

Carlo Felice Manara

FARE SCIENZA. LA CREATIVITA' IN MATEMATICA E L'INCONTRO CON UN MAESTRO.

1 - Fra le dottrine che fanno parte del "corpus" di una civiltà scientifica la matematica ha un posto a parte; e nella mentalità delle persone colte la menzione di questa dottrina è spesso un'occasione di ricordi spiacevoli: molti sono infatti coloro i quali dichiarano, quasi con vanto, di non aver mai capito la matematica. E molti, che conoscono la dottrina con una certa profondità e la utilizzano per la loro professione (fisici, ingegneri) la considerano spesso come un insieme di procedure potenti e di strumenti concettuali di alto livello, ma non sono interessati al momento creativo della dottrina. E quindi rischiano così di perderne il significato profondo.

Non oso giudicare alcuno ed anzi temo che, almeno in parte, i matematici siano in certo modo all'origine di queste posizioni; le quali d'altro canto sono giustificate anche dalla natura specifica della dottrina.

Mi pare infatti che sia molto valida l'opinione che mi è capitato di leggere una volta, secondo la quale la matematica è l'unica scienza che non ammette volgarizzazioni (intendo volgarizzazioni serie); e questo fatto la rende spesso sconosciuta e come estranea alla mentalità comune. Inoltre accade che la trattatistica appaia quasi come fatta apposta per presentare i vari rami di questa scienza in forma che direi completa e togata, e quindi in modo da intimidire chi volesse per avventura accostarvisi. Ed infine non si può nascondere il fatto che la matematica oggi si avvale prevalentemente di simboli artificiali, regolati da una sintassi rigidissima.

Accade infatti che nei linguaggi naturali si possano comunicare delle informazioni anche in forma parzialmente scorretta, fuori dalle convenzioni sintattiche; anzi i poeti talvolta insistono nella violazione delle regole sintattiche e anche logiche, per accentuare il carattere evocativo e stimolante della loro opera. Invece nella matematica ogni più piccolo errore nella manovra dei simboli e delle loro regole conduce spesso a non comunicare alcun messaggio, oppure a trasmettere un messaggio diverso da quello desiderato.

Queste circostanze fanno sì che spesso la didattica della matematica nelle scuole si riduca ad un addestramento all'impiego del simbolismo ed al rispetto delle sue regole, e si riduca ad un allenamento all'uso di certe procedure di soluzione dei problemi, già stabilite e codificate da tempo. Il che produce l'impressione che tutto il "corpus" della dottrina matematica sia inficiato da una radicale aridità, e dà una disperante impressione di vuoto e di frustrazione, provocata da esercizi che appaiono senza scopo.

E' interessante osservare che la evoluzione storica della matematica, e la riflessione sulla nascita del pensiero matematico fanno vedere le cose in modo del tutto diverso.

2 - Qui voglio parlare della mia esperienza personale, vissuta accanto ad un Maestro che presentava, in modo eminente, certe caratteristiche mentali e spirituali di un certo tipo di matematico creativo che la storia ci presenta.

Queste mie parole fanno riferimento ad un celebre discorso che Henri Poincaré fece al congresso internazionale dei matematici che si tenne a Parigi nel 1900. In quella occasione il grande matematico francese espose una serie di riflessioni sulla psicologia della ricerca matematica; Poincaré presentò una suddivisione dei matematici creativi in due gruppi, classificando gli appartenenti all'uno o all'altro come analisti oppure

geometri; e ciò a seconda della tendenza alla formalizzazione precisa oppure rispettivamente alla intuizione geometrica creatrice che prevale nell'opera degli uni e degli altri. Poincaré osservò anche acutamente che l'appartenenza all'una oppure all'altra classe non discende dai contenuti delle opere: perché si può fare dell'analisi matematica con lo spirito di un geometra e fare della geometria con lo spirito dell'analista.

Ricordo queste parole di Poincaré in relazione alla felice occasione che io ebbi nella mia giovinezza di lavorare a contatto con una persona che, alla riflessione di oggi, mi appare come un rappresentante tipico della classe che Poincaré chiama dei "geometri". Intendo parlare di Oscar Chisini, che fu professore di "Geometria analitica con elementi di proiettiva e geometria descrittiva con disegno" presso l'Università degli studi di Milano fino al 1959, anno in cui fu collocato fuori ruolo.

