

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Gennaio 1953 - Serie IV, vol. XXXI, n. 8 (pag. 186-188)

CARLO FELICE MANARA

Un teorema sui triangoli equilateri



NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

EDITORE NICOLA ZANICHELLI - BOLOGNA

PERIODICO DI MATEMATICHE

Il *Periodico di Matematiche* continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886, fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione, e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918; fu rinnovato da F. ENRIQUES nel 1921 e da Lui diretto fino al 1946.

Il *Periodico* pubblica soprattutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato, ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, ginochi, paradossi, etc.) nonché notizie di carattere professionale.

Il terzo numero (Giugno 1953) della trentunesima annata consta di 56 pagine e contiene, oltre le Recensioni, le Questioni, i seguenti articoli:

- L. CONTE - *Huygens e l'invenzione di due medie proporzionali*
A. TOSI - *Sopra un tema di concorso per i Licei*
M. DEDÒ - *Una classica superficie del 4° ordine ed eleganti questioni ad essa collegate (continuazione)*
C. F. MANARA - *Un teorema sui triangoli equilateri*

Abbonamento annuo: Italia L. 600 — - Estero L. 1200 —
Il *Periodico* si pubblica in 5 fascicoli annuali.

L'importo dell'abbonamento e ogni altra comunicazione di indole amministrativa deve inviarsi esclusivamente alla Casa Editrice Nicola Zanichelli.

Le annate complete 1924, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51 e 52 dell'attuale serie del

PERIODICO DI MATEMATICHE

sono in vendita al prezzo di L. 1200 l'annata, per l'Italia,
L. 1800 per l'estero.

Esistono fascicoli separati dei 20 volumi al prezzo di:
L. 400 al fascicolo per l'Italia — L. 800 per l'estero.

Un teorema sui triangoli equilateri

Recentemente varii Autori si sono occupati del seguente Teorema di Geometria elementare:

« Dato un triangolo equilatero E ed un punto P del suo « piano è possibile costruire un secondo triangolo avente per « lati le distanze di P dai vertici di E » (1).

Di questo Teorema presentiamo qui una dimostrazione (che si riduce ad una verifica analitica) più che altro per mostrare quale notevole semplicità possano raggiungere i calcoli ed i ragionamenti relativi ad una determinata questione quando si tenga conto delle simmetrie che i dati della questione stessa presentano (2).

Non crediamo inutile questa esposizione anche se le indagini fatte non ci permettono di escludere con sicurezza che qualcosa di simile non si trovi già nella imponente letteratura che riguarda le proprietà del triangolo. Non ci pare infatti che valga la pena di approfondire una indagine bibliografica, di una utilità molto discutibile, che appare di improbabile successo.

Siano dunque a_1, a_2, a_3 le misure dei tre lati di un triangolo in una unità arbitraria e pertanto tre numeri (ovviamente reali ed) essenzialmente positivi. Facciamo anzitutto la seguente

(1) D. POMPEIU, *Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire*, « Bull. Math. Phys. Ecole polytechn. », Bucarest, 6, 6-7 (1936).

S. V. PAVLOVIC', *Sur une démonstration géométrique d'un théorème de M. D. Pompeiu*, « Elemente der Math. », 8, 13-15 (1953).

J. P. SYDLER, *Autre démonstration du théorème de Pompeiu*, *ibid.*, 15-16 (1953).

(2) C. F. MANARA, *Vedute sulla Geometria del Triangolo*, « Periodico di Matematiche », Serie IV, vol 23 (1942).

OSSERVAZIONE I - Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un triangolo reale i cui lati abbiano le misure (positive) a_1 a_2 a_3 è che sia positivo il prodotto

$$\Pi = (a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2)$$

Che la condizione sia necessaria segue dalle note relazioni che legano i lati di un triangolo. Che sia sufficiente si dimostra facendo vedere che non può essere Π positivo avendo due dei suoi fattori negativi; infatti se fosse per es.

$$a_1 + a_2 < a_3$$

$$a_2 + a_3 < a_1$$

si avrebbe, sommando membro a membro

$$2a_2 < 0$$

contro l'ipotesi che i numeri a_1 a_2 a_3 siano tutti positivi.

Ora è noto che il prodotto Π sopra considerato differisce soltanto per un fattore positivo dal quadrato dell'area del triangolo i cui lati hanno per misure a_1 a_2 a_3 . Infatti, detta S la misura dell'area del triangolo, sussiste la relazione, detta di ERONE:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{16} (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2) = \\ &= \frac{1}{16} (a_1 + a_2 + a_3)\Pi \end{aligned}$$

Possiamo quindi enunciare la

OSSERVAZIONE II - Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un triangolo reale i cui lati abbiano per misure a_1 a_2 a_3 è che sia $S^2 > 0$.

