E. LA METHODE DES PRODUITS JOINTS
CAPITAL FIXE ET RENTE FONCIERE

13 LE MODELE DE PRODUCTION JOINTE DE MARCHANDISES AU MOYEN DE MARCHANDISES DE PIERO SRAFFA *

Carlo Felice MANARA

1. L'objet de cet article est d'analyser le modèle présenté par Piero Sraffa dans la seconde partie de son ouvrage *Production de marchandises par des marchandises.* Il existe, certes, des analyses de la première partie de cette œuvre qui porte sur les branches à produit unique et capital circulant : citons, entre autres, celles de P. Newman [1] et de V. Dominedo [2]. Mais, à notre connaissance, il n'existe pas d'analyse (menée à l'aide d'outils mathématiques) de la seconde partie de l'œuvre de P. Sraffa *Branches à produits multiples et capital fixe.* Notre analyse ne semble donc pas inutile; non seulement dans le but que s'assigne P. Newman dans son article, c'est-à-dire de «*transposer* son œuvre dans les termes walrasiens de l'économie mathématique qui sont plus généralement utilisés», mais aussi, et surtout, afin d'analyser les fondements logiques de la formalisation de Sraffa et de tenter d'énoncer les hypothèses qui rendent son modèle acceptable [3]; ces hypothèses ne sont pas toujours claires et explicites chez Sraffa, sans doute parce que –à cause de l'utilisation très limitée qu'il fait du langage mathématique – il se croit dispensé d'un énoncé précis des conditions dans lesquelles les relations qu'il établit et les argumentations qu'il fournit peuvent avoir un sens.

Mais un autre avantage de la transcription en langage mathématique de raisonnements effectués en langage courant est de contraindre à une analyse rigoureuse des présupposés et de ne rien abandonner à une «intuition» ou à une «évidence» qui seraient impliquées par la question traitée; évidence qui risque parfois de faire sortir du droit chemin ceux qui s'aventurent sur ses fondements mouvants et trompeurs. Il est à peine utile de préciser ici que la formalisation que nous présenterons est délibérément mathématique et que, par conséquent, les allusions à la signification économique ne seront faites que très incidemment; lorsque nous serons contraints d'énoncer des hypothèses, nous le ferons dans l'intention explicite de respecter la compétence des économistes en ce qui concerne l'appréciation de la pertinence de celles-ci.

* Extrait de *L'Industria,* 1968, n° 1, pp. 3-18. Reproduit avec l'autorisation de l'auteur et de l'éditeur.

1. P. Newman, «Production of Commodities by Means of Commodities», *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik,* mars 1962, traduit dans ce volume, art. 7.

2. V. Dominedo, «Una teoria economica neo-ricardiana», *Giornale degli Economisti,* novembre-décembre 1962.

3. Nous ne nous satisfaisons pas de l'utilisation du terme «viabile», employé par certains auteurs : il nous semble que, dans la langue italienne, ce terme possède un sens courant différent de celui qu'il revêt dans la langue anglaise; nous parlerons donc toujours ici de conditions d'«acceptabilité» du modèle, et de «modèle acceptable».

Dans ce qui suit, les références à l'œuvre de Sraffa seront désignées simplement par les lettres «SRF» suivies du numéro de la page de l'édition française.

2. Pour adopter une notation commode, nous modifierons quelque peu les symboles utilisés par Sraffa, et nous adopterons les conventions suivantes.

Nous désignerons nous aussi par k le nombre (un entier naturel, de toute évidence) de marchandises et de branches qui existent dans le système économique que nous examinons.

La formulation du modèle qui nous intéresse ici se fonde sur la prise en compte de $2k^2$ quantités de marchandises qui peuvent être commodément exprimées comme les éléments de deux matrices carrées d'ordre k.

Nous désignerons par $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ ces matrices carrées et par

$$a_{ij} \text{ et } b_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots k)$$

leurs éléments respectifs. La signification des quantités a_{ij} et b_{ij} est celle indiquée par Sraffa (*cf.* SRF, 55) : a_{ij} désigne la quantité de la marchandise i qui entre comme moyen de production dans la branche j, et b_{ij} représente de son côté la quantité de la marchandise i produite par la branche j. Par conséquent, les lignes des matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ correspondent aux marchandises (conçues respectivement comme moyens de production et comme produits) et les colonnes correspondent aux branches du système économique. Nous désignerons par

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$$

le vecteur dont les composantes désignent les prix des différentes marchandises. La première, la seconde, ... la k-ième composante du vecteur $\boldsymbol{p}$ sont donc respectivement les prix de la première, la seconde, ... la k-ième marchandise. Nous désignerons ensuite par

$$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_k) \tag{1}$$

le vecteur dont les composantes sont les quantités de travail employées dans les différentes branches. Nous désignerons enfin par r le taux de surplus (ou profit; *cf.* SRF, 7) et par w le niveau général du salaire.

Nous adopterons les notations du calcul matriciel tel qu'il est aujourd'hui couramment pratiqué [4]; en particulier, chaque fois que nous noterons un vecteur $\boldsymbol{x}$, il conviendra de le considérer comme un vecteur-ligne, c'est-à-dire comme une matrice de type particulier (1, k); le vecteur colonne possédant les mêmes composantes que le vecteur $\boldsymbol{x}$ sera noté par « $\boldsymbol{x}_T$ », c'est-à-dire par une matrice de type (k, 1) obtenue par transposition à partir d'un vecteur-ligne, c'est-à-dire d'une matrice de type (1, k).

