del matematico francese Pierre Simon de Laplace (1749-1827), intitolato: «Théorie analytique des probabilités» (Teoria analitica delle probabilità); in questo libro Laplace dava una definizione di probabilità di un evento aleatorio come rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento stesso ed il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti «ugualmente possibili»; egli inoltre dimostrava alcuni teoremi fondamentali, che oggi vanno sotto i nomi di «Teorema delle probabilità totali» e «Teorema delle probabilità composte».

Le dimostrazioni che Laplace dà di queste e di altre proposizioni si fondano sull'ipotesi che ogni evento aleatorio possa essere simulato con sistemi fisici e con operazioni e manipolazioni su di essi; come per esempio: lancio di dadi, estra-

zioni di palline da urne e così via. Ma soprattutto tali dimostrazioni presuppongono che abbia senso parlare di *casi ugualmente possibili;* e l'applicazione di questi concetti alla scienza ed alla pratica presuppone che si possa controllare di fatto che tutti i casi possibili soddisfano effettivamente a questa essenziale richiesta.
La definizione di probabilità di un evento data da Laplace ha suscitato numerosissime discussioni; essa tuttavia viene ancor oggi adottata da coloro i quali accettano di considerare la probabilità di un dato evento aleatorio come una proprietà dell'evento stesso. La concezione di probabilità che discende dalla definizione di Laplace viene chiamata quindi *oggettiva*.
Tuttavia le difficoltà concettuali e logiche che nascono dalla definizione di Laplace hanno condotto in questi ultimi tempi alla adozione, da parte di molti matematici, della concezione che viene chiamata *soggettiva* del concetto di probabilità, in contrapposto con la concezione fondata sulla definizione di Laplace. Tale concezione soggettiva della probabilità di un evento aleatorio si è diffusa soprattutto grazie all'opera ed agli studi del matematico americano J. L. Savage e del matematico italiano Bruno De Finetti.
In questa concezione, la probabilità di un evento aleatorio è considerata come un giudizio che un determinato soggetto umano dà del proprio impegno economico in relazione all'evento stesso; tale giudizio è espresso con un numero, come vedremo, ed è strettamente collegato con le informazioni che il soggetto possiede a proposito dell'evento, e può naturalmente essere diverso da soggetto a soggetto, e può cambiare quando cambiano le informazioni che il soggetto possiede.

Eventi aleatori e valutazioni di probabilità

Non daremo qui la definizione del significato della parola «evento»; prenderemo il termine dal linguaggio comune e adotteremo il significato che in questo linguaggio gli viene dato; in modo analogo supponiamo di sapere che cosa intendiamo indicare dicendo che un determinato evento «è accaduto» oppure «si è avverato» o altre frasi consimili. Osserviamo soltanto che dell'accadere di alcuni eventi noi abbiamo certezza, dell'accadere di altri non siamo certi. Tuttavia ci accade molto spesso di dover prendere delle decisioni che hanno delle conseguenze economiche in relazione a certi eventi sui quali non abbiamo informazioni sufficienti per poter prevedere esattamente il loro accadere oppure non accadere. È necessario pertanto che le nostre decisioni siano prese nelle condizioni di massima razionalità, perché alla incertezza dei risultati non si aggiunga anche il danno dovuto all'imprudenza.

Consideriamo un soggetto umano, chiamiamolo T (Tizio) il quale prende delle decisioni economiche in relazione ad un determinato evento E sul quale non ha informazioni complete; diremo brevemente che per il soggetto T tale evento è «aleatorio» o «casuale». Diremo inoltre che il soggetto stringe un «contratto aleatorio» se l'esito finale del contratto stesso dipende dall'accadere oppure no di un dato evento aleatorio E.
Le circostanze nelle quali un soggetto prende delle decisioni economiche in condizioni di informazione incompleta sono moltissime; spesso ciò avviene perché il soggetto stesso stringe un contratto che viene chiamato «scommessa», acquistando il biglietto di una lotteria, puntando una certa somma ad un gioco che viene detto «d'azzardo» (Lotto, roulette ecc.), e così via. In tal caso la somma che il soggetto incassa se l'evento E sul quale egli ha scommesso si verifica viene considerata come una «vincita». Oppure il soggetto stringe un contratto di assicurazione, e la somma che egli incassa nel caso in cui si verifichi l'evento E viene considerata come un «risarcimento».
Per semplicità, schematizzeremo il contratto aleatorio, che il soggetto T stringe in relazione ad un evento E, nel modo seguente: esiste un altro contraente C (Caio), che può essere per esempio lo Stato (nel caso del gioco del Lotto) oppure un biscazziere o un assicuratore e così via, il quale stringe un contratto con il soggetto T. T versa la somma di denaro a (posta), C versa la posta b e le condizioni del contratto sono le seguenti: se l'evento E si verifica, T ritira la propria posta e quella dell'avversario C, cioè la somma $(a+b)$; se l'evento E non si verifica, C ritira la propria posta e quella di T, cioè ancora la somma $(a+b)$.
Ovviamente il fatto che l'evento E non si verifichi può pure essere considerato come un evento aleatorio, che viene chiamato *non-E* o anche «negazione di E», e che può essere indicato con il simbolo «$-E$».
Se T stringe questo contratto, diremo che egli attribuisce all'evento E la probabilità:

(1) $$p = a/(a+b)$$

ed all'evento $-E$ la probabilità:

(2) $$q = b/(a+b) = 1-p.$$

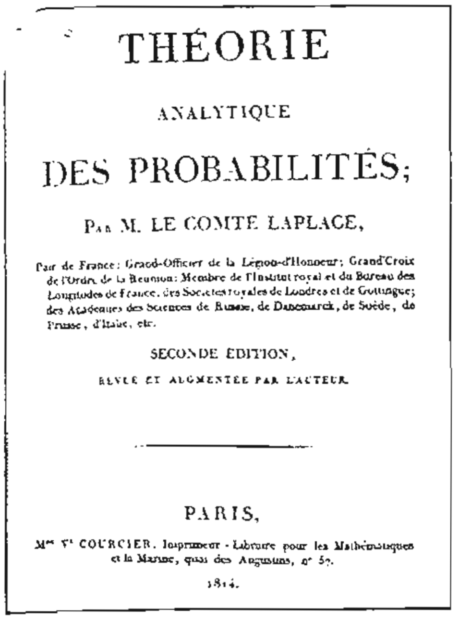
Queste stesse cose vengono presentate anche in altro modo (del tutto equivalente rispetto al significato ed alla logica) dicendo che il soggetto T attribuisce all'evento E la probabilità espressa dal numero p se egli è disposto a versare subito la somma di denaro $p*S$ contro la garanzia che lui stesso, o una persona da lui designata, riceverà la somma S qualora l'evento E si verifichi.
Indicheremo con il simbolo:

(3) $$p(E)$$

il numero con cui il soggetto T esprime la valutazione che egli dà della probabilità dell'evento E, per lui aleatorio.

Valutazioni di probabilità e coerenza

Vedremo in seguito su quali basi, in circostanze concrete, un soggetto può dare una valutazione prudente della probabilità di un evento aleatorio, cioè può arrischiare prudentemente di versare una certa somma per averne un'altra (ovviamente maggiore) nel caso in cui l'evento E si verifichi. Qui ci limitiamo ad enunciare un principio generale, che regge le decisioni economiche in queste situazioni, e che viene chiamato *Principio di coerenza*. Esso può essere enunciato nel modo seguente:
«Una valutazione di probabilità (o l'individuo che la effettua) si dice coerente se nessuna combinazione di scommesse (contratti aleatori) nella quale si può tradurre la considerazione di più eventi, consente di realizzare un guadagno non negativo (oppure non positivo) in ognuno dei casi possibili e positivo (o rispettivamente negativo) in almeno uno di essi».
Vedremo nel seguito le applicazioni che si possono dare di questo principio di coerenza; qui ci limitiamo ad osservare


THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS;

PAR M. LE COMTE LAPLACE,

Pair de France; Grand-Officier de la Légion-d'Honneur; Grand'Croix de l'Ordre de la Réunion; Membre de l'Institut royal et du Bureau des Longitudes de France, des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, d'Italie, etc.

SECONDE ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques et la Marine, quai des Augustins, n° 57.

