

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

CORSO DI PERFEZIONAMENTO PER
**LA FORMAZIONE MATEMATICA DEGLI
STUDENTI: I PROBLEMI
DELL'APPRENDIMENTO**

DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Prof. Carlo Felice Manara

Prof. Raffaella Manara Tardini

Anno Accademico 1996/97

Carlo Felice MANARA

Raffaella TARDINI MANARA

APPUNTI PER IL CORSO DI PERFEZIONAMENTO IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA.

Università Cattolica S. CUORE. Sede di Brescia Anno Acc. 1996/97.

INDICE

Carlo Felice Manara

1. CARATTERISTICHE DEL PENSIERO MATEMATICO

- 1.1 La scienza della Natura e le sue procedure pag. 4
- 1.2 Le procedure della matematica pag. 6
- 1.3 La geometria e l'immaginazione pag. 7

2. LE ESIGENZE DELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

- 2.1 L' apprendimento della matematica pag. 9
- 2.2 Conseguenze per la didattica: il recupero del significato e del senso pag. 11
- 2.3 Il problema nella didattica della matematica pag. 12

3. LA MATEMATICA E IL LINGUAGGIO COMUNE. LA LOGICA DI BASE E GLI SCHEMI FONDAMENTALI DI RAGIONAMENTO

- 3.1 Matematica e linguaggio comune pag. 13
- 3.2 La nascita della logica simbolica pag. 14
- 3.3 L'insiemistica elementare intuitiva e l'algebra di Boole pag. 15
- 3.4 Il calcolo delle proposizioni pag. 16

ESEMPLIFICAZIONI DIDATTICHE

Raffaella Tardini Manara

1. CARATTERISTICHE DEL PENSIERO MATEMATICO

- 1.1 Punti nodali nell'introduzione del simbolismo matematico pag. 18
- 1.2 Dai numeri alle lettere pag. 19
- 1.3 La 'trasformazione' di formule: il calcolo simbolico pag. 21

2. LE ESIGENZE DELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

- 2.1 L'apprendimento non è lineare pag. 23
- 2.2 La funzione dell'esercizio pag. 24

3. LA MATEMATICA E IL LINGUAGGIO COMUNE

- 3.1 Il 'senso comune' e la matematica pag. 25
- 3.2 La matematica e il linguaggio comune pag. 27
- 3.3 Confronto tra elementi del linguaggio comune e del linguaggio specifico pag. 28

1. CARATTERISTICHE DEL PENSIERO MATEMATICO

SUNTO - Secondo l'opinione di H. Freudenthal, la matematica è "diversa"; cioè ha delle caratteristiche specifiche, che la rendono, sotto certi aspetti, profondamente diversa dalle altre materie di insegnamento scolastico [1]. Infatti, per l'Autore citato, la matematica si presenta come ricerca della certezza. Volendo analizzare ulteriormente le caratteristiche della dottrina, si potrebbe arguire dal suo sviluppo storico che esso avviene con la ricerca di una astrazione sempre maggiore e la costruzione di un simbolismo convenzionale; questo è dotato di regole sintattiche molto rigide, le quali permettono la deduzione assolutamente certa e rigorosa, ma spesso presentano anche notevoli difficoltà di apprendimento per certe menti.

Queste circostanze rendono necessario un assiduo esercizio per condurre i discenti all'impiego corretto del simbolismo: infatti, in una formula matematica è sufficiente che un solo segno convenzionale sia errato perché la formula comunichi una informazione del tutto diversa da quella che si desidera, oppure addirittura perda di senso. È tuttavia consigliabile cercare di non appesantire l'insegnamento con una eccessiva insistenza sull'addestramento all'uso del simbolismo ed alla applicazione delle regole convenzionali, e cercare inoltre di tener presente in ogni caso il significato dei simboli che si impiegano.

1.1 - La scienza della Natura e le sue procedure

Da un certo punto di vista, si potrebbe affermare che la matematica è una delle materie più semplici ed elementari di tutto il curriculum scolastico che viene imposto ai cittadini delle nazioni civili: infatti si hanno testimonianze storiche di esistenza di sistemi di notazione dei numeri e di calcolo presso le civiltà più antiche. Si potrebbe dire che l'uomo ha contato e calcolato proprio all'inizio della sua vita intellettuale; ed ha misurato le grandezze geometriche fin dalle epoche più antiche. Per esempio, è noto che Erodoto, uno degli storici più antichi della nostra civiltà [egli scrive circa 2400 anni fa], indica l'Egitto come il luogo di origine della geometria; luogo dal quale poi la geometria fu esportata in Grecia [2].

E nella Bibbia [3] si incontrano espressioni come "contare le pietruzze", le quali vengono interpretate come se accennassero a metodi per rappresentare i numeri, utilizzati nelle regioni del vicino Oriente [come la Palestina o la Mesopotamia].

Questi fatti ci spingono a domandarci la ragione per cui una dottrina così elementare e addirittura quasi istintiva come la matematica possa presentare tante difficoltà per molte menti, spesso anche bene dotate.

Forse le ragioni di ciò stanno anche nel fatto che la matematica ha dei caratteri peculiari, i quali hanno fatto dire al matematico Hans Freudenthal che la matematica è "diversa". Ovviamente, diversa dalle altre dottrine che vengono insegnate nelle scuole, e che vengono raggruppate nell'ambito delle scienze.

Infatti la procedura che si impiega nelle scienze della Natura potrebbe essere presentata brevemente osservando che ogni ricerca di spiegazione della realtà fenomenica si svolge secondo varie fasi: queste sono ordinate logicamente, anche se nella pratica quotidiana esse non sono distinte e soprattutto non si realizzano con una successione temporale

strettamente analoga alla gerarchia logica.

Le fasi nominate potrebbero essere presentate nel modo seguente: osservazione del fenomeno da spiegare; formulazione di una o più ipotesi sulla costituzione delle cose che producono i fenomeni osservati; deduzione delle conseguenze dalla ipotesi formulate e confronto di queste deduzioni con la realtà osservata [o ricostruita con la tecnica sperimentale].

Così, per esempio, gli antichi osservarono che vi sono in cielo delle luci che ci appaiono come immobili, nel senso che non variano da una notte all'altra le loro reciproche posizioni [e che ancora oggi vengono chiamate "stelle fisse"] ed altre luci che invece appaiono mobili [e che essi chiamarono "pianeti", come si usa ancor oggi].

Essi spiegarono questi fenomeni formulando certe ipotesi che in sostanza li conducevano ad immaginare un modello materiale costituito da una grandissima sfera perfettamente trasparente, avente il suo centro nella Terra, e sulla quale sono attaccate stabilmente le stelle fisse; sfera che gira ogni giorno attorno ad un asse che passa per la stella polare. Per spiegare i moti visibili dei pianeti essi immaginarono che questi ultimi fossero attaccati ad altre sfere, più piccole di quella precedentemente ricordate, che girano su se stesse, conservando tuttavia i loro centri sulla sfera grande.

Da questi modelli, e dalle ipotesi che li avevano originati, gli antichi dedussero le caratteristiche dei fenomeni astronomici che essi conoscevano. Tali modelli e le corrispondenti spiegazioni furono considerati come validi per secoli e secoli, precisamente fino al secolo XVII, quando si scopersero nuovi fenomeni astronomici che non potevano essere spiegati con tali modelli, pur ritoccati e complicati. Fu necessario allora enunciare altre ipotesi, dalle quali si potessero dedurre delle conseguenze che fossero confermate dalle esperienze.

Procedure analoghe a queste sono adottate in tutte le scienze della Natura. Esse sono fondate su certe fondamentali argomentazioni logiche, le quali potrebbero essere esposte nel modo seguente: se da una ipotesi A, formulata per spiegare un certo fenomeno, si deduce correttamente un insieme B di conseguenze, la conferma sperimentale delle conseguenze non garantisce la validità della ipotesi: infatti le stesse conseguenze potrebbero essere tratte da altre ipotesi. Questa argomentazione è stata svolta da molto tempo, ed è stata codificata da secoli nei trattati: per esempio, S. Tommaso D'Aquino scrive esplicitamente, a proposito delle spiegazioni dei fenomeni astronomici [4], che quelli conosciuti (al suo tempo, cioè nel secolo XIII) possono essere spiegati con il sistema di sfere trasparenti a cui abbiamo accennato; ma che potrebbero benissimo sussistere altri modelli che forniscono spiegazioni valide dei fenomeni prima conosciuti, e ne spiegano dei nuovi, che sfuggivano alle teorie precedenti. È questa una vicenda che si è avverata moltissime volte nella storia della scienza.

Invece, se l'insieme di conseguenze non viene confermato dalla esperienza, certamente l'ipotesi è falsa; e viene così invalidata e confutata [alcuni dicono "falsificata"] dalla realtà sperimentale.

Anche questa argomentazione è stata nota da moltissimo tempo: per esempio lo stesso Erodoto (che abbiamo incontrato poco fa, a proposito della genesi della geometria) prende in esame certe spiegazioni che venivano avanzate ai suoi tempi per spiegare la regolarità delle piene annuali del Nilo [5]. Secondo una di queste ipotesi, le piene in parola troverebbero la loro spiegazione nella esistenza di certi venti che soffiano parallelamente alla corrente del fiume. Ma Erodoto confuta questa spiegazione osservando che esistono altri fiumi che scorrono in direzioni diverse da quelle del Nilo e per i quali esistono dei venti che soffiano parallelamente alla loro corrente. Pertanto, se la spiegazione fosse

valida, anche per questi fiumi si dovrebbero verificare delle piene periodiche; ma ciò non avviene, quindi la spiegazione avanzata non è valida, perché una delle sue conseguenze necessarie non è vera.

1.2 - Le procedure della matematica

Abbiamo visto sommariamente i fondamenti delle procedure della scienza della Natura. Da queste riflessioni si può dedurre, tra l'altro, che la scienza della Natura dà delle spiegazioni dei fenomeni che non sono definitive, ma possono essere modificate e migliorate, in conseguenza della scoperta di nuovi fenomeni; pertanto si potrebbe dire che la scienza della Natura conferisce alle sue teorie un certo tipo di certezza che, pur avendo una sua validità, non è tuttavia definitiva. Diverso è invece il caso della matematica, la quale cerca la certezza in ogni sua procedura. Ciò non significa che la matematica non abbia alcuna connessione con la realtà esterna a noi; anzi, i concetti fondamentali della aritmetica sono tratti dalle nostre esperienze assolutamente elementari di manipolazione degli insiemi finiti, come abbiamo ricordato sopra, parlando della aritmetica dei popoli della Mesopotamia. Ed i nostri concetti fondamentali della geometria sono tratti dalle manipolazioni degli oggetti rigidi o dalle necessità delle misurazioni precise dei terreni.

