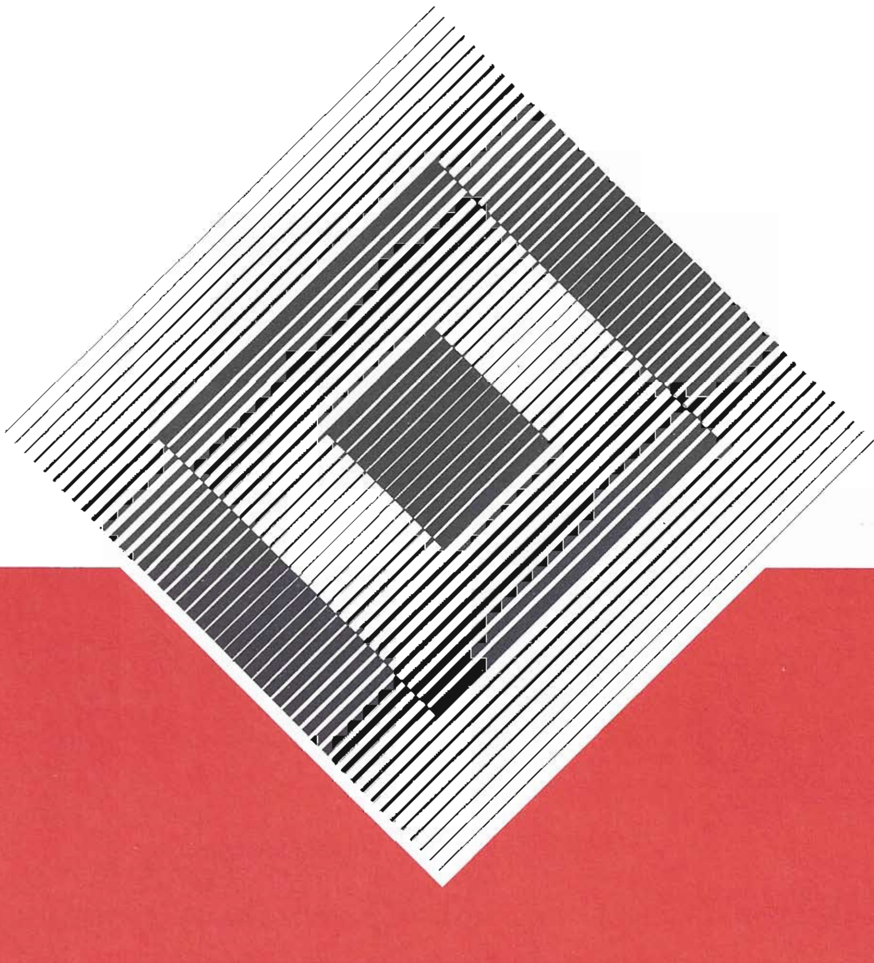
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 10 N.2 - FEBBRAIO 1987
Rivista mensile. - Spedizione in abb. post. Gr. III/70% - Tassa riscossa - Taxe perçue



Organo del
CENTRO RICERCHE DIDATTICHE
UGO MORIN

Istituti Filippin
PADERNO DEL GRAPPA

INDICE

Sez. B

GIUSEPPE VERONESE
ED IL PROBLEMA DEL CONTINUO
GEOMETRICO

Carlo Felice Manara

GIUSEPPE VERONESE ED IL PROBLEMA DEL CONTINUO GEOMETRICO

Prof.Carlo Felice Manara
Relazione tenuta al Seminario Matematico e Fisico
Milano - 10 giugno 1986

Sunto - I problemi riguardanti il concetto di "continuo geometrico" si sono presentati alla indagine dei matematici fino dagli inizi della Geometria razionale. Essi hanno dato luogo a ricerche fondamentali ed a discussioni appassionate nei secoli XVI, XVII, XVIII. Durante il Secolo XIX le vicende riguardanti i fondamenti della Matematica ed in particolare della Geometria attirarono di nuovo l'attenzione dei ricercatori sui problemi del continuo. Si deve a G.Veronese la costruzione di un sistema teorico in cui si introducono in modo esplicito dei segmenti infiniti o infinitesimi attuali, giungendo quindi ad una Geometria non-archimedea.