1814.

che esso non è una legge fisica, né un imperativo morale; esso esprime piuttosto una specie di presunzione di ragionevolezza diffusa, presunzione in base alla quale, così come è lecito attendersi che un soggetto stringa un contratto aleatorio dopo aver prudentemente considerato tutti gli aspetti positivi e negativi, e dopo aver assunto tutte le informazioni che sono alla sua portata, è prudente pensare che anche gli altri contraenti abbiano fatto lo stesso; e di conseguenza è prudente pensare che non sia possibile a nessuno (né al soggetto T, né agli altri contraenti) combinare le cose in modo che, in presenza di un evento incerto, vi sia come risultato un guadagno certo di una delle parti.
Come conseguenza particolare del principio di coerenza si ha che se il soggetto è certo che l'evento E non avverrà, cioè se considera l'evento stesso impossibile, egli non stringe nessun contratto, perché in tal caso è sicuro di perdere la posta. In modo analogo, anche se egli è sicuro che l'evento E avverrà non verserà mai una posta maggiore della somma che potrebbe vincere, perché altrimenti sarebbe certo di perdere la differenza. Possiamo quindi concludere che per la valutazione di probabilità di un evento aleatorio E debbono valere le limitazioni:

(1) $\quad 0 \leqslant p(E) \leqslant 1.$

I valori estremi (0 ed 1) corrispondono ai casi dell'evento giudicato impossibile oppure rispettivamente certo.
Per esporre i risultati che ci interessano, adotteremo nel seguito il simbolismo dell'Algebra di Boole, ed il vocabolario della Teoria classica della Probabilità.
Secondo tale vocabolario e tale simbolismo, accanto a due eventi E ed H si possono considerare altri due eventi, che vengono tradizionalmente indicati come «somma logica» e «prodotto logico» di E e di H. L'evento «somma logica» di E ed H viene indicato col simbolo «$E \cup H$»; si considera che esso si verifichi se si verifica almeno uno dei due, E oppure H; non si esclude a priori che possano verificarsi entrambi.
L'evento «prodotto logico» viene indicato col simbolo «$E \cap H$»; si considera che tale evento si verifichi se si verificano entrambi i due, E ed H.
Può avvenire che sia impossibile che i due eventi si verifichino entrambi: si dice allora che i due eventi sono *incompatibili*, ovvero che si escludono a vicenda, e si scrive simbolicamente: $E \cap H = \emptyset$.
Con considerazioni che fanno appello al principio di coerenza si giunge a dimostrare che in questo caso la valutazione della probabilità dell'evento $E \cup H$ è data da:

(2) $\quad p(E \cup H) = p(E) + p(H).$

Il risultato espresso dalla formula (2) nelle ipotesi poste viene abitualmente chiamato *Teorema delle probabilità totali*.

Probabilità condizionate

Per proseguire la nostra analisi occorre dire qualche cosa a proposito del concetto di *probabilità condizionata*. A tal fine osserviamo che spesso occorre considerare alcune circostanze in cui la valutazione della probabilità che un soggetto T attribuisce ad un dato evento E può cambiare con le informazioni che T acquisisce.
Consideriamo ora un evento aleatorio E e supponiamo che il giudizio di probabilità sul suo avverarsi possa essere in qualche modo condizionato dalla informazione che un altro evento H si sia avverato.
Precisamente osserviamo che il giudizio di probabilità che un soggetto emette su un evento E può cambiare se il soggetto viene informato che un altro evento H si è avverato; precisamente possiamo prendere in considerazione tre giudizi di probabilità:
I) il giudizio sulla probabilità dell'avverarsi dell'evento H. Tale giudizio viene espresso con un numero che indicheremo col simbolo:

(1) $\quad p = p(H);$

II) il giudizio di probabilità che viene emesso a proposito dell'avverarsi dell'evento E quando sia acquisita l'informazione che l'evento H si è avverato: tale giudizio viene espresso con un numero p' che viene indicato col simbolo:

(2) $\quad p' = p(E|H),$

il quale viene chiamato «simbolo di probabilità condizionata»;
III) infine il giudizio di probabilità sull'avverarsi dell'evento prodotto logico $E \cap H$. Tale giudizio di probabilità viene espresso con un numero p'' che viene indicato con il simbolo:

(3) $\quad p'' = p(E \cap H).$

Ancora fondandosi sul principio di coerenza si dimostra, con ragionamenti che qui non riportiamo, che vale la relazione:

(4) $\quad p'' = p * p',$

ossia:

(5) $\quad p(E \cap H) = p(H) * p(E|H).$

Osserviamo tuttavia che l'aver chiamato il numero $p(E|H)$ «probabilità di E condizionata da H» non vuole assolutamente significare che l'evento H sia causa oppure anche soltanto condizione necessaria per l'avverarsi dell'evento E. Invero può avvenire che il giudizio sulla probabilità dell'avverarsi dell'evento E non sia cambiato dall'acquisizione dell'informazione del fatto che H si sia avverato.
In questo caso si ha:

(6) $\quad p(E|H) = p(E)$

ed i due eventi, E ed H, vengono detti *indipendenti*.
Dalla (5) si trae in particolare la formula che lega le valutazioni di probabilità di due eventi indipendenti, tali cioè che valga la (6).
Infatti in questo caso la (5) dà in particolare la

(7) $\quad p(E \cap H) = p(E) * p(H);$

questa formula traduce la proposizione che, nelle trattazioni classiche della Probabilità, viene indicata come *Teorema delle probabilità composte (per eventi indipendenti)*; questo teorema riguarda appunto la valutazione della probabilità dell'avverarsi di due eventi (cioè di quello che abbiamo convenuto di chiamare «prodotto logico» di essi) quando questi siano tra loro indipendenti, ossia quando l'informazione che uno di essi sia avvenuto non fa cambiare il giudizio di probabilità sull'avverarsi dell'altro.
Osserviamo ora che, come l'informazione che un dato evento H sia avvenuto può cambiare la valutazione di probabilità dell'avverarsi di un altro evento E, anche l'informazione che E si sia avverato può mutare la valutazione della probabilità dell'avverarsi di H.
Queste idee si possono esprimere in forma precisa osservando che nella formula (5) figura la valutazione della probabilità dell'evento $E \cap H$, prodotto logico dei due eventi E ed H e che si ha evidentemente:

(8) $\quad E \cap H = H \cap E$ e quindi

(9) $\quad p(E \cap H) = p(H \cap E).$

Si trae di qui la relazione fondamentale:

(10) $\quad p(H) * p(E|H) = p(E) * p(H|E);$

questa costituisce il punto di partenza per una importantissima formula, che viene chiamata *formula di Bayes* dal nome del matematico che la stabilì; essa permette di modificare la valutazione di probabilità di un evento sulla base delle informazioni che si possono ottenere sull'evento stesso e su quelli ad esso collegati.
Pertanto il calcolo delle probabilità ci si presenta come una dottrina che permette di dirigere nel modo più razionale possibile le decisioni in materia economica ed in condizioni di informazione incompleta, sfruttando nel modo migliore le informazioni che si possono ottenere.

Valutazioni a priori di probabilità

Dalle discussioni precedenti appare abbastanza chiaramente che il giudizio di probabilità su un evento si potrebbe classificare, in senso lato, come un giudizio economico; esso infatti ha come argomento il rischiare determinate somme di denaro da parte di un soggetto e l'acquisizione eventuale, da parte dello stesso o di altri, di certe altre somme a titolo di vincita o di risarcimento.

Appare chiaro quindi dal contesto che il giudizio che si dà su certe decisioni che hanno conseguenze economiche debba essere fatto in modo serio e ponderato, cercando di acquisire tutte le informazioni possibili, ognuna delle quali può influire sul giudizio di probabilità. È chiaro inoltre che la ponderatezza e la serietà del giudizio possono essere deformate se le condizioni psicologiche del soggetto non sono perfette, oppure se le circostanze sono tali che il soggetto stesso non è stimolato e facilitato ad impiegare la massima prudenza ed avvedutezza. Ciò avviene per esempio quando la scommessa viene presentata al soggetto in modo da mascherare la spesa della posta rispetto alla presunta mole della vincita. Un esempio clamoroso è dato dal gioco del Lotto, nel quale lo Stato paga le vincite con somme che sono di molti ordini di grandezza inferiori a quello che dovrebbero essere, qualora si valutassero le probabilità in base al calcolo dei casi favorevoli e possibili.

In questi casi, ed in altri analoghi, il soggetto tende a trascurare la valutazione prudente delle probabilità, essendo in certo modo abbagliato dalla vistosità della possibile vincita, che supera ogni sua abitudine di valutazione ponderata della propria condotta economica. Un fenomeno analogo, e per così dire parallelo al precedente, si verifica quando il soggetto considera il rischio di eventi molto sgradevoli (come gravi disastri, o addirittura la morte) e quindi accetta anche di pagare dei premi di assicurazione di grandezza superiore a quella che sarebbe dettata dal calcolo prudente ed avveduto delle situazioni.