Tuttavia, la matematica non cerca di spiegare la natura delle cose che si manipolano, ma si costruisce un proprio cammino in una direzione diversa; si potrebbe dire che la matematica procede alla costruzione di oggetti mentali ideali, tratti dalla esperienza attraverso l'operazione di astrazione, provvede a rappresentarli in modo convenzionale, cioè a costruire un linguaggio specialistico, che spesso diventa addirittura un linguaggio simbolico, cioè un insieme di segni convenzionali, che vengono utilizzati con certe regole.

Un primo passo del cammino della matematica è compiuto con una operazione che potrebbe essere chiamata "astrazione": così nei primi momenti dell'aritmetica, quando si manipolano insiemi finiti di oggetti, e si costruisce il concetto di numero naturale, si accetta immediatamente che, ai fini del conteggio degli oggetti che sono elementi di un insieme si prescinde (si suol dire appunto che "si fa astrazione") dalla natura chimica o fisica degli oggetti stessi, ed anche della loro forma. Pertanto gli oggetti in parola possono essere "rappresentati" con altri: così i popoli della Mesopotamia rappresentavano le pecore di un gregge con pietruzze; e gli elementi di un insieme possono essere rappresentati, con adeguate convenzioni, con le sferette di un pallottoliere. Analogamente, per quanto riguarda la geometria, per misurare un oggetto rigido e studiarne le proprietà geometriche, la nostra mente prescinde dalla natura fisica del solido, e si costruisce una immagine di esso quasi disincarnata e, trasparente; una immagine nella quale le sole cose che vengono prese in considerazione sono soltanto la disposizione reciproca delle parti, le loro dimensioni, gli angoli ecc..

Questa astrazione, che la nostra mente opera sugli oggetti immediati della nostra esperienza, permette di costruire un sistema di simboli, atti a rappresentare gli oggetti stessi; rappresentazione che risulta utile per la conoscenza approfondita delle loro proprietà, e soprattutto per le deduzioni di altre proprietà degli oggetti, diverse da quelle immediatamente intuite; ed infine la rappresentazione, quando è efficace, permette la deduzione certa, cioè permette alla matematica di raggiungere quello che appare come uno dei suoi caratteri distintivi e quasi costitutivi: il raggiungimento della certezza deduttiva.

Nell'ambito dell'aritmetica, la storia della scienza annovera molti

sistemi di convenzioni per rappresentare i numeri naturali; dalle pietruzze di cui abbiamo parlato, al pallottoliere, ancora oggi impiegato in certi paesi per i calcoli. Soprattutto interessanti sono i sistemi di numerazione e di rappresentazione verbale e grafica (scrittura) dei numeri che si incontrano presso i vari popoli della storia. La loro diversità dimostra che la costruzione dei concetti numerici è una specie di costante di ogni cultura; e si potrebbe anche dire che la diversa efficacia delle varie rappresentazioni tra di loro permette un confronto tra le differenti ingegnosità dei vari popoli che escogitarono i differenti sistemi di rappresentazione, e permette anche un certo confronto tra i livelli di evoluzione mentale e scientifica delle varie civiltà. È noto che oggi tutto il mondo civilizzato utilizza un unico sistema di convenzioni per la scrittura dei numeri naturali; sappiamo che tale sistema ha avuto origine nella civiltà indiana ed è stato portato nella civiltà mediterranea degli arabi, ed infine importato in Europa per opera del matematico Leonardo Pisano detto "il Fibonacci" [1170-1250]. È noto pure che talvolta, per certi usi molto limitati, vengono ancora oggi utilizzate le convenzioni impiegate dai Romani per rappresentare i numeri naturali [i cosiddetti "numeri romani"].

Le convenzioni che oggi noi adottiamo per rappresentare i numeri naturali, e che insegniamo nelle nostre scuole fin dall'inizio della carriera scolastica di ogni scolaro, presentano certi caratteri che spiegano la loro diffusione e la loro importanza.

Anzitutto esse permettono di rappresentare in forma semplice ed efficace numeri comunque grandi, utilizzando opportunamente 10 segni convenzionali: quelle che vengono chiamate le 9 "cifre significative" e il segno dello zero. Sappiamo che in questa rappresentazione si fa uso della cosiddetta "convenzione posizionale": in forza di questa convenzione un numero naturale viene rappresentato da una successione di cifre, questa viene letta come il risultato di una somma, nella quale ogni addendo ha un valore che dipende dalla cifra e dal posto che questa ha nella successione.

Ma il vantaggio maggiore di questo insieme di convenzioni sta nella possibilità di codificare in forma semplice e costante le regole per eseguire le operazioni sui numeri naturali. Anche in questo caso l'importanza di queste convenzioni è testimoniata dal fatto che nelle nostre scuole elementari si insegnano queste regole, e si addestrano i ragazzi a memorizzare certi passi elementari per eseguire certe operazioni [le cosiddette "tabelline"]. Per convincersi della utilità e dell'importanza di questi strumenti concettuali basta per esempio tentare di eseguire un calcolo aritmetico qualunque (somma o moltiplicazione) utilizzando le convenzioni romane di rappresentazione dei numeri.

In questo ordine di idee si potrebbe dire che la matematica ci offre un sistema di rappresentazione e di deduzione (cioè di dimostrazione delle conseguenze di certe premesse), i cui risultati sono dotati di una qualità della certezza che viene ordinariamente stimata superiore a ogni altro tipo di certezza.

Pertanto si potrebbe concludere dicendo che l'astrazione, operata dalla mente sugli oggetti immediati della nostra esperienza, ci permette di costruire un insieme di simboli e di regole che forniscono la rappresentazione chiara di certi aspetti della realtà e la deduzione certa delle proprietà fondamentali degli oggetti stessi.

1.3 - La geometria e l'immaginazione

Abbiamo parlato di un tipo di operazione di astrazione che la nostra mente esegue quando costruisce i concetti fondamentali dell'aritmetica e

delle sue procedure partendo dalle esperienze su insiemi finiti di oggetti. Altre esperienze noi facciamo con le operazioni che eseguiamo osservando o addirittura manipolando certi corpi che giudichiamo come rigidi, tali cioè da non variare sensibilmente di forma in conseguenza della manipolazioni; ed in massima parte l'operazione di astrazione, eseguita a partire da queste esperienze, conduce ad un insieme di concetti e di deduzioni che tradizionalmente vengono attribuiti alla geometria.

In questa procedure, come abbiamo già detto, la nostra immaginazione si costruisce delle rappresentazioni degli oggetti che sono, per così dire, trasparenti e quasi disincarnate, ridotte in certo modo al solo scheletro. In questa rappresentazione la nostra fantasia costruisce anche delle immagini di certi oggetti semplici ed elementari, come il "punto" la "linea", la "superficie" ecc. Oggetti che ovviamente non hanno esistenza nella realtà materiale, ma permettono di rappresentare le proprietà di questi con una approssimazione grande quanto si desidera.

A partire da certe proprietà elementari di questi oggetti, la geometria costruisce delle dimostrazioni rigorose di altre proprietà, che riguardano la posizione e le misure di altri oggetti, opportunamente definiti e costruiti.

È noto che abitualmente anche in geometria si usa simbolizzare le cose di cui si parla, con disegni o con altri mezzi; ma è chiaro che i ragionamenti che si svolgono, e le conclusioni alle quali si giunge non dipendono dai disegni, ma soltanto dalla connessione logica che le conclusioni hanno con le premesse enunciate.

Ciò era già stato detto esplicitamente da Platone, il quale, più di 23 secoli fa, diceva: «I geometri [cioè gli studiosi di geometria) si servono di figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui esse sono le immagini, ragionando sul quadrato in sé, sulla diagonale in sé e non su quelle che disegnano. Lo stesso si dica per tutte le figure che essi modellano o disegnano, di cui si servono come immagini (a guisa di ombre o di immagini riflesse sulle acque), cercando di vedere certe verità che non si possono vedere se non col pensiero » [6].

Pertanto si potrebbe dire che anche nella geometria la matematica rivela le sue caratteristiche, cioè si presenta come un pensiero astratto e simbolizzato, che ricerca la certezza con la chiarezza dei concetti ed il rigore delle dimostrazioni deduttive.

[1] Cfr. Hans Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica* Brescia (La Scuola Ed.), 1994. Titolo originale: "Revisiting Mathematics Education. China Lectures". Traduzione e introduzione di C.F. Manara.

[2] Erodoto, *Le storie*, Libro II, n.109

[3] Libro di Giobbe

[4] Divi Thomae aquinatis, *Summa Theologica*. Pars. I, Quaestio 32. art.3.

[5] Erodoto, *Le storie*, Libro II. N. 19 e seguenti

[6] Platone, *Repubblica* (510, d,e).

2. LE ESIGENZE DELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

SUNTO - Le caratteristiche della matematica e la sua "diversità" richiedono una didattica specifica. Occorrerebbe infatti evitare, come si è detto, un'impostazione che insista troppo sull'addestramento all'impiego del linguaggio matematico, o sull'applicazione di procedure di soluzione dei problemi già stabilite e codificate.

Secondo Freudenthal, l'apprendimento della matematica dovrebbe essere una "reinvenzione guidata", dovrebbe cioè risultare da un'opera autonoma del discente, che si appropria della struttura logica della materia. L'insegnante dovrebbe guidare questa maturazione dell'allievo, evitandogli i giri viziosi e le deviazioni pericolose. Occorre tuttavia tener presente il fatto che l'apprendimento avviene spesso per "salti", che conducono il discente a diversi livelli di astrazione e di conoscenza, con variazioni che possono apparire discontinue ad un osservatore esteriore.

In ogni caso occorre cercare, nei limiti del possibile, di favorire la giusta autonomia di pensiero del discente. Infatti, sempre secondo Freudenthal, la matematica che si insegna dipende dalla stima che si ha dell'allievo: si può insegnare una matematica da uomo libero o da schiavo.

Se l'apprendimento avviene come reinvenzione guidata, esso si realizza con un giusto equilibrio di appropriazione e creatività; quest'ultima sotto il controllo continuo dell'analisi logica.

In questo ordine di idee, la geometria, bene insegnata, appare come uno stimolo molto efficace dell'immaginazione, e insieme come un utile allenamento alla critica e alla ricerca dell'aderenza del ragionamento astratto ad una realtà concreta ma in certo modo trasparente. Nello stesso ordine di idee, l'insegnamento della geometria analitica (o anche solo della trigonometria) ci si presenta come l'impiego di un determinato linguaggio (quello dell'algebra) per descrivere e conoscere un contenuto dato; e quindi come un primo elementare esempio di conoscenza di una data realtà con gli strumenti della matematica.

2.1 - L' apprendimento della matematica

Abbiamo ricordato poco fa l'espressione di H. Freudenthal, secondo il quale "la matematica è diversa" [beninteso dalle altre scienze che si insegnano a scuola]; consegue di qui che la didattica della matematica deve percorrere dei cammini diversi da quelli che si percorrono nell'insegnamento delle altre dottrine.