Non interessa qui, al momento, caratterizzare la produzione scientifica di Chisini; piuttosto vorrei ora parlare anzitutto di lui come maestro di ricerca scientifica. Confesso che soltanto molto tardi, dopo la sua morte, ho riflettuto sulla sua opera in questo campo ed ho capito ciò che ho poi ritrovato nei classici: intendo dire che, a mio parere, il vero maestro è colui che non tende a costruire delle personalità identiche alla propria, ottenute con procedura quasi di clonazione, ma colui che suscita la vita autonoma nelle persone degli allievi, e che comunica un metodo di ricerca e di creazione piuttosto che dei contenuti, che si possono trovare nei trattati.

Chisini era allievo di Federigo Enriques, ed aveva una grandissima ammirazione ed un profondo affetto per il suo maestro. Questi era una grande figura della geometria italiana, ed era conosciuto su scala internazionale non solo come matematico, ma anche per i suoi interessi relativi alla filosofia ed alla storia della scienza; Chisini aveva studiato all'Università di Bologna e ricordo che una volta mi accennò (cosa eccezionale per lui) ad un confronto tra il suo maestro ed un altro matematico molto noto al tempo, pure insegnante nella stessa Università. Mi disse quella volta Chisini: «Se avevi un problema ed andavi da X (*il professore di cui ho detto*) ottenevi immediatamente una risposta molto precisa del tipo: "Consulti i "Mathematische Annalen" dell'anno tale, pagina tale, volume talaltro". Andavi da Enriques con lo stesso problema e ti rispondeva "Bel problema! pensiamoci sopra"». E soggiungeva Chisini: «Vedi la differenza tra chi ti dà delle idee e chi si limita a fornirti delle indicazioni bibliografiche» .

3 - Chi fosse abituato ai modi classici di presentare la matematica, in forma rigorosamente deduttiva [così come la si incontra nei trattati, o anche come la si ascoltava esposta dagli altri insegnanti] provava all'inizio un certo disagio alle lezioni di Chisini: infatti spesso egli enunciava delle ipotesi, e ne deduceva dei teoremi, ma poi ritornava a soppesare le ipotesi, a verificare ogni passaggio logico, a verificare se tutte le ipotesi fossero state utilizzate, ed a quale punto del ragionamento. E così via in una continua ricerca di autentico rigore logico e di aperture verso la generalizzazione dei risultati ottenuti. Questo suo modo di presentare la materia aveva come conseguenza il fatto che il riordino degli appunti delle sue lezioni diventasse spesso un'impresa difficile e faticosa. Ma quando si era entrati nello spirito del suo modo di vedere la geometria, allora l'assistere alle sue lezioni diventava un'avventura intellettuale esaltante; perché vi si incontravano spessissimo delle impostazioni del tutto originali di problemi, anche classici, e da qualcuno ritenuti superati. E soprattutto si assisteva ad un modo vitale di fare matematica; un modo di ricerca che partiva dalla visualizzazione e dalla immaginazione e si svolgeva con un continuo alternarsi di deduzioni rigorose e di intuizioni creatrici.

4 - Quando rievoco la collaborazione che ebbi col maestro per vari anni dopo la laurea ritengo di poter applicare a lui ciò che Poincaré, nella conferenza che ho citato, disse di Victor Poncelet (matematico francese del secolo scorso [1788-1867], uno dei fondatori della Geometria proiettiva); afferma infatti Poincaré che il Poncelet era un tipo "puro" di matematico geometra; e lo era in modo chiarissimo e lo dimostrava quasi con ostentazione.

E riflettendo su queste parole di Poincaré sono tentato di spiegare a me stesso la predilezione che Chisini aveva per quello che egli chiamava il "metodo di Poncelet" in geometria proiettiva. Nella esposizione che egli ne faceva, e nella pratica della sua ricerca, il metodo di Poncelet potrebbe essere presentato dicendo che egli partiva da risultati di geometria elementare, classica, ma li "leggeva" con il linguaggio e le idee della geometria proiettiva, così da conferire loro validità in un campo molto più vasto rispetto a quello in cui i risultati stessi erano nati, e nel quale si muovevano le procedure della loro dimostrazione.