Le considerazioni che abbiamo svolto finora ci conducono a porre un problema importante, cioè ci conducono a chiederci in base a quali considerazioni un soggetto può enunciare una valutazione prudente della probabilità di un evento aleatorio E, in modo che il suo impegno economico sia il più razionale possibile.

Gli atteggiamenti di fronte a questo problema possono essere fatti rientrare sostanzialmente in due casi principali.

Nel primo caso l'evento aleatorio si presenta come il risultato di certe operazioni o di certi esperimenti su un sistema fisico che è conosciuto abbastanza bene, in modo da poter prendere in considerazione ed enumerare tutti i casi possibili, e poter valutare, tra tutti questi, il numero dei casi che sono favorevoli all'evento considerato. Se questo schema è valido, la valutazione prudente della probabilità dell'evento è fornita dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili.

Si rientra in questo schema quando si considerano i problemi classici riguardanti i giochi che vengono chiamati «d'azzardo», oppure quando si cerca di schematizzare, in modo rudimentale ed approssimato, il comportamento di una certa realtà che non si conosce perfettamente, ma che, per certe buone ragioni, si pensa di poter descrivere abbastanza bene con esperimenti e manipolazioni del tipo descritto.

Queste valutazioni sono tuttavia sottoposte alla clausola che tutti gli eventi possibili si presentino nelle stesse condizioni; si suole esprimere questa clausola dicendo che tutti gli eventi possibili debbono essere *ugualmente possibili*; ma appare difficile dare a questa frase un senso preciso. Tuttavia, quando ciò sia possibile, si può anche assegnare una valutazione prudente della probabilità facendo il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili; e questa valutazione viene spesso chiamata *probabilità a priori* o anche *probabilità teorica* dell'evento considerato. Ribadiamo tuttavia che il calcolo di tale rapporto tra due numeri non costituisce affatto, secondo la nostra impostazione, una *definizione* del concetto di probabilità, ma semplicemente una procedura per darne una prudente valutazione provvisoria.

Osserviamo tuttavia che si verifica molto spesso un secondo caso; cioè avviene che sia impossibile schematizzare il verificarsi di un evento aleatorio E mediante il verificarsi di un evento fisico così semplice come quello dell'estrazione di una pallina da una o più urne di composizione nota. In generale infatti le sole informazioni che si posseggono in relazione a determinati eventi aleatori sono quelle date dalla Statistica.

Non intendiamo analizzare qui il significato e la portata di questa scienza; per ora prenderemo in considerazione uno dei suoi aspetti, e precisamente l'aspetto di una scienza che studia il modo di assumere delle informazioni da grandi masse di fenomeni (oggetti, persone, fatti economici o sociali ecc.), e studia le tecniche di elaborazione di queste informazioni in modo che esse si prestino ad essere utilizzate per ulteriori analisi teoriche, oppure per valutazioni di probabilità, cioè per razionali impegni economici in condizioni di informazione incompleta.

Lo schema delle prove ripetute

Nelle applicazioni della teoria della probabilità capita spesso di dover valutare la probabilità di un evento aleatorio H che si intende verificato quando si ripetano certe n volte certi esperimenti, ognuno dei quali potrebbe dare come risultato un evento aleatorio E, del quale è stata valutata la probabilità p.

Si supponga che le condizioni nelle quali si ripetono gli esperimenti non cambino dall'uno all'altro; di conseguenza è ragionevole pensare che la valutazione di probabilità dell'evento E non debba cambiare da prova a prova. Il nuovo evento H di cui parliamo si intende verificato quando l'evento E si verifichi esattamente r volte in n prove; r essendo un intero che soddisfa alle limitazioni:

(1) $$0 \leqslant r \leqslant n.$$

Indicando, come abbiamo già fatto, con

$$q = 1 - p$$

la valutazione della probabilità dell'evento $-E$, allora la valutazione della probabilità di r successi in n prove è data dal numero

(2) $$P(r) = p^r * q^{n-r} * C(n,r);$$

in questa formula il simbolo $C(n,r)$ in-

Pagina dell'Ars conjectandi di Jacques Bernoulli, pubblicata postuma a Basilea nel 1713.