In forma provocatoria si potrebbe descrivere questa necessità [di una didattica diversa della matematica] come la opportunità di insegnamento ragionevole di una matematica ragionevole. Queste espressioni possono apparire paradossali, soprattutto perché, nella opinione comune, la matematica viene vista in qualche modo come al culmine della razionalità; e molti dichiarano di non capirla, e rinunciano ad uno studio approfondito, quasi dichiarandosi sconfitti di fronte alle difficoltà della materia, e incamerando quindi la corrispondente frustrazione; dalla quale poi cercano di riemergere in vari modi, e con vari atteggiamenti, sui quali per il momento non ci soffermiamo.

L'analisi delle caratteristiche del pensiero matematico può aiutare a stabilire dei criteri didattici per la matematica, criteri che tuttavia

non intendono essere delle prescrizioni minuziose del comportamento dell'insegnante. Infatti, tale comportamento deve essere sempre progettato e adottato non soltanto in base alla (indispensabile) conoscenza della materia, ma anche in relazione al fine formativo dell'insegnamento. Questo non dovrebbe proporsi come scopo il puro e semplice conferimento di nozioni, e lo sviluppo di certe abilità tecniche (anche in senso lato) del discente, ma soprattutto la formazione di una personalità autonoma, che possiede e domina le proprie conoscenze e dirige le proprie capacità a certi fini conosciuti e cercati in modo consapevole e cosciente.

Ricordiamo, a questo proposito, che l'azione dell'insegnamento non può limitarsi alla pura e semplice applicazione di tecniche didattiche, fondate sulla conoscenza (non sempre completa e valida) dei meccanismi psicologici dell'essere umano, ma l'insegnamento è in ogni caso una azione unica ed irripetibile di un essere umano su un altro essere umano (il discente). Questi ha capacità di conoscenza e di elaborazione degli insegnamenti ricevuti che sono molto diverse e certamente superiori a quelle degli altri animali, pertanto si merita un'azione diversa da quella che si impiega per l'addestramento degli animali, anche di quelli giudicati sbrigativamente come "intelligenti".

Una delle circostanze più interessanti e frequenti che si possono osservare nell'apprendimento umano è costituita dal fatto che esso presenta delle fasi e delle discontinuità che si possono chiamare sbrigativamente "salti". Questi si osservano frequentemente presso i ragazzi e i giovani studenti, e un minimo di introspezione mostra che spesso queste vicende dell'apprendimento si verificano anche presso le persone mature.

Queste discontinuità nell'apprendimento sono fondate sulla natura della matematica, la quale, almeno ai fini dell'insegnamento, presenta una struttura a vari livelli concettuali, che corrispondono a vari livelli di astrazione. Un esempio di questa circostanza si incontra nell'evoluzione mentale dell'apprendimento di certi capitoli della materia. Per esempio, ad una certa età vengono apprese le regole per la manovra dei numeri naturali; tali regole vengono apprese ed applicate in forma pratica, attraverso esercizi concreti e problemi che danno il senso dei concetti ed il significato del simbolismo che si adotta universalmente. A un livello superiore di astrazione, con l'algebra, l'oggetto dello studio diventa l'insieme delle leggi delle operazioni, attraverso le loro proprietà formali.

In altri termini, ciò che ad determinato livello viene applicato, in forza ad un insieme di regole accettate ed applicate senza discussioni, diventa oggetto esplicito di studio ad un livello superiore; e le regole, prima applicate materialmente in base a precetti ed istruzioni, vengono giustificate e dimostrate. Questa struttura della dottrina si accompagna anche a un tipo di insegnamento che, almeno a partire dal livello inferiore ed iniziale, deve necessariamente procedere per esempi caratteristici, o, come si suol dire, per paradigmi.

A questo punto vale la pena di osservare che nella pratica dell'insegnamento si possono utilizzare gli esempi pratici e concreti in due modi, secondo atteggiamenti notevolmente distinti. Con un primo atteggiamento l'esempio viene presentato dopo l'esposizione di una teoria, come applicazione di questa, per far vedere come essa, già presentata in astratto ed in generale, funziona nei vari casi particolari. Di solito questi esempi fanno anche da introduzione dagli esercizi collegati con i vari capitoli della esposizione della materia, e mostrano la strada per rispondere agli esercizi stessi con gli strumenti concettuali e teorici che sono stati presentati.

Di altro genere è il paradigma, o esempio paradigmatico, il quale

presenta un caso particolare della applicazione di una teoria, ma in modo tale che il discente sia stimolato a costruirsi autonomamente ed a prendere coscienza delle regole e delle strutture generali.

È appena necessario osservare che al momento della iniziazione alla matematica, cioè a livello elementare, le convenzioni di rappresentazione e le regole delle operazioni aritmetiche sono generalmente presentate in forma paradigmatica, cioè attraverso esempi caratteristici, a partire dai quali il discente apprende le regole generali con l'applicazione e l'esercizio, ed accettando via via le correzioni o i suggerimenti del docente, ove occorrono.

È facile, e forse anche utile, che abitualmente molti giochi (per esempio un gioco di carte o di altro tipo) vengano appresi con procedure analoghe: sarebbe infatti spesso troppo complicato e forse fuorviante enunciare esplicitamente in forma astratta e generale tutte le regole di un dato gioco, regole che invece si apprendono via via con la pratica del gioco, quando si presenti l'occasione di praticarle.

Nel caso della matematica, la riflessione viene spesso in seguito, insieme con l'elaborazione teorica, e con la conquista di un livello di astrazione superiore a quello in cui si trovava la pura applicazione pratica delle regole di comportamento.

2.2 - Conseguenze per la didattica: il recupero del significato e del senso

Le caratteristiche dell'apprendimento della matematica debbono essere tenute presenti nella pratica della didattica. Infatti, come abbiamo già detto, secondo H. Freudenthal questa didattica dovrebbe stimolare nel discente quella attività che, con espressione molto efficace, viene chiamata "reinvenzione guidata". In altri termini l'acquisizione dei concetti e delle strutture operative della matematica dovrebbe essere il risultato di una attività del discente, che si comporta come se certe nozioni fossero inventate da lui, e fossero il risultato di una sua attività originale, con la quale egli "reinventa", per così dire, la teoria e le regole di applicazione, che in tal modo diventano una specie di proprietà della sua mente, la quale è in grado di ricostruirle qualora intervenisse una lacuna di memoria.

Occorre osservare che in questa attività di appropriazione il ruolo del docente è molto importante; abbiamo infatti parlato poco sopra di "reinvenzione guidata", perché il docente conosce tutto il panorama della regione in cui il discente si avventura e quindi può evitargli di cadere in giri viziosi, oppure di imboccare delle strade senza sbocco.

Ricordiamo anche che uno degli aspetti della matematica è quello di essere un pensiero simbolizzato. Invero si potrebbe dire addirittura che la simbolizzazione ha accompagnato la matematica durante tutta la sua storia plurisecolare ed oggi ne costituisce un aspetto fondamentale.

Le regole della sintassi dei simboli matematici permettono la deduzione rigorosa e quindi costituiscono una delle ragioni dell'importanza del successo della matematizzazione della scienza modernamente intesa. Tuttavia le regole di questa sintassi sono molto rigide: infatti è noto che nel linguaggio comune si possono comunicare delle informazioni anche senza rispettare tutte le regole di grammatica e di sintassi; invece se in un'espressione matematica anche un solo simbolo è errato o fuori posto, l'espressione può perdere di senso, o comunicare una informazione del tutto diversa da quella che si voleva. In forma pittoresca, anche se approssimata, si potrebbe dire che una espressione matematica è analoga ad un accordo musicale, nel quale anche una sola nota fuori posto guasta l'effetto.

Questa circostanza, insieme con il fatto che i simboli matematici sono in gran parte artificiali e convenzionali, può presentare delle difficoltà, anche notevoli, a certe menti, che vengono così allontanate dalla matematica; e questa stessa difficoltà fa spesso scegliere ai docenti la strada dell'addestramento all'impiego dei simboli ed alla applicazione rigorosa delle regole di sintassi (regole formali del calcolo algebrico, espedienti di calcolo numerico ecc.). Si inizia così spesso un circolo vizioso, perché gli esercizi ripetuti generano nel discente noia e spesso addirittura ripulsione ed esasperazione; e spesso, il che è peggio, risulta deformata nella mente del discente l'immagine della matematica, il cui significato viene ridotto a un insieme di manovre noiose di simboli privi di senso, soggetti a regole arbitrarie.

Pare chiaro che per evitare di urtare in queste difficoltà sia utile che il docente curi il più possibile che ad ogni livello di apprendimento il simbolo sia collegato con il significato, e che l'esercizio sull'impiego dei simboli e sulla applicazione delle regole della loro sintassi sia il più possibile collegato con il senso delle operazioni che si eseguono, e con la loro giustificazione, in quanto regole di un linguaggio che è nato per descrivere qualche cosa e per trarre rigorosamente le conseguenze da certe premesse.

2.3 - Il problema nella didattica della matematica

Ciò che è stato detto poco sopra a proposito degli esercizi può trovare applicazione anche nei riguardi dei problemi matematici.

Anche in questo campo il docente è spesso tentato di ridurre la propria opera di insegnamento ad addestrare i discenti nell'applicazione di un certo numero di procedure e di formule risolutive, dopo di aver inserito un problema in una delle classi (più o meno numerose), di cui i manuali correnti forniscono elenchi più o meno ricchi.

Invece, si può osservare che la risoluzione di un problema costituisce un'occasione importante perché il discente sia stimolato a ristrutturare le proprie conoscenze della materia, e a progettare una successione di operazioni (calcoli, deduzioni, dimostrazioni, verifiche ecc.) ordinate logicamente in un ordine gerarchico e dirette a conseguire le informazioni richieste.

Infatti, la soluzione di un problema matematico potrebbe essere descritta come una procedura che ha come scopo l'acquisizione razionale di informazioni esplicite. Tale procedura può, in casi molto particolari, ridursi alla applicazione di certe formule note.

Già circa 18 secoli fa il matematico alessandrino Proclo, sulla scorta di Aristotele, aveva codificato la procedura di soluzione di un problema matematico osservando che essa avviene in due fasi, che egli chiamò di "analisi" e di "sintesi". Nella prima fase (quella di analisi), si immagina il problema risolto e si deducono le condizioni necessarie a cui debbono soddisfare gli elementi della soluzione immaginata. Nella seconda fase (quella di sintesi) le deduzioni vengono eseguite "a ritroso" per ricercare quali siano gli enti che risolvono il problema dato, tra quelli che soddisfano alle condizioni necessarie.

Come si vede, in questa concezione, la applicazione di formule è soltanto uno degli strumenti deduttivi, e quindi realizza soltanto una parte della procedura corretta e completa, ma il compito principale è sempre quello affidato al ragionamento, e soprattutto dalla progettazione del cammino che porta alla soluzione.

Carlo Felice Manara

3. LA MATEMATICA E IL LINGUAGGIO COMUNE. LA LOGICA DI BASE E GLI SCHEMI FONDAMENTALI DI RAGIONAMENTO

SUNTO - Da ciò che precede si può dedurre che la matematica ha un aspetto di linguaggio, quindi il suo insegnamento ed il suo apprendimento presentano analogie, pur nella stretta specificità della dottrina, di cui si è detto sopra in I), con l'insegnamento e l'apprendimento della lingua comune.