Riandando con la memoria a queste lezioni, che erano delle illuminazioni per chi sapeva riceverle, mi viene alla mente la pagina scritta da un matematico il quale descrive la vicenda della ricerca, dicendo che spesso il ricercatore ha l'impressione di scalare il fianco di un monte, passando attraverso una folta selva e per una via impervia; e quando giunge alla cima, stanco, ansimante, graffiato e con le vesti strappate, scopre da lassù che esiste una strada larga e comoda che conduce a quel punto da lui conquistato con tanta pena e fatica. Ma questa è chiaramente utile per scoprire la strada, e costituisce per molti un aspetto insopprimibile della ricerca scientifica; un aspetto faticoso ma esaltante. Tuttavia ciò vale per la massa dei ricercatori; infatti tra i matematici esistono anche quelli che spesso possono risparmiarsi la salita faticosa tra i cespugli e le spine, perché hanno le ali che li portano direttamente alla cima desiderata.

Ed invero io ho ammirato spesso Chisini per le sue intuizioni, che lo portavano al risultato quasi di volo, senza il bisogno di percorrere un cammino che per le mie forze sarebbe stato faticoso ed impervio; e l'ho ammirato spesso per la sua capacità di guardare anche gli argomenti classici con occhio smagato, che gli faceva vedere degli aspetti del tutto nuovi ed attraenti in argomenti che io credevo di conoscere e che ero tentato di giudicare quasi banali.

Questa capacità di vedere cose nuove e questa vivacità di fantasia, che riproponeva la creazione anche in campi che la lunga coltivazione avrebbe fatto giudicare ormai sterili, mi ricorda il giudizio frizzante emesso da un grande matematico su un suo allievo, che aveva lasciato la matematica per dedicarsi alla poesia: «Aveva troppo poca fantasia per fare il matematico».

5 - La creatività e la profondità di pensiero di Chisini si manifestavano in modo particolare nella creazione di simboli nuovi, e nel loro impiego per la invenzione e la ricerca matematica. Ricordo in particolare i simboli che egli inventò per rappresentare certi aspetti delle curve algebriche piane che erano importanti per la teoria delle funzioni algebriche di due e più variabili. Chisini costruì delle rappresentazioni che sfruttavano le proprietà di certe curve dello spazio tridimensionale abituale, curve che egli denominò "trecce"; di queste egli si servì per dimostrare certi teoremi fondamentali per la teoria che stava studiando, e su di esse egli lavorò fino alla fine della sua vita intellettuale.

Ricordo che varie volte egli mi espose certe considerazioni che, a mio parere, dovevano essere i risultati di discussioni che egli stesso aveva portato avanti col suo maestro, quel Federigo Enriques che ho già nominato. Una di queste considerazioni riguardava il significato e la

portata dei disegni che si facevano per spiegare ed anche indovinare le proprietà delle curve algebriche piane. E' noto che questi enti hanno la loro definizione nel campo dei numeri complessi, e che questo è rappresentato in modo soddisfacente soltanto in due dimensioni, attraverso quelle convenzioni che hanno portato certi grandi matematici [per esempio K.F. Gauss ed A. Cauchy] alla rappresentazione dei numeri complessi sul piano. Pertanto il disegno di una curva unidimensionale non può rendere in modo soddisfacente tutte le proprietà di una curva algebrica piana: parlando in modo abituale si potrebbe dire che un disegno cosiffatto è certamente "sbagliato"; eppure è possibile utilizzare anche queste rappresentazioni per ottenere degli stimoli alla ricerca di proprietà nuove ed alla stesura di dimostrazioni valide; ciò è possibile, ripeto, ma richiede un acutissimo senso del limite ed una profonda capacità critica, che aiutano il ricercatore nello sfruttamento del simbolo e lo difendono dagli equivoci, e gli impediscono di essere fuorviato da errate interpretazioni.

Cose analoghe si potrebbero dire di quelle rappresentazioni convenzionali che furono sviluppate da Chisini insieme con F. Enriques per rappresentare certi aspetti delle singolarità delle curve algebriche. Anche in questo caso la rappresentazione era puramente simbolica, ma permetteva scoperte e dimostrazioni, qualora fosse utilizzata con acuto senso critico.