Puncta : Ad Pag. 2[illegible]

Tesserae

I	1.	2.	3.	4.	5.	6.																
II	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.											
III	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.						
IV	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	
V	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	&c.
VI	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	&c.
Num. casuum pro Tesseris, I	1.	1.	1.	1.	1.	1.																
		1.	1.	1.	1.	1.	1.															
			1.	1.	1.	1.	1.	1.														
				1.	1.	1.	1.	1.	1.													
					1.	1.	1.	1.	1.	1.												
						1.	1.	1.	1.	1.	1.											
II	1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.											
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.										
			1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.									
				1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.								
					1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.							
						1.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.						
III	1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.						
		1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.					
			1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.				
				1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.			
					1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.		
						1.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.	
IV.	1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	10.	4.	1.	
		1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	10.	4.	
			1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	10.	
				1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	
					1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	
						1.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	
V.	1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	305.	205.	126.	&c.
		1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	305.	205.	
			1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	305.	
				1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	
					1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	
						1.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	
				56.	126.	252.	456.	756.	1161.	1666.	2247.	2856.	3431.	3906.	4221.	4332.	4221.	3906.	3431.	2856.	2247.	&c.

dica il numero intero dato da:

$$C(n,r) = n*(n-1)*(n-2)*\ldots*(n-r+ +1)/1*2*3*\ldots*r;$$

esso viene chiamato «coefficiente binomiale» e dà il numero delle combinazioni diverse che si possono ottenere da n oggetti prendendoli a gruppi di r.
Si verifica che i valori massimi della valutazione di probabilità $P(r)$ data dalla (2) si raggiungono quando il numero r è uguale a

$$(3) \qquad n*p$$

qualora questo numero sia intero, oppure quando è uno dei due interi successivi più vicini al numero (3).
Tuttavia la valutazione di questo valore massimo della valutazione di probabilità $P(r)$ non ci informa ancora sul numero di volte in cui l'evento E si presenterà effettivamente su n prove ripetute nelle stesse condizioni; a questa domanda non si può dare risposta certa.
Si suole tuttavia enunciare una legge empirica, che viene spesso richiamata con l'espressione «Legge dei grandi numeri». Essa si riferisce allo schema di Bernoulli, cioè alla situazione che insorge quando si ripeta un grande numero di esperimenti che possono avere come risultato un certo evento aleatorio E, e vi siano delle buone ragioni per mantenere costante la valutazione di probabilità dell'evento E in ogni prova.
Indichiamo allora con la espressione «frequenza empirica» il rapporto:

$$(4) \qquad r/n$$

tra il numero dei successi ed il numero delle prove che si eseguiscono.
Con questa terminologia, la legge empirica dei grandi numeri potrebbe essere enunciata nel modo seguente:

quando si faccia un grande numero di prove, la frequenza empirica dei successi, nella grande maggioranza dei casi, si avvicina di molto alla valutazione della probabilità teorica, eseguita a priori.

L'enunciato precedente contiene diverse espressioni che non hanno senso preciso e generale, ma hanno soltanto un significato ristretto, e relativo alla situazione psicologica di chi le legge o le ascolta. Tale per esempio è la espressione «numero grande» che non può essere precisata in generale e che può acquistare qualche ulteriore precisione soltanto dal contesto ed in un preciso angolo visuale psicologico.
Analoghe considerazioni possono essere formulate a proposito della espressione «nella grande maggioranza dei casi» e «si avvicina molto».
Tuttavia questa formulazione della legge empirica dei grandi numeri non può essere ulteriormente precisata, se non nel caso che spiegheremo e con un teorema classico, dovuto a G. Bernoulli.
L'enunciazione rigorosa del teorema di Bernoulli, la sua dimostrazione ed il suo commento richiederebbero uno spazio di cui qui non disponiamo. Osserviamo tuttavia che questo teorema non fornisce affatto la dimostrazione della legge empirica dei grandi numeri, come alcuni erroneamente affermano. Sarebbe assurdo infatti pensare che una legge, empirica per sua natura, potesse essere dimostrata astrattamente con ragionamenti, come avviene per un teorema di Matematica.
Tuttavia, nel caso in esame, questo teorema permette di enunciare la legge empirica dei grandi numeri in un caso particolare, cioè in quello che si riferisce al valore 1 (uno) della valutazione a priori della probabilità.
Si potrebbe dire la stessa cosa in forma lievemente diversa (ma logicamente equivalente) enunciando quella che si potrebbe chiamare la «Legge attenuata dei grandi numeri», nel modo seguente: «Nelle condizioni dello schema di Bernoulli, un evento la cui probabilità a priori sia stata valutata come molto vicina ad uno si avvera quasi sempre».
Altro non si può dire, a meno di pretendere che la Matematica con i suoi teoremi possa dare delle regole che reggono la realtà, prima che si forniscano informazioni per la elaborazione dei dati. Il che non appare possibile, quando si voglia assumere un atteggiamento rigorosamente scientifico.