Un insigne matematico contemporaneo ha scritto addirittura che "La prima matematica è la lingua italiana", volendo così indicare la stretta analogia che intercorre tra i problemi di logica e di espressione che si incontrano nell'impiego della lingua comune e in quello del simbolismo matematico.

Pertanto l'insegnamento della matematica non può dimenticare la presentazione esplicita delle nozioni classiche della logica: condizione necessaria, condizione sufficiente, condizione necessaria e sufficiente. Sarà interessante ed istruttivo presentare tali nozioni con espressione verbale classica, oppure con il simbolismo insiemistico, oppure infine con il calcolo delle proposizioni [Aussagenkalkül]. Sarà pure istruttivo il confronto esplicito tra estensione ed intensione (o anche comprensione) di un concetto.

In particolare, fa parte dell'allenamento alla critica l'analisi della confutazione di una proposizione mediante un contro esempio, confutazione che è l'applicazione di una regola logica precisa: dalla negazione della conseguenza (Tesi di un ragionamento formalmente ben fatto) segue la negazione della premessa (Ipotesi del ragionamento). Analoghe considerazioni si possono svolgere a proposito della dimostrazione per assurdo spesso impiegata in geometria.

3.1 - Matematica e linguaggio comune

Un Collega illustre ha scritto recentemente, su certe sue dispense una frase che appare paradossale: precisamente egli ha scritto che "La prima matematica è la lingua italiana".

La frase è ovviamente diretta a studenti italiani, e vuole mettere in evidenza certi fatti cui abbiamo già fatto cenno. Anzitutto appare chiaro che la formazione al pensiero matematico non può essere separata dalla formazione al pensiero chiaro ed alla espressione verbale rigorosa. Abbiamo infatti detto che la matematica è pensiero simbolizzato; ma è chiaro che la prima rappresentazione simbolica che ognuno di noi fa del proprio pensiero non avviene con il simbolismo matematico, ma invece con l'impiego della lingua naturale. Pertanto è lecito dubitare sulle affermazioni che si odono talvolta, e che riguardano certi studenti i quali "...non riescono in italiano, ma sono delle cime in matematica". Penso infatti che la matematica abbia un aspetto fondamentale che la rende simile a un linguaggio, linguaggio, come abbiamo detto, convenzionale e simbolizzato, ma sempre uno strumento per rappresentare dei concetti e per comunicarli agli altri.

È noto che la lingua comune, parlata e scritta, non viene soltanto utilizzata per comunicare concetti e ragionamenti: infatti essa può essere impiegata per impartire dei comandi, oppure per suscitare emozioni o per far sorgere dei sentimenti. Ma quando essa viene utilizzata per trasmettere dei concetti deve ubbidire a certe leggi logiche fondamentali, le quali sono sostanzialmente le stesse che valgono anche

per il simbolismo della matematica, anche se apparentemente vengono presentate in maniera diversa.

Si aggiunga che per secoli, dall'epoca della geometria greca fino alla creazione del simbolismo algebrico, le argomentazioni matematiche sono state svolte con l'impiego della lingua comune parlata: per esempio, il matematico bresciano Niccolò Tartaglia, nel secolo XVI, fornì la soluzione dell'equazione algebrica di terzo grado con parole della lingua italiana. Precisamente tale soluzione viene fornita non con una formula algebrica, come noi facciamo oggi, ma descrivendo con parole le procedure di calcolo delle soluzioni numeriche.

3.2 - La nascita della logica simbolica

Da ciò che abbiamo visto discende facilmente che esiste un certo parallelismo tra l'apprendimento della matematica e quello del linguaggio comune, almeno nella misura in cui questo viene utilizzato per comunicare concetti e ragionamenti, e non per suscitare o descrivere emozioni o stati d'animo.

È noto che la logica classica utilizzava le lingue naturali per i ragionamenti: il greco, il latino, il francese, l'italiano ecc., a seconda della scelta dell'autore. In particolare essa aveva analizzato e classificato certi tipi fondamentali di ragionamento schematizzato, che ancora oggi sono richiamati con il termine (derivato dal greco) di "sillogismi". Tuttavia è noto che, quando si utilizzano le lingue naturali, un termine non ha sempre lo stesso significato; anzi, in generale esso ne ha diversi, e la precisazione di un determinato significato tra i vari possibili viene ottenuta dal contesto della frase, o della pagina, o addirittura dell'opera in cui esso è inserito. Gli esempi che si possono dare sono molti, e appartengono alla nostra esperienza quotidiana: si pensi, per esempio, alla parola italiana "fine". Essa può essere un aggettivo oppure un sostantivo. Come aggettivo acquista il significato di "sottile", "acuto", "affilato", ed anche "raffinato, elegante". Come sostantivo, può essere di genere maschile oppure femminile, con significati diversi. Appare infatti chiaro che, per esempio, la fine di un viaggio è qualcosa di profondamente diverso dal fine di esso.

Un caso particolare molto importante di queste ambiguità è quello fornito, nella lingua italiana, dalle congiunzioni "e" ed "o", ed i programmi delle nostre scuole elementari già prescrivono che si attiri l'attenzione degli scolari sulle necessarie distinzioni tra i vari significati che si possono dare alle frasi in cui vengono impiegate queste congiunzioni.

Si considerino gli esempi forniti dalle frasi seguenti:

- a) "Erano presenti studenti e studentesse"; qui la particella "e" esprime la unione logica tra due insiemi che non hanno elementi in comune;
- b) "Nel garage vi erano tre macchine di colore rosso e targate "Brescia"; qui la particella "e" conduce a costruire mentalmente l'insieme intersezione di quello delle macchine rosse e di quello delle macchine targate "Brescia".
- c) "Per il mio prossimo viaggio in America prenderò l'aereo o la nave"; qui la particella "o" ha ovviamente significato di alternativa esclusiva, del tipo di quella che si presenta ancora oggi talvolta con la espressione latina "aut aut". Infatti non è possibile andare in America, nello stesso viaggio, con l'aereo e con la nave, e la scelta di uno dei mezzi di trasporto esclude l'altra.

d) "Al bar potrai bere vini o liquori"; e qui con la particella "o" non s'intende escludere che si possano bere tanto vini che liquori. Pertanto in questo caso la particella acquista il senso che i latini attribuivano alla congiunzione "vel", e questo termine latino viene talvolta utilizzato ancora oggi in certi testi di logica (soprattutto nel mondo anglosassone).

Queste osservazioni suggeriscono la spiegazione del fatto che negli ultimi secoli, vari matematici e filosofi, tra i quali ricordiamo Leibniz [Gottfried Wilhelm Leibniz, 1649-1716], Boole [George Boole, 1815-54], Peano [Giuseppe Peano, 1858-1932], Russell [Bertrand Russell, 1872-1970], Hilbert [David Hilbert, 1862-1963], intrapresero la costruzione di simbolismi atti a rappresentare i concetti, per così dire, in modo diretto, senza passare per l'intermediazione del linguaggio comune; e anche formularono delle regole di sintassi [regole formali di manovra dei simboli], che traducevano le operazioni logiche, in particolare la deduzione, con procedure analoghe a quelle che si impiegano in aritmetica per i calcoli con i numeri.

I simbolismi di questo tipo più frequentemente utilizzati sono: quello del formalismo dell'insiemistica elementare intuitiva e quello del calcolo delle proposizioni [Aussagenkalkül].

Per quanto riguarda la cosiddetta insiemistica intuitiva, è noto che questa viene insegnata fino dal livello scolastico elementare, con l'utilizzazione di illustrazioni grafiche, chiamate "diagrammi di Eulero-venn". Con questo tipo di illustrazione grafica [che non è l'unica possibile] si cerca di rendere intuitive le due operazioni logiche che sono state scelte come fondamentali in questo atteggiamento: è noto che tali operazioni sono quelle di intersezione e di unione tra insiemi. Precisamente, con l'operazione logica di intersezione si cerca di tradurre il significato che ha la congiunzione "e" nell'esempio b); e con l'operazione di unione si cerca di tradurre il significato che ha la congiunzione "o" nell'esempio d).

3.3 - L'insiemistica elementare intuitiva e l'algebra di Boole

È noto che, sulla base del simbolismo dell'insiemistica intuitiva elementare, si può istituire un insieme di regole sintattiche, cioè di regole di manovra dei simboli e di trasformazione delle formule, in modo da riuscire a costruire un'algebra; essa è il germe di quell'insieme di proposizioni e di teoremi che viene oggi chiamata "Algebra di Boole". Con queste regole formali, è possibile esprimere e tradurre i ragionamenti schematici, di cui abbiamo già parlato, che la logica classica chiamava "sillogismi".

La logica classica aveva analizzato questi ragionamenti elementari, ciascuno dei quali è costituito da tre proposizioni: due di queste vengono chiamate "premesse", e la terza viene chiamata "conclusione". Le premesse possono essere accettate come vere per varie ragioni, oppure possono essere accettate soltanto in via provvisoria. La validità della conclusione è fondata soltanto sulla sua forma, e sul collegamento che essa ha con le premesse, accettate o accertate.

A titolo di esempio, riportiamo qui quattro schemi fondamentali di sillogismi elencati dalla logica classica.

Indicati con A, B, C degli insiemi diremo brevemente "tutti gli A" al posto della frase più ampia "tutti gli elementi dell'insieme A"; analoghe cose si dicano per gli insiemi B e C.

Gli schemi di ragionamento di cui si diceva sono indicati con certe parole convenzionali, che servono per operazioni logiche che qui non possiamo esporre.

Primo schema (parola convenzionale della logica classica: BARBARA)

Tutti i B sono C;
tutti gli A sono B;
dunque tutti gli A sono C.

Secondo schema (parola convenzionale della logica classica: CELARENT)

Nessun B è C;
tutti gli A sono B;
dunque nessun A è un C.

Terzo schema (parola convenzionale della logica classica: DARII)

Tutti i B sono C;
alcuni A sono B;
dunque alcuni A sono C.

Quarto schema (parola convenzionale della logica classica: FERIO)

Nessun B è un C;
alcuni A sono B;
dunque alcuni A non sono C.

L'utilizzazione dei diagrammi di Eulero-Venn per rappresentare questi legami tra proposizioni costituisce un esercizio del tutto elementare.

3.4 - Il calcolo delle proposizioni

L'atteggiamento che consiste nel simbolizzare certi insiemi e nello stabilire certe leggi sintattiche per rappresentare i loro rapporti, non è l'unico possibile, anche se è oggi quello che più frequentemente viene utilizzato nella nostra scuola. Si può adottare un altro atteggiamento, che conduce a rappresentare simbolicamente non degli insiemi, ma delle proposizioni.

In questo ordine di idee, si dà il nome di "proposizione" a un insieme di simboli linguistici che si considera come un tutto unico, e al quale è possibile attribuire un "valore di verità": vero o falso.