Contro questa costruzione vennero elevate varie critiche; la polemica conseguente favorì il chiarimento dei concetti, permettendo l'accertamento della coerenza interna del sistema di Veronese.

1 - Non si è tanto lontani dal vero asserendo che il problema filosofico e scientifico del continuo geometrico è forse uno dei più antichi che abbia attirato l'attenzione dell'uomo, e provocato la sua indagine e la sua riflessione.

Infatti si potrebbe dire che il primo teorema che l'uomo abbia dimostrato, e precisamente la proposizione che va sotto il nome di Teorema di PITAGORA, ha delle conseguenze che riguardano la natura dell'ente comunemente chiamato "spazio geometrico". La nostra utilizzazione di questa espressione deve essere interpretata come una concessione alle abitudini correnti: abbiamo infatti presente ciò che G.PEANO scriveva a proposito dello "spazio geometrico", inteso come un ente ben determinato, il quale possiede una certa natura, che ne fonda le proprietà (1).

Come è noto, una tra le conseguenze più importanti del teorema di Pitagora è l'accertamento della esistenza di coppie di segmenti tra loro incommensurabili, come il lato e la diagonale di uno stesso quadrato. E l'esistenza di coppie di segmenti incommensurabili tra loro porta come conseguenza anche la impossibilità di esistenza di un "atomo", di un "granello" di "spazio geometrico".

L'importanza ed il significato di queste conseguenze del teorema di Pitagora sono testimoniate anche dalle notizie (molto probabilmente leggendarie) sulle conseguenze della scoperta pitagorica. Non intendiamo qui prendere posizione sulla validità di queste notizie, ma pensiamo sia legittima l'opinione di chi vede in queste leggende la prova della importanza che è stata attribuita dagli antichi alla proposizione pitagorica.

2 - Le conseguemnze del teorema di Pitagora non sono le sole prove dell'interesse che il problema del continuo geometrico ha suscitato presso la civiltà scientifica greca; a questo proposito limitiamo a ricordare qui i celebri paradossi, che vengono richiamati con le espressioni ormai classiche: Paradosso di ACHILLE e della tartaruga, paradosso del moto.

E' noto che le discussioni provocate da questi e da altri paradossi ebbero un carattere genericamente filosofico, e le argomentazioni avanzate dalle varie parti non fecero appello a ragioni strettamente geometriche; tuttavia non si può negare che tali discussioni riguardassero la natura dell'ambiente spaziale in cui noi siamo immersi, e fossero originate dal tentativo di dare un fondamento razionale alle nostre sensazioni, e di fondare ogni nostra conoscenza su pochi principi, superande le pure apparenze sensibili.

In questo ordine di idee quindi le discussioni sui paradossi ricordati, e sugli altri che vi si riattaccano, possono essere considerate come una manifestazione di quella sete di conoscere che presso i Greci, fra tutti gli altri po-

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

(1) Scrive G.Peano [20bis]: <<In quasi tutti i trattati moderni si introduce per primo il concetto di "spazio", dicendo che esso non si definisce, ma gli attribuiscono le proprietà di essere omogeneo, illimitato, infinito, immobile, divisibile, ecc., proprietà queste parimenti non definite. Ritenendo pertanto il concetto di spazio fondamentale per la Geometria, ne viene che non si potrebbe scrivere un trattato di questa scienza in una lingua che per avventura manchi di tali parole. Quindi non si potrebbe scrivere di Geometria nella lingua d'Euclide e di Archimede, ove appunto manca la parola corrispondente al termine "spazio", nel senso in cui lo si usa nei moderni trattati.>>

poli dell'antichità, raggiunse delle vette di altezza ammirevole; si veda a questo proposito ciò che ne scrive T.L.HEATH (2).