Il concetto di speranza matematica

Poniamoci ora nel primo dei due casi considerati nel paragrafo precedente, cioè supponiamo che l'evento aleatorio che si considera possa essere simulato con manipolazioni su sistemi fisici particolarmente semplici; per esempio consideriamo il caso di uno scommettitore che gioca contro un banco o un biscazziere; pertanto supponiamo che sia possibile dare una valutazione prudente della probabilità dell'evento aleatorio che si considera mediante il conteggio dei casi possibili e dei casi favorevoli. Si otterrà così un numero che, come abbiamo detto, viene abitualmente chiamato «probabilità a priori» o anche «probabilità teorica» dell'evento aleatorio considerato. Indichiamo poi con S la somma di denaro che lo scommettitore vince se si verifica l'evento stesso.
Si suol chiamare «speranza matematica» dello scommettitore il prodotto:

$$S * p(E)$$

dell'ammontare della eventuale vincita attesa per la valutazione calcolata a priori della probabilità dell'evento aleatorio il cui avverarsi determina la vincita. In corrispondenza si suol chiamare «contratto (aleatorio) equo» o anche «gioco equo» una scommessa in cui la posta versata dal giocatore è uguale alla sua speranza matematica.
Si può anche introdurre il concetto di «bilancio globale» del giocatore; questo è dato dalla somma algebrica di tutte le vincite dello stesso, moltiplicate per le rispettive valutazioni di probabilità, e naturalmente contando convenzionalmente gli esborsi come vincite con il segno negativo. Così, per esempio, se il giocatore deve versare la posta m per partecipare ad una scommessa, nella quale potrebbe vincere la somma S se si verifica un evento E del quale è stata calcolata la probabilità a priori $p(E)$, il bilancio globale del giocatore è dato da:

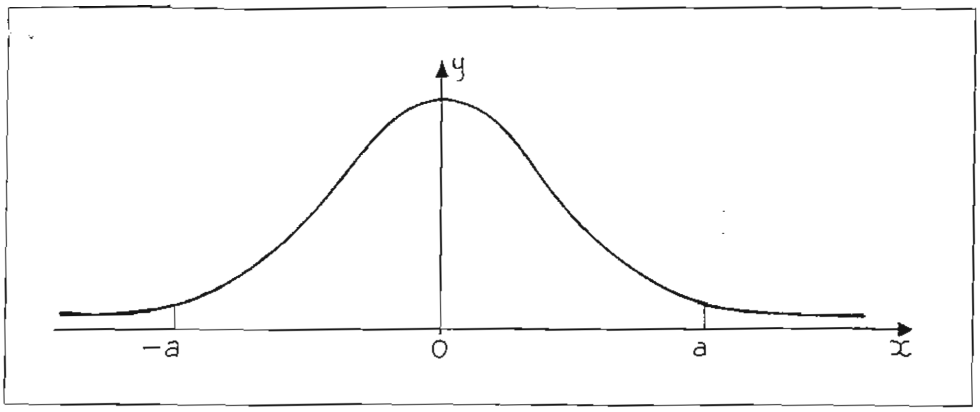
$$C = -m * 1 + S * p(E).$$

In questa formula il segno «meno» indica che la somma m è stata versata dal giocatore, ed il fattore 1 indica che l'esborso avviene con certezza.
Con questa nomenclatura, la definizione di contratto aleatorio o di gioco equo è data dalla condizione che il bilancio globale del giocatore sia zero.
A questo proposito occorre ricordare che in tutti i giochi d'azzardo che sono comunemente praticati (Lotto, roulette, dadi ecc.) il contratto non è mai equo, ed il bilancio globale del giocatore è sempre negativo. Il che significa che, in forza della legge empirica dei grandi numeri, il tenitore di banco (o il proprietario del casinò, o lo Stato nel caso del gioco del Lotto) ha la pratica certezza di guadagnare, su un grande numero di partite, anche se di quando in quando è costretto a pagare delle vincite forti ad alcuni giocatori.

Christian Huygens (1629-1695).