Si formulano inoltre anche delle regole, le quali permettono di costruire certe proposizioni (chiamate proposizioni "composte") a partire da certe altre (chiamate "semplici" o anche "elementari"), che conducono a determinare i valori di verità delle proposizioni composte, a partire dai valori di verità delle proposizioni componenti. Si ottiene così un "calcolo delle proposizioni" [in tedesco "Aussagenkalkül"], il quale permette di riprodurre alcune procedure di deduzione della logica abituale. Qui non intendiamo approfondire l'argomento, ci limitiamo a riflettere su alcune espressioni abituali e su alcune notazioni, adottate nella manualistica abituale.

In questo atteggiamento, indicate con p e q due proposizioni, talvolta, per indicare che dalla verità della proposizione p si può dedurre la verità della proposizione q si suole scrivere, in forma convenzionale simbolica:

$$(1) \quad p \rightarrow q$$

leggendo "se p , allora q " oppure "da p consegue q " o in altri modi analoghi. Si suole anche dire che " p è condizione sufficiente" perché q sia valida; ed anche che " q è condizione necessaria perché p sia valida".

Se poi, insieme con la (1), si può dimostrare anche la:

$$(2) \qquad q \rightarrow p$$

allora si suol dire che " p è condizione necessaria e sufficiente per q ", ed anche che " q è condizione necessaria e sufficiente per p ".

In questo caso si suole anche dire che " q è vera se e soltanto se p è vera"; alcuni scrivono convenzionalmente che q è vera "sse" p è vera, e si suole scrivere la formula convenzionale simbolica:

$$(3) \qquad p \leftrightarrow q$$

leggendo anche " p e q sono logicamente equivalenti".

È da osservarsi che in generale dalla validità della (1) non si può accertare immediatamente la validità della (2): questo è un errore logico che viene commesso con grandissima frequenza, e che purtroppo invalida tante argomentazioni, non soltanto di matematica o di geometria.

Ricordiamo infine che se vale la (1), dalla falsità della q si trae la falsità della p ; questa osservazione fonda la validità della procedura di dimostrazione che viene spesso chiamata "riduzione all'assurdo" o anche "dimostrazione per assurdo". In questa procedura, per dimostrare che una certa proposizione p è vera si fa vedere che è falsa la sua negazione; ed a questo fine si assume come ipotesi la negazione in parola e si trae da essa una conseguenza chiaramente falsa.

1. CARATTERISTICHE DEL PENSIERO MATEMATICO

1.1 - Punti nodali nell'introduzione del simbolismo matematico

Nel percorso scolastico di educazione matematica vorrei sottolineare alcuni passaggi particolarmente delicati a riguardo delle caratteristiche del simbolismo di cui la matematica fa uso.

Il *simbolo* è una componente di grande importanza nel pensiero matematico. Esso non rappresenta soltanto una forma di *stenografia* della scrittura e del pensiero; oltre alla funzione di abbreviazione, i simboli costituiscono una caratteristica intrinseca del procedimento di matematizzazione e un contenuto della matematica.

Dice H. Freudenthal: *"Il procedimento che consiste nell'arricchire il linguaggio con simboli e con il simbolismo data da molto tempo; e all'inizio si è limitato al contenuto matematico, per entrare poi nel linguaggio che parla di questo contenuto; questo processo di inventare, aggiustare e trasformare il linguaggio è chiamato 'formalizzare'."*¹ Vogliamo qui considerare l'azione del "formalizzare" nel suo significato più positivo e profondo: "dare forma" alle cose, che è ciò che ne rende possibile la conoscenza (non possiamo avere contatto con qualcosa di confuso e indistinto).

Dal punto di vista del linguaggio e del pensiero, formalizzare ha il significato di rendere completamente esplicito il senso: ciò avviene tanto per la poesia, nella quale la forma (in questo significato) è l'essenziale, come per la scienza. La simbolizzazione è un aspetto della formalizzazione, intesa in questo senso.

Pensiamo al significato stesso della parola simbolo, significato che emerge chiaramente nell'origine greca del vocabolo: ciò che 'tiene insieme' elementi diversi, cioè un segno, o un'immagine, che rimanda ad altro.

È chiaro che se stacciamo il simbolo da ciò a cui vuol rimandare, esso viene ridotto a pura apparenza: questa è la radice del formalismo in senso riduttivo, cioè l'abitudine a trattare direttamente sui simboli prescindendo dalla loro funzione di rimando a un senso.

Il simbolo matematico non è solo una forma di scrittura: se così fosse, molte difficoltà di apprendimento si ridurrebbero alla pura questione di assimilare un alfabeto e una grammatica. Invece, esso è per la matematica veicolo di significato e di senso, e dominare i simboli è indispensabile per passare da un livello di astrazione a un altro di grado più elevato. Uno degli esempi più significativi a questo proposito è il numero e le diverse forme con cui nella storia è stato simbolizzato.

La scrittura del numero potrebbe essere considerata un aspetto del tutto superficiale rispetto al concetto di numero: così troviamo in tutte le civiltà nozioni e uso dei numeri, qualunque sia la forma di rappresentazione adottata. Eppure, la scrittura decimale che ci è abituale, basata sulla convenzione posizionale del valore delle cifre, rappresenta la sintesi di un livello più elevato di concettualizzazione rispetto al semplice concetto del numero (naturale): essa contiene al proprio interno la formalizzazione di numerose proprietà delle operazioni sui numeri stessi (somma, potenza, moltiplicazione) unita a scelte

¹ H. Freudenthal *Ripensando l'educazione matematica* pag. 55

convenzionali, comode per certi scopi, ma, a ben riflettere, di un elevato, grado di complessità. La scelta di tale forma di rappresentazione infatti non è stata indifferente rispetto allo sviluppo del concetto di numero (numeri decimali limitati e illimitati) e della rappresentazione che ne consegue che ha reso possibile.

Questa riflessione vuole suggerire che molte difficoltà dei bambini e dei ragazzi nell'acquisire dimestichezza con l'aritmetica elementare possono sorgere dalla intrinseca difficoltà del simbolismo numerico che noi adottiamo, difficoltà della quale noi adulti non siamo più consapevoli, ma che per un ragazzo rappresentano un cammino tutto da cominciare.

Il pensiero di Freudenthal, quando afferma che la matematica è diversa, e che è una attività, non un paniere di formule, ci suggerisce che il vero problema didattico è rendersi conto che non si devono e non si possono "insegnare i simboli", ma si deve insegnare l'azione di simbolizzare. Questo partendo dall'ipotesi che si abbia di mira insegnare e non addestrare.

Parlando della scuola superiore, vorrei spostare l'attenzione dai numeri ai passi successivi del processo di simbolizzazione in matematica, passi che possono rappresentare delle vere e proprie forche caudine: chi le supera può entrare nel pensiero matematico, altrimenti può esserne estromesso.

1.2 - Dai numeri alle lettere

a) Il calcolo letterale

Quando si introduce il simbolismo letterale del calcolo algebrico, emerge assai frequentemente un secondo livello di difficoltà.

In questo passaggio, infatti, si richiede di arrivare a dominare le operazioni sui numeri e le loro proprietà formali staccandosi dal concetto di 'numero' che ci proviene dalle nostre esperienze elementari, dal senso comune, ovvero il numero naturale come "numero di..", o come misura di una grandezza.

I numeri sono sostituiti dalle lettere dell'alfabeto, simboli ben noti, che vengono però utilizzati in modo nuovo, non per formare parole ma con la funzione di 'tenere il posto dei' numeri. I numeri stessi poi non spariscono, compaiono ancora nelle espressioni, combinandosi con i simboli letterali secondo certe convenzioni.

Che una certa percentuale di ragazzi acquisisca con facilità la padronanza dell'operatività formale sui simboli algebrici non deve ingannare: essi spesso sono puramente dei 'manovratori', ripetono algoritmi che hanno acquisito in modo alquanto mnemonico, dei quali non è detto che abbiano compreso il senso, talora neppure in minima parte.

Sono dunque i ragazzi che recalcitrano, che rifiutano o ritardano nell'impadronirsi della semplice manovra del calcolo simbolico che ci segnalano il livello profondo della difficoltà che esso rappresenta. La funzione dell'insegnante è importante e delicata: egli deve introdurre gradualmente alla simbolizzazione e alla formalizzazione, e deve saper individuare e distinguere quando si presentano difficoltà sul piano della comprensione dei concetti piuttosto che sul livello simbolico.

Per mostrare come la capacità di formalizzare si formi in tempi e modi diversi, e sia qualcosa di distinto dalla capacità di ragionare, cito alcuni esempi che mi paiono significativi.

a) A ragazzi di terza media ho proposto questo problemino: "Se da un numero si sottrae 4, poi si divide per 4 la differenza ottenuta, si aggiunge 4 al quoziente, infine si divide il risultato per 4, si ottiene 32. Qual è il numero?"

Mi sono trovata di fronte a due diverse procedure risolutive: A, presa

carta e matita, ha chiamato x il numero e ha tradotto il problema in una equazione che poi ha risolto; B ha risposto mentalmente alla domanda, semplicemente invertendo le operazioni a partire dal risultato. Ecco un significativo esempio di come, a parità di comprensione dei contenuti (operazioni aritmetiche e loro inverse), si evidenzia una diversa capacità di simbolizzazione dei procedimenti messi in opera. È chiaro che, se nel medesimo testo i dati numerici fossero stati diversi, B avrebbe potuto incontrare difficoltà assai maggiori, mentre A sarebbe arrivato alla risposta con lo stesso percorso.

b) Sempre in terza media, ho proposto in un'altra occasione il seguente problema (tratto dalle gare matematiche del 1990), che ha dato spunto a molte interessanti osservazioni:

"Sulle caselle di una scacchiera quadrata 4×4 vengono collocati dei granelli di riso secondo le regole: si mette 1 granello sulle caselle corrispondenti a una riga dispari e una colonna dispari, 2 granelli su quelle di riga pari e colonna dispari o viceversa, 3 granelli su quelle di riga pari e colonna pari. Quanti granelli in totale si mettono sulla scacchiera?"

La diversa capacità di simbolizzazione dei ragazzi si è rivelata già dalla rappresentazione della situazione che ciascuno si è fatto: c'è chi ha disegnato i granelli di riso uno per uno, casella per casella; altri hanno indicato i granelli con un trattino, altri ancora hanno scritto direttamente i numeri 1, 2 o 3. Per fornire la risposta, poi, c'è stato chi ha contato direttamente dopo avere riempito tutta la scacchiera, e chi ha invece saputo individuare la configurazione base, che si ripeteva, dei gruppi di 4 caselle adiacenti; c'è anche chi ha osservato che la media di granelli per ogni casella era 2, perciò per dare la risposta ha potuto moltiplicare 2 per il numero di caselle.