3 - Lasciando le discussioni di carattere filosofico e ritornando alla considerazione dei problemi strettamente geometrici, vorrèmmo ricordare che, nell'ammirabile trattato degli ELEMENTI di EUCLIDE furono presto scoperti dei "nei"; e diversi tra questi riguardano dei problemi logici più o meno strettamente collegati con il continuo.

Il primo di questi "nei" può essere individuato addirittura nella proposizione 1 del I libro, laddove Euclide costruisce il triangolo equilatero di dato lato.

Come è noto, tale costruzione viene fatta intersecando due circonferenze, che hanno ciascuna come raggio il lato assegnato e che hanno i loro centri negli estremi del segmento considerato.

Si giunse presto ad osservare che non è detto in alcun luogo del trattato euclideo che due circonferenze come quelle ora descritte debbano incontrarsi. E' chiaro infatti che, in un insieme di punti come quelli del "geopiano", il triangolo equilatero non può esistere; ma tale triangolo non esiste neppure nel piano cartesiano costituito dai punti che hanno entrambe le coordinate razionali, punti che tuttavia formano un insieme ovunque denso.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

(2) Scrive T.L.Heath [9]: <<... it was the Greeks who first made mathematics a science. As Kant once wrote, "a light broke upon the first man who demonstrated the property of the isosceles triangle (whether his was Thales or what you will)"; since which time, thanks to "that wonderful people the Greeks", mathematics has travelled "the safe road of a science". The Greeks in fact laid down the first principles in the shape of the indemostrable axioms or postulates to be assumed, framed the definitions, fixed the terminology and invented the methods ab initio; and this they did with such unerring logic that, in the centuries which have since elapsed, there has been no need to reconstruct, still less to reject as unsound, any essential part of their doctrine.>>
Non intendiamo addentrarci nella analisi della vasta letteratura filosofica relativa ai paradossi eleatici; rimandiamo, per es., a quanto ne scrive F.Enriques [5,6].

Pertanto potremmo dire che la proposizione euclidea che abbiamo citato si basa su una pretesa "evidenza" che ha il suo fondamento nelle esperienze, eseguite o immaginate, nelle costruzioni con il compasso o con strumenti equivalenti, ma che non ha fondamento rigorosamente razionale, almeno secondo le esigenze della nostra mentalità attuale.

Pensiamo sia interessante osservare che soltanto la maturazione critica relativamente recente ha messo in evidenza la necessità della analisi della reciproca posizione di due curve "continue" del piano, con un filone di ricerche topologiche che hanno la loro origine nella problematica del celebre teorema detto "di Jordan" (3).

4 - Un secondo "neo" che fu rilevato nella trattazione euclidea (da G.SACCHERI, e R.SIMSON) è costituito dalla dimostrazione della proposizione 18 del libro IV degli ELEMENTI, laddove si dimostra la proprietà detta del "componendo" per le proporzioni tra grandezze. Invero è stato osservato che nella argomentazione euclidea si fa implicito riferimento alla grandezza quarta proporzionale dopo tre grandezze date; grandezza la cui esistenza non è stata nè dimostrata nè postulata.

Effettivamente si osserva che, quando si abbia a che fare con segmenti, il quarto proporzionale dopo tre dati si costruisce fondandosi sul noto teorema detto "di Talete". Ma tale costruzione non può essere invocata quando si tratta di grandezza qualunque. Effettivamente la esistenza di una grandezza cosiffatta può essere garantita soltanto con un postulato di esistenza, che faccia appello ad una proprietà di continuità delle grandezze della classe considerata. E i tentativi fatti da G.SACCHERI [22] per cancellare il "neo" di Euclide, ed altri più recenti di cui si ha notizia (per esempio il tentativo di DE MORGAN ricordato da T.L.Heath [8]) mettono vieppiù in evidenza la necessità ineliminabile di enunciare un postulato di continuità che colmi le lacune logiche delle argomentazioni.