La teoria degli errori ed i teoremi-limite

I concetti di Calcolo delle probabilità che sono stati brevemente esposti nelle pagine precedenti trovano applicazione quasi quotidiana nella metodologia delle scienze sociali e delle scienze della Natura, vivente e non vivente.
Di particolare interesse è l'applicazione di questi concetti alla teoria degli errori di osservazione, applicazione che è solo uno tra i tanti possibili esempi di analisi statistica e probabilistica delle osservazioni scientifiche, per la costruzione delle teorie esplicative della realtà empirica.
Nella trattazione classica della teoria de-



gli errori si prende in considerazione la ripetizione numerosa di una medesima osservazione, che dovrebbe condurre alla misurazione di una grandezza fisica. Nella pratica della scienza le misure che si ottengono non coincidono quasi mai, soprattutto quando sono numerose, anche se sono state eseguite da uno stesso osservatore e con la stessa tecnica. Si pone quindi il problema di dare una valutazione della misura che si vuole ottenere che abbia la massima attendibilità, nel senso che fornisca le informazioni più utili per le successive applicazioni e per la formulazione di teorie che siano semplici e comprensive di molti fatti.

Nella concezione originaria, dovuta al matematico C. F. Gauss (1777-1855), si pensava che avesse senso parlare della misura «vera» della grandezza in considerazione, e che le diversità delle misure fossero dovute ad errori casuali nelle operazioni di misurazione, errori che provocano scarti da quella misura «vera» che, ripetiamo, si pensava esistente. In questo ordine di idee, e con ipotesi abbastanza ragionevoli, Gauss giunse ad enunciare la sua celebre legge, la quale traduce quella che oggi viene chiamata la «legge normale» della probabilità.

Le ipotesi che Gauss formulò sono abbastanza accettabili e portano a supporre che gli errori piccoli siano molto più probabili dei grandi e quindi molto più numerosi di quelli, quando si ripetano molte operazioni di misura. In base ad ulteriori ipotesi, abbastanza ragionevoli, Gauss giunse a scrivere l'equazione della sua celebre curva, che viene ancora oggi chiamata «curva di Gauss», o anche brevemente «gaussiana».

In un piano, riferito a coordinate cartesiane ortogonali x ed y, la curva gaussiana viene rappresentata da una equazione del tipo della seguente:

$$(1) \qquad y = h\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,e^{-(hx)^2}$$

ed ammette una rappresentazione grafica del tipo di quella data dalla figura annessa *(v. in alto)*.

In relazione a questa figura, considerata una ascissa a, l'area compresa tra la curva, l'asse delle ascisse e le due ordinate corrispondenti alle ascisse $+a$ e $-a$ fornisce la valutazione della probabilità che un determinato errore di misurazione abbia valore assoluto minore di a.

Si è trovato che numerosi altri fenomeni aleatòri soddisfano ad ipotesi analoghe a quelle che furono enunciate da Gauss per gli errori di osservazione, e quindi che la loro distribuzione può essere descritta adeguatamente con la curva suddetta. Questa, per la sua importanza nella teoria della probabilità, viene spesso chiamata «curva normale» della probabilità.

Non possiamo soffermarci ulteriormente qui ad approfondire le trattazioni che si riconnettono a queste teorie; ci limitiamo quindi a dare un cenno delle ricerche che hanno condotto alla dimostrazione di quello che viene chiamato il «teorema centrale limite» della probabilità. Le idee direttive che conducono a tale teorema si basano sulla intuizione che gli errori di osservazione e misurazione, così come moltissimi altri fenomeni casuali, siano dovuti alla concomitanza di moltissime cause, ognuna delle quali produce effetti molto piccoli; tuttavia il sommarsi di tantissimi piccoli effetti porta a degli effetti osservabili, che si distribuiscono in modo casuale, perché non è dato di poter tener conto di tutte le cause e di poter misurare esattamente ogni singolo piccolo effetto.

Tuttavia, anche se non è possibile dominare ogni singolo piccolo fenomeno, è tuttavia possibile dare in qualche modo la descrizione dell'effetto globale, il quale, sotto determinate ipotesi riguardanti le cause, viene adeguatamente descritto dalla legge normale gaussiana. Si ottiene così di poter dominare anche ciò che a prima vista potrebbe sfuggire alla trattazione esatta di una teoria fisico-matematica, e quindi si ottiene di potere, anche in questo caso, utilizzare in modo ottimale le informazioni che si ottengono, anche se esse sono limitate e parziali (**Carlo Felice Manara**, ordinario di Istituzioni di geometria superiore, Università di Milano).