Si noti ora che la S^2 può essere espressa nella forma

$$S^2 = \frac{1}{4} (a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2) - \frac{1}{16} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2$$

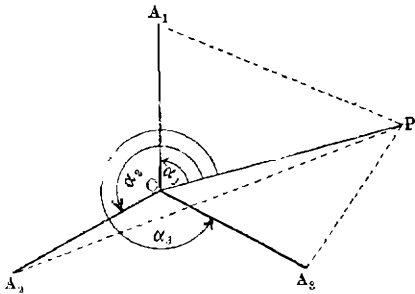
Segue pertanto di qui la validità della

OSSERVAZIONE III - Il quadrato S^2 dell'area del triangolo i cui lati hanno le misure a_1 a_2 a_3 è funzione simmetrica dei quadrati dei numeri a_1 a_2 a_3 e quindi funzione razionale dei coefficienti della equazione le cui radici sono a_1^2 a_2^2 a_3^2 .

Siano ora A_1, A_2, A_3 i vertici di un triangolo equilatero e sia O il suo centro; per semplicità scegliamo l'unità di misura dei segmenti in modo che si abbia

$$OA_1 = OA_2 = OA_3 = 1$$

Sia P un punto qualunque del piano; diciamo ρ la misura del segmento OP ; chiamiamo α_i gli angoli $\widehat{POA_i}$ ($i = 1, 2, 3$) ed a_i le misure dei segmenti PA_i .



Per un noto Teorema (detto di CARNOT) si ha

$$(2) \quad a_1^2 = \rho^2 + 1 - 2\rho \cdot \cos \alpha_1$$

Ora essendo equilatero il triangolo $A_1 A_2 A_3$ si ha

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 2\pi/3;$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + 2\pi/3$$

per cui $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$ sono radici della equazione (di trisezione dell'angolo)

$$(3) \quad 4 \cos^3 \alpha_i - 3 \cos \alpha_i + k = 0$$

dove k è una opportuna costante il cui valore preciso non ci interessa qui. Dunque la equazione algebrica di terzo grado $f(x) = 0$ le cui radici sono i quadrati dei numeri a_1, a_2, a_3 si ottiene eliminando $\cos \alpha_i$ tra la (2) e la (3) e ponendo poi $x = a_i^2$. Eseguendo i calcoli si ottiene la equazione

$$f(x) = x^3 - 3(\rho^2 + 1)x^2 + 3\{(\rho^2 + 1)^2 - \rho^2\}x - (\rho^2 + 1)^3 + 3\rho^2(\rho^2 + 1) - 2k\rho^3 = 0$$

E di qui in forza della Osservazione III e per le note relazioni che legano le radici di una equazione ai suoi coefficienti

$$16S^2 = 12\{(\rho^2 + 1)^2 - \rho^2\} - 9(\rho^2 + 1)^2 = 3\rho^4 - 6\rho^2 + 3$$

Ora si vede immediatamente che quest'ultimo polinomio in ρ^2 è positivo per qualunque valore reale di ρ e quindi, per la Osservazione II, si ha il Teorema.

LORIA - <i>Curve sghembe speciali algebriche ecc.</i> Vol. I	(esaurito)
— — <i>Curve sghembe speciali algebriche ecc.</i> Vol. II	800
MARCONI - <i>Le radiocomunicazioni a fascio</i>	150
MONTAUTI - <i>Il telemetro monostatico</i>	800
PASINI - <i>Trattato di topografia</i>	2000
PERSICO - <i>Introduzione alla fisica matematica</i>	3000
POBBO - <i>Trattato di astronomia.</i> Vol. I	800
PUPPINI - <i>Idraulica</i>	3000
Questioni riguardanti le matematiche elementari, a cura di F. ENRIQUES: Parte III	800
(Le altre parti sono esaurite)	
Questioni di Matematica applicata, trattate nel 2° Convegno di Matematica applicata (Roma 1939)	400
RIGHI - <i>Scelta di scritti</i>	4000
RIMINI - <i>Elementi di elettrotecnica</i>	4000
— — <i>Elementi di analisi matematica</i>	1000
— — <i>Fondamenti di radiotecnica generale</i>	4500
— — <i>Fondamenti di analisi matematica.</i> Vol. I	4000
— — <i>Fondamenti di analisi matematica.</i> Vol. II	6000
SANSONE - <i>Equazioni differenziali nel campo reale.</i> Parte I	3000
— — <i>Idem.</i> Parte II	4000
SCHIAPARELLI - <i>Scritti sulla storia dell'astronomia.</i> I-II-III	2400
<i>Scritti Matematici</i> , offerti a LUIGI BERZOLARI	2500
SEGRE - <i>Lezioni di geometria moderna.</i> Vol. I. <i>Fondamenti di geometria sopra un corpo qualsiasi</i>	1500
<i>Selecta dal Periodico di Matematiche.</i> Scelta di temi dati nei concorsi - Questioni ed articoli connessi pubbli- cati dal 1921 al 1951	3000
SUPINO E. - <i>Il disegno di macchine</i>	500
TORALDO DI FRANCIA - <i>Onde elettromagnetiche</i>	3000
TORRICELLI - <i>Opere.</i> 5 volumi	2500
TRICOMI - <i>Funzioni ellittiche</i>	4500
— — <i>Funzioni analitiche</i>	1500
VITALI-SANSONE - <i>Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.</i> Parte I	3000
— — Parte II	7000
VOLTA - <i>Epistolario.</i> Edizione nazionale. Vol. I	5000
— — Volume II	5000
— — Volume III	5000
ZAGAB - <i>Astronomia sferica e teorica</i>	2500