Anche in questo caso le diverse procedure hanno consentito a più ragazzi di arrivare alla risposta, pur se con tempi abbastanza diversi, perché la configurazione del problema era di dimensioni abbastanza limitate; tuttavia è bastato provare a chiedere cosa sarebbe successo su una scacchiera 8×8 per mostrare la diversità di livello tra i diversi metodi: chi infatti aveva usato il semplice approccio diretto visivo, non sarebbe stato in grado di usarlo con facilità su 64 caselle, mentre il ragionamento sulla media o sulla configurazione base ha consentito facilmente ai ragazzi di estendere la risposta al secondo caso, e anzi di generalizzarla spontaneamente a qualunque scacchiera $n \times n$ con n pari. La discussione è addirittura proceduta fino a chiedersi che cosa si sarebbe potuto rispondere nel caso di n dispari.

b) Il simbolismo delle funzioni

Un certo insieme di difficoltà legate al simbolismo appare frequentemente a un altro livello ulteriore: quando si passa dal calcolo algebrico alla trattazione delle funzioni e alle operazioni sulle funzioni stesse.

Nonostante si introduca tale argomento quando generalmente i ragazzi sono più abituati al linguaggio simbolico, non sempre si è consapevoli che a questo nuovo livello il legame tra concetti e simboli supera l'algebra, fino a ricomprenderla da un altro punto di vista.

Infatti quando introduciamo la scrittura: $y = f(x)$, in essa sintetizziamo un certo insieme di procedure algebriche e non, considerate nella loro globalità. Oggetto del pensiero, del calcolo, dell'operatività diventa, invece che un singolo numero, un'espressione simbolica che sintetizza operazioni sui numeri, il legame stesso che tali operazioni consentono di stabilire tra una coppia di numeri. Passare insomma da un insieme numerico a un insieme di funzioni è un procedimento di astrazione tutt'altro che banale.

Una funzione poi diventa essa stessa elemento su cui si fanno certe

operazioni (algebra delle funzioni o composizione delle funzioni, per non arrivare agli operatori dell'analisi). Ciò richiede di riuscire a vedere la funzione nello stesso tempo come legame puntuale, relativo alla coppia di valori che lega, e come un tutto unico che ha certe caratteristiche: si tratta di un livello di astrazione che, a ben riflettere, è molto superiore e distante da quello dell'aritmetica e della geometria.

Ecco perché vi sono alcune difficoltà che emergono ricorrentemente e manifestano quanto delicati siano i livelli di concettualizzazione, di cui segnalo in particolare i seguenti:

- non è facile per gli studenti codificare e decodificare scritte della forma: $y = f(x)$, $1/f(x) = g(x)$ e simili.

La difficoltà comprende un livello di lettura e simbolizzazione, ma anche l'interpretazione da dare al procedimento di sostituzione delle variabili che è implicito nella scrittura delle funzioni.

- L'operazione di *composizione* tra le funzioni può costituire una certa difficoltà di comprensione, poiché è una 'operazione' in senso alquanto diverso da quello dell'algebra, e tuttavia spesso è indicata da simboli algebrici.

Per esempio, scrivere: $y = \sqrt{1+x^3} = f(g(x))$ implica di sapere interpretare le operazioni (algebriche) indicate, come eseguite in successione, secondo un ordine convenzionalmente stabilito. Che ciò non sia sempre immediato è spesso visibile, in particolare, nelle funzioni composte con il valore assoluto, $y = |f(x)|$ oppure $y = f(|x|)$.

- Un ulteriore livello di difficoltà si manifesta nella comprensione del concetto di invertibilità di una funzione, per arrivare alla *funzione inversa* (talora facilmente confusa con la funzione reciproca, per una sovrapposizione di simbolismi e di espressioni verbali non precise).

1.3 - La 'trasformazione' di formule: il calcolo simbolico

Sarebbe meglio usare il termine 'elaborazione' per sintetizzare l'insieme degli algoritmi operativi e di calcolo che la matematica introduce e utilizza. Nell'uso dei simboli il vero problema è non distaccare il *significato*, la forma, dal *senso*.

Dal punto di vista del *significato*, il problema di molta operatività sulle formule nella matematica scolastica diventa un puro allenamento formale alla padronanza di alcuni algoritmi. Ciò induce spesso nei ragazzi comportamenti coatti, automatismi difficili poi da superare.

Alcuni esempi:

- l'esercizio è visto quasi sempre nel senso della *semplificazione*, non della complicazione
- la manipolazione viene fatta partendo spesso dalla 'visione' della formula, non dalla 'lettura' della formula, cioè dal suo significato (interpretazione)
- i procedimenti appaiono obbligati, non sembra che consentano né richiedano scelte: in algebra non è necessario ragionare, pensano molte persone, che talvolta della matematica sembrano apprezzare proprio questo (in essa tutto funziona quasi magicamente). Dunque neppure è prevista la necessità di orientare le proprie scelte, scegliendo percorsi diversi a seconda del problema o dello scopo
- quasi mai i procedimenti vengono colti come 'reversibili' (lettura simmetrica).

Al contrario, sarebbe di estrema importanza concepire gli esercizi come richiesta di certe azioni, non come ripetizione di meccanismi.

Come conseguenza di queste abitudini mentali, la necessità o la pretesa di addestrare all'uso di un certo insieme di algoritmi fa perdere di vista quasi del tutto l'area del senso, ovvero la domanda su quello che tali procedure rappresentano: che cosa sono veramente tante formule che insegniamo ai ragazzi?

La conseguenza più grave è che si perde di vista la matematica come linguaggio della realtà significativo, prima che come linguaggio del tutto artificiale. E vorrei dire che si può arrivare alla matematica come pensiero astratto, che si dota di un linguaggio artificiale, solamente se si rispettano certi tempi di apprendimento e certi passaggi mentali (come ci testimoniano spesso i grandi matematici nel raccontare come essi stessi si sono accostati alla matematica).

Se si vuole che l'insegnamento conduca non a ridurre ma ad incrementare l'area del senso, ha un ruolo di grande importanza l'uso del *problema*. Ciò vale in tutti gli ambiti della matematica, ma, per tornare alla questione del simbolismo di cui si parla qui, è in particolare attraverso problemi che è possibile favorire e richiedere attività di simbolizzazione, prima (o insieme a) che l'uso dei simboli.

Non si tratta di pensare che il problema "parte dalla realtà": sappiamo bene che la maggior parte dei problemi di matematica contengono già un contesto del tutto astratto rispetto alla realtà concreta, un contesto già schematizzato e particolarizzato (quando non del tutto irreal!).

Di fronte a un problema però si possono abituare i ragazzi a muoversi nel modo che la matematica richiede, con le azioni che caratterizzano la matematica, cioè si può aiutarli ad acquisire quell'atteggiamento mentale che spiega perché in matematica si usano certi simboli e si procede in un certo modo.

Gli esempi che citavo prima mi sembrano abbastanza significativi; può essere interessante infine notare, quasi come controesempio, che quando si eccede nel formalismo, può capitare che l'espressione simbolizzata prenda il sopravvento, e talvolta giunga in tal modo addirittura a ostacolare la comprensione del problema reale.

Propongo questo problemino:

"Determinare un numero di due cifre tale che diviso per 5 dia resto 4, diviso per 4 dia resto 3, diviso per 3 dia resto 2, diviso per 2 dia resto 1."

Se si volesse tradurre in equazioni le condizioni del problema, si può rischiare di non venirne fuori! Invece ho visto i ragazzi arrivare alla risposta seguendo i più vari percorsi, dal semplice esame di tutti i numeri possibili a partire dal 10, fino a chi ha immediatamente intuito in che modo andavano utilizzate le ipotesi per giungere alla soluzione più velocemente; la maggior parte di essi non ha usato alcuna formalizzazione del problema!

2. LE ESIGENZE DELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

2.1 - L'apprendimento non è lineare

Uno degli assiomi pedagogici più in voga oggi consiste nell'immaginare l'apprendimento come un processo costante unidirezionale e deterministico: un progresso continuo e lineare, somma di tanti segmenti di nozioni e procedure, che procede quasi da sé una volta avviato, a condizione di utilizzare il metodo corretto.

Ciò non è vero in assoluto, ma è ancora meno vero per la matematica, nonostante proprio nei suoi confronti sia ben radicata l'idea della linearità dell'apprendimento.

Viceversa, i concetti matematici evolvono, non vengono appresi dalla mente in una unica situazione, in un momento temporale identificabile. Essi si affacciano alla comprensione in modo spesso imprevedibile; l'apprendimento è un fenomeno discontinuo, nel quale frequentemente si verificano 'salti', ovvero improvvise chiarificazioni, improvvisi collegamenti che aprono l'orizzonte del senso. Inoltre tali salti non si possono sempre ricondurre a un'unica causa: una spiegazione particolarmente indovinata, un testo assolutamente chiaro, o altro. Semplicemente si verifica la concorrenza di un insieme di processi che attraverso nuove esperienze, nuove riflessioni, nuove osservazioni producono la situazione mentale favorevole all'aprirsi di un nuovo possesso concettuale.

Dice L. S. Vygotsky in "Pensiero e linguaggio":

"I diversi stadi nell'apprendimento dell'aritmetica possono essere di valore diverso per lo sviluppo mentale. Spesso succede che tre o quattro passi nell'insegnamento siano di poco aiuto per il bambino per capire l'aritmetica, e poi, al quinto stadio, qualcosa scatta; il bambino ha afferrato un principio generale, e la sua curva di sviluppo s'innalza notevolmente. Per questo particolare bambino la quinta operazione è stata decisiva, ma da ciò non può essere tratta una regola generale. Le svolte decisive nelle quali il principio generale diventa chiaro al bambino non possono essere stabilite in anticipo dal programma..."²

E ancora: *"Il passaggio dai preconetti (quali sono generalmente i concetti aritmetici dello scolaro) ai concetti veri, quali sono i concetti algebrici degli adolescenti, viene effettuato generalizzando le generalizzazioni del livello precedente. Al primo stadio, alcuni aspetti degli oggetti sono stati astratti e generalizzati mediante la elaborazione dei concetti numerici. I concetti algebrici rappresentano astrazioni e generalizzazioni di alcuni aspetti dei numeri, e non più degli oggetti; i numeri rappresentano così un nuovo punto di partenza per lo sviluppo di un nuovo e più elevato di pensiero.*

I nuovi e più elevati concetti, a loro volta, trasformano il significato di quelli meno elevati. L'adolescente che è pervenuto alla padronanza dei concetti algebrici, ha raggiunto un punto avanzato dal quale vede i concetti aritmetici in una più vasta prospettiva. Nel passaggio da un livello di significato a quello successivo il bambino non deve ricostruire separatamente tutto ciò che costituiva i suoi precedenti concetti, il che sarebbe una vera fatica di Sisifo. Una volta che una nuova struttura è stata incorporata nel suo pensiero, questa si allarga gradualmente verso i concetti più vecchi quando essi entrano nelle operazioni intellettuali di tipo più elevato."³

²L. S. Vygotsky *Pensiero e linguaggio* pag. 127

³ Ibidem, pag. 141

La disponibilità recettiva della mente del ragazzo non è costante, ed è influenzata da numerosi fattori, di varia natura.