Abbiamo già detto dei probabili fondamenti intuitivi che giustificano la assenza di un postulato fondante la intersezione di due circonferenze. Rimanendo nel campo delle ipotesi, si potrebbe pensare che l'assenza di un postulato

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

(3) Per l'analisi di questo "neo" di Euclide e delle proposte dirette a correggerlo, rimandiamo all'opera di T.L.Heath [8].

che asserisse puramente la esistenza di certi enti, senza darne la costruzione, sia giustificata dalla mentalità dei Greci, che tendevano ad accettare gli enti della Geometria soltanto nei casi in cui si potesse dare loro una costruzione effettiva.

5 - Non intendiamo proseguire la discussione sulle tendenze fondamentali della Matematica greca, perchè intendiamo riprendere l'analisi del problema del continuo geometrico.

Tale problema riemerse nella scienza durante il secolo XVI, con le opere di LUCA VALERIO, BONAVENTURA CAVALIERI, EVANGELISTA TORRICELLI, GALILEO GALILEI. L'epoca di cui stiamo parlando è infatti quella in cui ebbe origine il "metodo degli indivisibili", e praticamente anche il calcolo infinitesimale moderno.

E' immediato osservare che molta della problematica del calcolo infinitesimale, tanto all'epoca degli esordi che nell'epoca più matura della revisione critica dei concetti e dei procedimenti, è strettamente collegata con il problema del continuo. Sarebbe infatti difficile ignorare e dimenticare l'impulso dato alla invenzione dei metodi del calcolo infinitesimale dall'insieme dei problemi posti sul tappeto dalla Geometria analitica e dalla Meccanica razionale.

Sarebbe impresa impossibile ricordare qui, anche sommariamente, le analisi, le discussioni, le polemiche anche roventi che ebbero luogo in quell'epoca di fervore creativo. Questi argomenti sono ormai oggetto della storia della scienza; ma le idee che hanno ispirato i grandi fondatori di queste dottrine, le questioni logiche e filosofiche che stavano alla base delle analisi e delle dispute non cessano di ispirare gli studiosi di filosofia della scienza e di epistemologia, come è provato dalla comparsa recente di opere interessanti su questi argomenti, opere alle quali rimandiamo qui il matematico che voglia meditare anche solo un poco sui fondamenti della propria dottrina [7].

Come è noto, uno degli argomenti che furono oggetti delle discussioni più appassionate è quello della natura del continuo, e soprattutto la questione se esso sia costituito da parti omogenee, da chiamarsi "indivisibili" o con altro nome.

Come si vede, si tratta in certo modo ancora del problema della natura del continuo geometrico, della esistenza di suoi "elementi costitutivi", del rapporto di questi con il tutto da noi percepito come tale.

Problema che, per esempio, nel caso della retta, viene posto domandando se i punti di questa siano oppure no della medesima specie del continuo unidimensionale costituito dalla retta stessa.

La questione è stata dibattuta durante tutto il periodo che segna la nascita del calcolo infinitesimale: se ne trovano tracce ancora alla fine del secolo XVIII, per esempio nell'opera di R.BOSCOVICH, che ancora discute su questi temi, con argomenti presi dalla filosofia e addirittura dalla teologia [3].

Pensiamo che, tra le tante citazioni che si potrebbero fare, siano particolarmente illuminanti le seguenti di B.PASCAL. Il grande genio francese afferma:

<< ... non esiste geometra il quale non creda che lo spazio sia indefinitamente divisibile>>.

E poco sotto aggiunge:

<< ... Si capisce perfettamente come sia falso <il pensare> che, dividendo uno spazio, si possa giungere ad una <sua> parte indivisibile, cioè priva di estensione>> [12].

Lo stesso Pascal aveva risolto da pari suo la questione sull'impiego pratico della teoria degli indivisibili nei problemi che noi oggi risolviamo con il calcolo degli integrali. Trattando del calcolo dell'area del semicerchio, egli scrive infatti:

<< ... tutto ciò che viene dimostrato con le vere regole degli indivisibili potrà essere dimostrato anche rigorosamente a modo degli antichi; e quindi uno dei metodi differisce dall'altro soltanto nel modo di parlare. Il che non può urtare le persone ragionevoli, una volta che siano state avvertite del significato dei discorsi. Pertanto io non esiterò nel seguito ad utilizzare il linguaggio degli indivisibili, dicendo: "la somma delle linee ... "; perchè con queste espressioni io intendo semplicemente indicare la somma di un numero indefinito di rettangoli costituiti dalle ordinate e da una piccola parte di diametro, somma che è quindi una superficie, la quale differisce dal semicerchio di una quantità più piccola di ogni altra quantità data ... >> [13].