6 - Ciò che ho cercato di dire, ripensando alla figura di Oscar Chisini, mi conduce in modo quasi spontaneo a ripensare alla figura del maestro, in generale. Vorrei anzitutto osservare che, a mio parere, soltanto la natura specifica dell'intelligenza umana può spiegare l'esistenza del maestro: presso gli animali infatti è naturale che l'adulto addestri il cucciolo alle operazioni essenziali per la vita. Ma per l'essere umano l'insegnamento non può limitarsi all'addestramento, anche se questo è spesso condizione necessaria (e neppure sempre) ma non sufficiente per la possibilità di un insegnamento valido. Penso che a questo proposito sia molto efficace la espressione che Hans Freundenthal utilizza per descrivere l'apprendimento in matematica: secondo lo studioso olandese tale apprendimento deve essere una "reinvenzione guidata": reinvenzione perché un soggetto non può dire di aver appreso un certo concetto o di saper dominare una certa teoria o anche solo una certa procedura se non ha fatto un lavoro di appropriazione. Lavoro che non sempre è facile, anzi spesso è faticoso, e che deve sempre coinvolgere l'attività del soggetto; spesso addirittura questo può giungere ad una situazione psicologica nella quale è quasi tentato di pensare di aver inventato personalmente le idee che egli ora possiede e di aver costruito le procedure che ora egli domina. Ma si tratta di una reinvenzione guidata dal maestro, quando costui sia tale; e la guida risparmia all'allievo i giri inutili, le fatiche frustranti (non quelle educative), e gli evita di imboccare le strade senza uscita.

Tutto ciò nel rispetto della personalità specifica dell'allievo, e nella coscienza del fatto che esistano vari tipi di intelligenza (come osserva acutamente Howard Garner) e soprattutto del fatto che l'apprendimento è un processo in gran parte misterioso, del quale si possono dire ben poche cose certe: una è che non ha quasi mai uno sviluppo lineare, ma anzi avviene per salti e per ritorni, almeno nei suoi momenti più importanti.

Queste considerazioni, ben note a chi abbia anche soltanto un minimo di spirito di osservazione sono spesso ignorate o dimenticate da certe teorie dell'apprendimento che, si direbbe, spesso pretendono di scandire con precisione nelle sue fasi, di possedere nei suoi particolari e di dominare in pieno un processo tipicamente umano e che io continuo a giudicare molto misterioso nella sua essenza profonda.

7 - Questi atteggiamenti spesso portano a dimenticare che i problemi psicologici e filosofici posti dalla figura del maestro, dalla sua azione, e dai rapporti con gli allievi erano già stati oggetto di riflessione da parte della sapienza classica. Da questa l'azione del maestro era stata classificata nella categoria di "ars"; e con questo vocabolo si intendeva designare non l'arte nel senso attuale e moderno del termine, ma una dottrina che dirige l'azione, unica ed irripetibile, dell'essere umano su un altro essere umano. Azione che deve essere diretta dalla conoscenza e dalla scienza, ma che non può limitarsi alla applicazione dei precetti della scienza: si tratta infatti di una azione che coinvolge due personalità umane, ciascuna pure unica ed irripetibile. Queste considerazioni, ovvie per chi frequenti il pensiero classico, sono date per scontate per esempio da S. Agostino, il quale, nella sua opera intitolata per l'appunto "De Magistro", indaga sull'opera del maestro umano.

Seguendo questo modo di pensare, Agostino giunge ad osservare che il maestro non fa che stimolare la costruzione interiore della conoscenza, e l'appropriazione dei concetti presentati. Appropriazione la quale, come abbiamo già visto, giunge talvolta a generare in qualcuno la convinzione di aver costruito lui stesso i concetti, di prima mano e la prima volta nella storia. E forse questa considerazione può aiutarci a scusare tante "scoperte dell'acqua calda" che capita di incontrare quasi quotidianamente, e che ci vengono ammannite (forse in buona fede) come nuove e mirabolanti.

Volendo ripresentare le stesse cose con altro linguaggio, vorrei ripetere che l'impresa del maestro non è tanto quella di presentare delle nozioni e dei contenuti, ma quella di stimolare il discente a costruirsi un metodo di formazione della propria cultura. Ciò mi pare particolarmente vero oggi, cioè quando gli strumenti per la ricerca e la trasmissione dell'informazione sono molto potenti, ma non possono in alcun modo sostituire quella azione umana irripetibile di cui dicevo. In forma paradossale si potrebbe dire che forse oggi si potrebbero chiudere molte scuole, se esse si limitano soltanto ad informare; ma che non si può sopprimere la figura del maestro, dove questo eserciti bene la sua missione insostituibile.

Milano, maggio 1996.