I fattori psicologici e affettivi non sono certo gli ultimi per importanza, soprattutto nell'età scolare e adolescenziale: è chiaro che la qualità e la forma del rapporto con l'insegnante influenza in misura notevole l'apprendimento, e proprio questo rende insostituibile il ruolo del maestro, di una figura di guida. Così come è noto e ben osservabile che traumi affettivi o situazioni umane, familiari e sociali difficili possono addirittura bloccare l'apprendimento.

Non è questo il luogo per addentrarci in questi aspetti: volevo però sottolineare che essi testimoniano ulteriormente che l'apprendimento non è un automatismo, un processo deterministico innestato in modo neutro che si sviluppa secondo metodi predeterminati, uguale per tutti.

D'altra parte esso non è neppure un processo completamente spontaneo, indipendente dagli stimoli che la persona riceve, indifferente ai metodi che si usano: questa è la concezione antitetica, spontaneista dell'apprendimento, che come conseguenza logica porta a teorizzare l'autoapprendimento e l'inutilità della scuola.

Noi pensiamo che l'apprendimento sia una esperienza della persona, che vi è implicata nella sua totalità. Più gli insegnanti hanno coscienza chiara e matura di ciò, più saranno veri (e bravi) insegnanti, perché sapranno essere di fronte ai ragazzi guardandoli come persone integrali, non come somme delle loro capacità e dei loro deficit. Nel dire infatti che l'apprendimento non è lineare ma presenta delle discontinuità, non intendiamo affermare che l'insegnamento debba presentare sbalzi, buchi, imprecisioni! Al contrario, l'insegnante è quanto mai responsabile nel proporre percorsi di lavoro e di apprendimento che offrano il massimo di possibilità a tutti i suoi allievi.

La formulazione di Freudenthal: "reinvenzione guidata" coglie con una sintesi potente l'idea dell'apprendimento - insegnamento come dinamica del rapporto tra due persone: il maestro che guida e l'allievo che reinventa, cioè scopre un proprio legame con i contenuti, attraverso l'imitazione del maestro, che consente la appropriazione dei concetti. Senza questa prospettiva l'insegnamento si riduce ad addestramento, e l'apprendimento a una assimilazione superficiale, spesso puramente mnemonica, di contenuti che non hanno nesso con la persona ed il suo cammino verso la conoscenza della realtà.

2.2 - La funzione dell'esercizio

In questa prospettiva si comprende che, mentre l'insegnante è solitamente assai preoccupato della propria spiegazione, poiché ritiene che da essa soprattutto dipenda la possibilità della comprensione dell'allievo, la vera chiave dell'apprendimento come esperienza è nel modo in cui un ragazzo si mette al lavoro in prima persona verso le cose spiegate, diventa protagonista del proprio apprendimento.

Ciò che l'insegnante deve veramente guidare abitualmente è l'attività che in matematica chiamiamo *esercizio*, parola che nella sua origine mette in mostra proprio l'aspetto che dicevo, di movimento libero e autonomo della persona.

La modalità scolastica dell'esercizio matematico è spesso assai riduttiva. Esso viene soprattutto concepito come applicazione, ovvero come un atto successivo e conseguente alla comprensione: si deve capire, e poi "si fanno esercizi", attraverso i quali si ottiene la fissazione dei concetti, il rinforzo della comprensione, la memorizzazione dei contenuti, l'automatismo delle procedure.

Gli obiettivi sopra elencati non sono secondari, e vanno senz'altro

perseguiti: tuttavia io vorrei sostenere che l'esercizio può diventare, se pensato in modo opportuno, proprio il luogo dell'apprendimento in quanto tale, ovvero l'occasione della rielaborazione autonoma dei contenuti piuttosto che dell'applicazione automatica.

L'esercizio cioè dovrebbe permettere di agire in quella che Vigotsky chiama la "zona di sviluppo prossimale", ovvero dovrebbe innestare la fase di azione in cui il ragazzo mette in campo lui stesso ciò che già possiede per conquistare qualcosa di nuovo⁴.

Questo non può avvenire se l'esercizio rimane semplice ripetizione di procedure o attività già note: non si deve continuare a richiedere al ragazzo ciò che sa fare, ma offrirgli lo spunto per fare un passo ulteriore. D'altra parte non si devono richiedere passi concettuali eccessivi, esorbitanti rispetto alle possibilità attuali della persona, perché in tal modo si spaventa e disorienta chi non si sente adeguato a quello che gli è chiesto.

Gli esercizi dunque non devono essere:

- troppo ripetitivi e banali
- troppo difficili
- troppo numerosi
- troppo settoriali, particolari.

Essi invece:

- devono essere opportunamente graduati, in modo che ogni esercizio richieda un passo nuovo, anche minimo, rispetto al precedente: meglio ancora, che attraverso tali passi si riesca a portare il ragazzo stesso a scoprire e comprendere qualcosa di nuovo, a formulare nuove domande (funzione di esplorazione, scoperta e stimolo)
- devono proporre diversi tipi di azioni mentali, particolarmente devono favorire sempre un doppio senso di attività nelle direzioni:
 - comporre - scomporre
 - analizzare - sintetizzare (riconoscere)
 - eseguire - ricostruire
 - codificare - decodificare
 - collocare in un contesto - riconoscere nel contesto
 - semplificare - complicare
 - riconoscere esempi - costruire esempi
- devono condurre dal particolare al globale. Non si può continuare a richiedere esclusivamente esercizi parcellizzati, su una singola questione o un singolo blocco di questioni: si otterrà una risposta automatica, un rinforzo dell'azione, ma non verrà conquistato il senso dell'azione stessa. È indispensabile che si giunga a richiedere la collocazione dell'azione singola in un contesto: questo è il ruolo del problema, cioè della forma di esercizio che più serve a comprendere non solamente alcuni contenuti matematici, ma che cosa sia la matematica stessa, la mentalità della matematica, il pensiero dei matematici.

Questa osservazione è assai importante quando c'è la necessità di recuperare casi di insuccessi o di difficoltà: troppo spesso si ritiene di poter fare una diagnosi specifica e di porre rimedio con attività ripetute (ad esempio, facciamo tante equazioni di primo grado, finché non avranno capito i principi di equivalenza e i procedimenti necessari alla risoluzione), mirate e particolari. Non si ottiene quasi mai per questa strada un vero 'recupero' concettuale, perché l'insistenza su un particolare che non viene illuminato da un contesto di senso più globale non produce connessioni esplicative, non apre finestre all'intelligenza.

È come insistere in una fisioterapia che agisce sul punto sbagliato nel

⁴Vigotsky, ibidem, pag. 128 e seg.

modo sbagliato: si rischia anche di peggiorare la situazione.

Per operare un vero recupero, è sempre necessario avere la pazienza e la lungimiranza di riannodare le fila delle questioni da molto più lontano e più indietro rispetto alla situazione particolare, limitata e contingente in cui si è manifestata la difficoltà. Piuttosto che la ripetizione insistente e inutile di singole azioni che, percepite come 'insensate' (cioè prive di senso), rimangono tali, è opportuno affrontare le questioni operando un cambio di linguaggio o un cambio di contesto: sono queste Infatti le occasioni che possono provocare un vero salto di apprendimento.

3. LA MATEMATICA E IL LINGUAGGIO COMUNE

3. 1 - Il 'senso comune' e la matematica

Quando parliamo di 'senso comune' non si deve pensare al 'buon senso' o alla saggezza pratica popolare; e neppure, in senso sociologico, all'opinione dominante nella società in un momento storico, che configura una specie di cultura di massa.

Intendiamo invece con 'senso comune' l'insieme delle certezze primarie universali dalle quali procede ogni conoscenza umana, sia ordinaria che scientifica. Il valore del senso comune sta nell'essere un insieme di certezze primarie i cui fondamenti sono intimamente connessi all'esperienza.

È il senso comune che ci propone l'esperienza come realtà intelligibile; esso non è dunque sorgente di irrazionalismo o fideismo, ma radice della ragionevolezza nelle spiegazioni e nelle scelte. La scienza può staccarsi e anche contrapporsi al senso comune solo in quanto rappresenta una riflessione metodica e sistematica sull'esperienza, alla ricerca di ragioni più forti e più certe delle stesse esperienze sensibili.

La scienza deve portare alla possibilità di formulare giudizi che esprimano una razionalità diversa da quella spontanea del senso comune, che sostanzia quella che chiamiamo intuizione, e costituisce una 'razionalità naturale' che rimane peraltro di importanza basilare.

Dice Freudenthal: *"Il senso comune accetta le cose come garantite, per buone e anche per cattive ragioni. La matematica cerca e chiede le ragioni, come ogni altra scienza e forse cerca delle ragioni migliori di ogni altra scienza."*⁵

In fisica e in chimica si usa il principio didattico di combattere il senso comune, cacciandolo come si caccia il demonio con esorcismi: le idee del senso comune ostacolano quelle della scienza. I ricercatori si meravigliano che la gente ancora adotti delle idee basate sul senso comune, idee che avrebbe dovuto gettar via da tempo. In generale, io penso che nell'istruzione sarebbe auspicabile che si incominciasse con le idee del senso comune, in vece di gettarle come sorpassate e da sopprimere, se possibile. Questa mia convinzione è confortata dal fatto, più o meno spontaneo, dello sviluppo della matematica.

Nel corso della vita, il senso comune genera delle abitudini comuni, le quali, quando si tratta di aritmetica, si manifestano come algoritmi e procedure di azione e di pensiero, inizialmente sostenute da paradigmi, e poi superate dall'astrazione.

Forse che il senso comune è una specie di massimo comune divisore

⁵H. Freudenthal, opera citata, pag. 22 e seg.

dell'intuizione, del quale partecipano tutti i membri di una certa comunità? La matematica, per quanto radicata nel senso comune, nell'opinione e nella mente di moltissimi è più lontana dal senso comune di ogni altra cosa. Che cosa la rende così lontana? Forse che più le radici sono profonde e più la cima è alta? La matematica è diversa: è una questione di senso comune, solo meglio organizzato."

Sono considerazioni di grande acutezza e importanza, come anche le successive a proposito delle 'regressioni' al senso comune che si verificano tanto spesso nel percorso di apprendimento dei ragazzi. "Quando un algoritmo non ha avuto l'occasione di raggiungere lo stadio di senso comune, allora il discente, per paura di applicare un algoritmo sbagliato o di applicare in modo sbagliato si rifugia nell'utilizzare ciò che è rimasto di senso comune nella sua testa." ⁶

È questa la più frequente e visibile radice di tanti errori che osserviamo negli alunni durante il percorso scolastico.

3. 2 - La matematica e il linguaggio comune

"Quando qualcosa è di senso comune, ciò è testimoniato dalla verbalizzazione nel linguaggio comune" dice Freudenthal.