Come si vede, Pascal aveva ben chiare le idee che hanno portato in seguito alla teoria dell'integrale di Mengoli-Cauchy-Riemann.

6 - Abbiamo fatto alcuni brevi e sommari richiami storici

Tale proposizione potrebbe essere formulata dicendo che, dati che siano due segmenti, **a** e **b**, se il primo è minore del secondo, esiste un numero naturale **n** tale che il multiplo secondo **n** del segmento **a** è maggiore del segmento **b**.

E' noto che la proposizione ora ricordata può essere dimostrata quando si dia una formulazione della continuità della retta secondo Dedekind o Weierstrass; essa invece deve essere esplicitamente postulata quando si dia una formulazione della continuità della retta secondo G.Cantor.

La necessità di questa esplicita posulazione della proposizione di Archimede fa comprendere abbastanza chiaramente il fatto che possono esistere dei sistemi geometrici, perfettamente coerenti, nei quali tuttavia la proposizione non è assunta come valida; in altre parole fa intuire la possibilità di costruire delle Geometrie non-archimedee.

Questa possibilità, che oggi a noi appare del tutto ovvia, dopo una evoluzione critica di quasi un secolo, e dopo le costruzioni teoriche di G.Veronese e di D.Hilbert ed altri, non appariva tuttavia così ovvia agli occhi di matematici anche grandi, quali G.Peano e G.Cantor, come si vedrà dalla analisi della polemica che intercorse tra questi e G.Veronese negli anni che seguirono il 1891.

E' questa la data in cui comparve l'opera di Veronese dedicata ai fondamenti della Geometria [24].

Prima di iniziare la presentazione della polemica a cui accennavamo, vorremmo riportare il giudizio che P.BENEDETTI dà di quest'opera di G.Veronese [2]; giudizio che noi condividiamo, e che servirà, almeno in parte, a spiegare la posizione di Peano nei riguardi del pensiero del geometra di Padova.

<< ... nei suoi <di G.Veronese> "Fondamenti" - scriveva Benedetti - (opera poderosa, larghissima di informazioni, vivacemente polemica, ma alqualinto difficile a penetrare e non priva di nebulosità e di indeterminatezze, che in ogni modo ha avuto il grande merito di eccitare, in Italia, lo zelo di molti ammiratori e divulgatori, dando impulso agli studi sui principi della Geometria) si trova esposta, per la prima volta, una trattazione per via sintetica della Geometria degli spazi lineari ad n dimensioni, indipendente dal postulato di Archimede e con un sistema di assiomi valevole per le tre Geometrie: ellittica, parabolica ed iperbolica.>>

8 - Come abbiamo visto, Benedetti asserisce che l'opera di Veronese è << ... non priva di nebulosità e di indeterminatezze>>.

Sono forse questi caratteri che hanno mosso G.Peano a fare del volume di Veronese una recensione nettamente negativa, recensione che, dopo una serie di giudizi pesanti su singoli punti, si concludeva con la seguente stroncatura:

<<E si potrebbe lungamente continuare l'enumerazione degli assurdi che l'A. ha accatastato. Ma questi errori, la mancanza di precisione e rigore di tutto il libro, tolgono ad esso ogni valore>> [20].

Abbiamo già avuto occasione di trattare, in altra sede [11], la parte della polemica tra Peano e Veronese che riguardava la costruzione del concetto di "iperspazio"; ed in quella occasione abbiamo avanzato l'ipotesi che la vera materia del contendere, che divideva profondamente i due matematici, fosse il concetto di rigore matematico. Su questo concetto Peano aveva delle convinzioni ben precise, e le aveva già manifestate in una piccola polemica che aveva avuto con C.SEGRE, in occasione di un articolo che questo geometra aveva scritto sulla "Rivista di Matematica, fondata e diretta da Peano [18]. E del resto ricordiamo che questi, all'epoca che stiamo considerando, aveva già scritto tre delle opere che gli conquistarono la fama: e precisamente l'opera sui fondamenti dell'Aritmetica [15]. quella sulla definizione di superficie curva [16] e la Nota in cui costruiva la celebre "curva" che riempie tutto un quadrato, che ancora oggi viene chiamata "curva di Peano" [17].

Ricordiamo inoltre che Peano già si era occupato di Geometria, e stava elaborando i suoi lavori sulla Logica; vale la pena di ricordare che uno dei primi esempi, se non addirittura il primo in assoluto, di applicazione di notazioni logiche, si incontra appunto nel volumetto sul "Calcolo geometrico", che Peano scrisse nel 1888 [14].

Nel caso che stiamo considerando, Peano criticò in modo particolare la costruzione che Veronese fa di una retta non-archimedea, costruzione che si fonda sulla introduzione di segmenti attualmente infinitesimi od infiniti [23].

Come già abbiamo visto nei giudizi di P.Benedetti, su questa costruzione Veronese basa anche la sua introduzione delle varie specie di Geometria, tanto la euclidea abituale che le non euclidee.

Appare quindi abbastanza naturale che Peano considerasse tutta l'opera di Veronese come priva di fondamento, anche perchè si basa appunto sulla possibilità di trattare segmenti attuali infiniti ed infinitesimi, possibilità che Peano cre_ deva di aver definitivamente refutato e demolito [19].

Lo stesso Peano non tenne alcun conto delle varie risposte di Veronese alle sue critiche, ed in particolare alle argomentazioni con cui Veronese si sforzava di mostrare che Peano e Cantor pensavano di poter refutare la esistenza di segmenti infinitesimi in atto perchè partivano da una concezione del continuo che implicitamente già lo considerava archimedeo [25].

La polemica si avviò al suo termine quando T.LEVI-CIVITA costruì un campo non archimedeo di numeri che egli chiamò "numeri monosemii" [10]. In particolare i numeri monosemii di Levi-Civita permettono di formalizzare analiticamente le idee che Veronese aveva esposto da parte sua in forma prevalente_ mente geometrica, dimostrando così implicitamente che il la_ voro di Veronese non contiene contraddizioni, almeno in questa sua parte: infatti la costruzione di Levi-Civita si basa sulle proprietà del campo reale. Si verifica quindi una situazione analoga a quella che si era presentata quando E.BELTRAMI costruì un modello di Geometria non euclidea ser_ vendosi di enti della Geometria euclidea [1]. Pertanto, nella situazione che così veniva creata, la ipotesi della coerenza interna della Geometria euclidea permetteva di garantire la coerenza anche delle altre geometrie.

Lo spazio che ci è concesso qui non ci permette di presentare la costruzione teorica di Veronese in tutti i suoi particolari. Ci dobbiamo quindi limitare a riprodurre la sintetica presentazione che ne diede F. Enriques [4].

Scrive questo illustre geometra: <<La differenza tra il concetto di continuità che si incontra nei lavori di Cantor e Dedekind e quello che si ha presso Veronese potrebbe essere presentata nel modo seguente:

si dividano tutti i punti di un segmento OM in due clas_ si disgiunte in modo che O appartenga alla prima, M alla se_ conda, ogni punto del segmento appartenga ad una delle due classi ed infine ogni punto della prima classe si trovi al_ l'interno del segmento che congiunge O con un punto qualunque della sewconda

si indichino con M' ed M" le due classi; allora si possono presentare i seguenti quattro casi:
1) M' ha un ultimo punto A' ed M" ha un primo punto A" (si ha allora un "salto");
2) M' ha un ultimo punto ed M" non ha alcun primo punto;