Le considerazioni fin qui svolte portano a riflettere sul profondo legame che intercorre tra il linguaggio comune e il linguaggio specifico della scienza, in particolare quello della matematica, nel quale sono strettamente intrecciati elementi verbali e simbolici. Poiché abbiamo parlato del simbolismo e delle problematiche che suscita nel primo incontro, qui analizzeremo più precisamente l'altro aspetto, quello del linguaggio verbale.

Non è possibile eliminare dall'insegnamento e dalla comunicazione la funzione del linguaggio materno o comune, poiché è solo attraverso di esso che possiamo introdurre il linguaggio particolare, rendendo lo strumento di comprensione di realtà e di concetti più particolari di quelli dell'esperienza comune. Il linguaggio specifico della matematica non può parlare di sé, ha bisogno di un meta linguaggio, che non può che essere quello comune.

Questo spiega perché difficoltà di natura linguistica influiscano profondamente sull'apprendimento delle materie scientifiche, ostacolando addirittura l'accesso ai significati stessi delle parole che si usano, oltre che ai concetti. E mostra anche perché, più frequentemente di quanto pensiamo, per rimuovere blocchi intellettivi che riguardano contenuti specifici occorre anzitutto rimuovere incomprensioni linguistiche che ne sono la radice.

Non va mai dato per scontato che il ragazzo abbia conquistato il linguaggio specifico nel modo richiesto: occorre sempre ricordare che la costituzione e la capacità d'uso di un linguaggio preciso e specifico è il risultato di un lavoro, non il presupposto; è l'obiettivo, non il punto di partenza.

Al linguaggio specifico occorre arrivare per approssimazioni successive, dopo avere lasciato una fase di utilizzo di un linguaggio impreciso, immaginifico, comune, come spesso i ragazzi generano da sé nel percorso di comprensione di un concetto. Occorre insegnare a parlare, dice Freudenthal, non insegnare il linguaggio. Così come occorre insegnare a definire, e non insegnare partendo dalle definizioni, attraverso definizioni (e concetti); ovvero, bisogna insegnare a utilizzare un adeguato apparato espressivo e linguistico per esprimere le proprie conquiste intellettuali.

⁶ Ibidem, pag. 29

Nel processo di apprendimento si noteranno sempre momenti di sovrapposizione del senso comune alla comprensione e all'astrazione di concetti, che pure si riteneva di avere fissato definitivamente; essi si verificano nel ritorno (regressione) al linguaggio nella accezione del senso comune, oppure nel tentativo di 'usare le proprie parole' invece che espressioni tecniche.

Per esempio, alla domanda: "Quali sono i numeri primi?", un ragazzino (terza media) mi ha timidamente risposto: "Forse quelli da 1 a 10". Nella risposta è chiaro l'intento di dare al termine 'primi' un significato rintracciabile nel linguaggio abituale, anche se è pur vero che anche nel linguaggio comune lo spostamento di posto di un aggettivo può cambiare sensibilmente il significato di un termine (si pensi a 'buon uomo' e 'uomo buono').

Oppure, talvolta è utile usare, nella fase di accostamento a un concetto, un linguaggio non appropriato tecnicamente, ma suggestivo dell'idea importante; spesso sono i ragazzi stessi ad avere inventiva in tal senso.

3.3 - Confronto tra elementi del linguaggio comune e del linguaggio specifico

Voglio indicare, anche se non è possibile trattare diffusamente l'argomento, alcuni elementi costitutivi dell'educazione linguistica che contribuiscono all'apprendimento della matematica e in esso interferiscono.

Una delle questioni chiave nel rapporto tra il linguaggio e il linguaggio specifico (scientifico) è certamente la estrema ricchezza del primo, imparagonabile con la semplicità - rigidità del secondo. È questo un argomento spesso usato a sfavore della scienza e dell'educazione scientifica, accusate di impoverire il linguaggio, dunque di creare un disagio espressivo, una limitazione alla creatività e alla possibilità di comunicazione dell'esperienza umana. Ciò può anche spiegare alcune difficoltà psicologiche o il disinteresse di alcune personalità verso la scienza, particolarmente la matematica, giudicata un ambito poco espressivo del pensiero, troppo formale e logico.

Non è da sottovalutare peraltro anche la possibilità opposta, di chi si sente smarrire nel labirinto del linguaggio comune, della sua polisemia, della difficoltà di comprensione nella comunicazione di contenuti che hanno presupposti impliciti, inespressi o inesprimibili, giocati su tonalità, ordine delle parole, sfumature di accenti o di toni, che possono anche nascondere poi una estrema povertà di contenuto comunicativo.

Il linguaggio scientifico assume allora il pregio della limpidezza espressiva, della possibilità, nella sua univocità, di evitare i fraintendimenti e le ambiguità, di comunicare direttamente contenuti che spaziano dai più semplici concetti astratti dal senso comune ai più astratti prodotti della mente umana. Infine, mostra come lo scopo della riflessione della ragione sia raggiungere pensiero ed espressione ricchi di senso e verificati dall'elaborazione critica di un metodo della ragione.

a) Il *lessico*, ovvero l'uso delle parole (*termini*)

La polisemia di un termine, estremamente frequente nella lingua, viene evitata nella scienza e nella matematica, che tende a usare le parole in senso precisato e univoco, tecnico.

Tuttavia spesso la scienza (matematica) usa come *nomi* dei propri oggetti termini che prende dalla lingua comune, ai quali attribuisce un significato o nuovo o precisato. Ciò spiega frequentemente il motivo

dell'incomprensione da parte dei ragazzi di un nuovo significato tecnico di un termine, che si sovrappone a qualcosa di già noto in altro contesto.

Cito alcuni esempi di parole di questo tipo: tangente (usato in senso ben diverso nell'attuale...tangentopoli!, nonché usato dalla matematica in due sensi tecnici diversi); operazione (in una classe elementare è emerso che il primo senso a cui veniva ricondotto il termine operazione era quello di operazione chirurgica); trasformazione (anche in questo caso, il primo significato attribuito a tale parola è quello di cambiamento di natura); successione - serie (termini usati nel linguaggio comune con significati invertiti: si dice usualmente 'una serie di cose' proprio pensando a una successione di cose); ipotesi (usato nel linguaggio comune - facciamo l'ipotesi che.. - nel senso opposto a quello matematico); intersezione unione, implicito, e altri se ne potrebbero facilmente trovare.

b) Le *definizioni*, ovvero l'esplicitazione linguistica del significato dei termini e del contenuto dei concetti.

Ogni definizione, sia linguistica (vocabolario) che scientifica, consiste nel precisare la *comprensione* (intensione) di un concetto, cioè nel dare significato a un nuovo termine, riconducendoci a termini che si suppongono già noti.

La differenza notevole tra i due ambiti consiste nel fatto che la definizione linguistica consente anche i giri viziosi e l'uso dei sinonimi (enigmi, indovinelli, slogan pubblicitari, funzione comunicativa dell'*ambiguità*), mentre la scienza deve necessariamente evitarli. Ciò conduce la scienza (e la matematica in particolare) alla presa di coscienza e all'esplicitazione diretta dei propri *termini primitivi*, ovvero non definibili in funzione di altri termini.

Questo non avviene nella lingua, anche se potremmo riflettere che termini primitivi di ogni linguaggio potrebbero essere considerate proprio quelle certezze ed evidenze del senso comune che non possono essere definite (pensiamo alle parole: cosa, realtà, oggetto, essenza, insieme, quantità, qualità,...).

La definizione scientifica è fondamentalmente una *descrizione*, cioè chiarisce la estensione di un concetto o di un termine (l'insieme degli individui ai quali si riferisce): nelle definizioni delle scienze naturali è chiara la funzione di classificazione descrittiva. In matematica la definizione ha una funzione anche di abbreviazione: posso sostituire un termine ad una proposizione che lo descrive.

Errori frequenti dei ragazzi nel dare le definizioni: la sovrapposizione del senso comune a quello specifico, oppure, quando la formulazione linguistica non è conosciuta, il cercare di descrivere 'quello che si vede'.

c) Le *proposizioni e le forme del ragionamento*, cioè delle *concatenazioni* sensate di proposizioni.

La limitazione forse più evidente che viene operata dal linguaggio scientifico è nella formulazione del 'discorso' comunicativo. La scienza infatti accetta come proprie e come dotate di senso e di verità solo alcune proposizioni e alcuni 'discorsi', che soddisfano a requisiti precisi e al quanto rigidi.

- Enunciati e predicati solo di alcuni tipi (formule ben formate)

- Ragionamenti corretti, secondo le regole della logica, esplicitamente enunciate.

I 'testi' che si producono nella matematica sono perciò assai limitati: essi sono le *dimostrazioni*, sia che vengano prodotte *verbalmente*, come spesso si fa in ambito geometrico, sia che si sviluppino come calcoli, come nell'algebra, nell'analisi o nella logica stessa.

Questo probabilmente costituisce uno dei maggiori ostacoli

all'apprendimento della matematica, poiché pone un vincolo assai consistente alla possibilità espressiva della razionalità umana nelle sue forme più ampie: razionalità che nell'argomentazione abituale e nell'esperienza fattuale, comune e pratica, della realtà opera in modo articolato e complesso, utilizzando forme di pensiero e di ragione che non si limitano a quella prevalente in ambito scientifico e matematico in particolare, cioè la forma della deduzione.

Bibliografia

- H. Freudenthal *Ripensando l'educazione matematica* La Scuola, Bs, 1994
- L. S. Vygotsky *Pensiero e linguaggio* Laterza, Bari
- C. F. Manara *Problemi di didattica della matematica* La Scuola, Bs, 1989
- C. F. Manara, M. Marchi *L'insegnamento della matematica* La Scuola, Bs, 1993
- Z. Krigowska *Cenni di didattica della matematica* Pitagora, Bo, 1979
- AA.VV. *Il linguaggio nella didattica delle discipline scientifiche*
Approfondimenti Quaderni di DIESSE, Milano, 1994
- AA.VV. *La matematica come reinvenzione guidata*
Quaderni di DIESSE, Milano, 1996
- AA.VV. *Insegnamento delle discipline scientifiche*
Quaderni di DIESSE, Milano, 1994
- AA.VV. *Scienza ed Educazione. Gli articoli scientifici di "Libertà di educazione 1991 /92"*
Quaderni di DIESSE, Milano, 1995
- A. Livi *La nozione filosofica di "senso comune"*
Nuova Secondaria n. 1 , anno XI
- R. Manara *Considerazioni sugli errori nella didattica della matematica*
Nuova Secondaria n. 5, anno IX (gennaio 1992)
- L. Mammino *L'educazione al linguaggio della scienza*
Nuova Secondaria n. 5, gennaio 1995
- P. Mirone *Per un più efficace insegnamento delle scienze*
Nuova Secondaria n. 5, gennaio 1995
- C. Di Stefano; M. C. Libiano *Basta la parola!*
Nuova Secondaria n. 2, anno XIV (ottobre 1996)
- T. Varga *Fondamenti di logica per insegnanti* Boringhieri, To, 1973
- C. F. Manara *Il certo e il probabile. Piccolo manuale di logica e di calcolo delle probabilità* La Scuola, Bs, 1989.