4. C.F. Manara, P.C. Nicola, *Elementi di economia matematica*, Milan, 1967, appendice II.

Rappelons en particulier que, si A désigne une matrice et $\boldsymbol{x}$ un vecteur, les notations

$$A > O \; ; \; \boldsymbol{x} > O \tag{2}$$

signifient que tous les éléments de la matrice (et les composantes du vecteur) sont des nombres positifs. Les notations

$$A \geqslant O \; ; \; \boldsymbol{x} \geqslant O \tag{3}$$

signifient que les éléments de la matrice (ou les composantes du vecteur) sont des nombres non négatifs, mais qu'un élément (ou une composante) au moins est un nombre positif.

Enfin, les symboles

$$A \geqq O \; ; \; \boldsymbol{x} \geqq O \tag{4}$$

indiquent que tous les éléments de la matrice (ou les composantes du vecteur) sont des nombres non négatifs, le cas où ils sont tous nuls n'étant pas exclu.

A l'aide de nos conventions, le système fondamental d'équations du modèle de P. Sraffa (SRF, 56) peut être écrit en une seule équation :

$$\boldsymbol{p}A(1+\mathrm{r}) + \mathrm{w}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{B}. \tag{5}$$

De toute évidence, chaque composante du vecteur qui forme le premier membre de l'équation (5) représente le coût de production d'une branche particulière (comprenant le coût d'achat des marchandises utilisées comme moyens de production, la rémunération du capital et le salaire du travail), et la composante correspondante du vecteur qui forme le second membre de cette même équation représente les recettes de cette branche.

De la signification économique de l'équation (5) et des symboles qui y apparaissent, on tire immédiatement que les conditions suivantes doivent être satisfaites pour les matrices, les vecteurs et les constantes r et w :

$$A \geqslant O \; ; \; \boldsymbol{B} \geqslant O \tag{6}$$

$$\boldsymbol{p} \geqslant O \; ; \; \boldsymbol{q} \geqslant O \tag{7}$$

$$\mathrm{r} \geqslant O \; ; \; \mathrm{w} \geqslant O \tag{8}$$

Par la suite, nous ferons appel à la *remarque* suivante. Il est possible de réordonner de manière arbitraire les colonnes des matrices A et $\boldsymbol{B}$, en effectuant sur elles n'importe quelle permutation, à la condition que la même soit effectuée sur les composantes du vecteur $\boldsymbol{q}$; de manière analogue, il est possible de réordonner de façon arbitraire les lignes des matrices A et $\boldsymbol{B}$ en effectuant sur ces lignes une quelconque permutation (éventuellement différente de celle qui a été effectuée sur les colonnes), à condition d'opérer de même sur les éléments du veeteur $\boldsymbol{p}$.

Puisqu'une permutation quelconque opérée sur les colonnes d'une matrice est obtenue en multipliant celle-ci à droite par une matrice $\boldsymbol{S}$ (produit de matrices de permutation appropriées [5]), et puisqu'une permutation opérée sur les lignes d'une matrice s'obtient en multipliant celle-ci à gauche par une matrice $\boldsymbol{T}^{-1}$ (produit de matrices de permutation déterminées), l'équation (5) est formellement équivalente à une équation analogue qui s'écrit :

$$(5^*) \qquad \boldsymbol{p}^*\boldsymbol{A}^*(1+\mathrm{r})+\mathrm{w}\ \boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{p}^*\boldsymbol{B}^*$$

où :

$$(9) \qquad \boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{p}\boldsymbol{T}\ ;\ \boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{q}\boldsymbol{S}\ ;\ \boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\ ;\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{T}^{-1}\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{S}.$$

Remarquons que nous ne pouvons pas parvenir à un tel résultat dans le cas de branches à produit unique. Dans la matrice que l'on doit prendre en compte dans la première partie de l'ouvrage de Sraffa, il n'est pas permis en effet de réordonner les lignes et les colonnes au moyen de permutations quelconques, même différentes entre elles, étant donné la signification différente qu'y possèdent les éléments des matrices.

3. Nous nous proposons à présent d'examiner dans quelles conditions l'équation fondamentale (5) du paragraphe précédent est acceptable (comme nous l'avons noté, cette équation établit l'équilibre entre les recettes et les dépenses des différentes branches du système économique considéré). Mais il ressort de la théorie de Sraffa que le rôle de l'équation vectorielle (5) du paragraphe 2 (ou bien du système d'équations équivalent qui figure chez SRF, 56) est de déterminer les prix des marchandises lorsque les autres données de l'équation sont fixées. Il est évident que ces prix doivent former les composantes d'un vecteur positif et satisfaire ainsi à la condition (7) du paragraphe 2. Supposons pour simplifier que toutes les marchandises prises en compte soient fondamentales (nous reviendrons par la suite sur la distinction entre marchandises fondamentales et non fondamentales). Il résulte de cette hypothèse simplificatrice que l'équation (5) du paragraphe 2 devrait être suffisante pour déterminer le vecteur des prix lorsque, bien entendu, certaines conditions qui ne se trouvent pas explicitées dans l'œuvre de Sraffa et sur lesquelles nous désirons à présent nous attarder sont satisfaites.

A cette fin, écrivons l'équation fondamentale (5) du paragraphe 2 sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \mathrm{w}\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\ [\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1+\mathrm{r})]$$

Le but de notre analyse est de discerner les conditions que doit remplir la matrice $[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}]$ ou, plus généralement la matrice $[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}(1+\mathrm{r})]$ lorsque :

$$(2) \qquad \mathrm{r} \geqslant \boldsymbol{O}.$$

pour que l'équation vectorielle (1) ait une solution et que cette solution soit un vecteur de prix positif.

La nécessité de préciser les hypothèses pour lesquelles cette circonstance se réalise nous conduira à l'énoncé de certaines hypothèses fondamentales

5. *Cf.* par exemple *ibid.*, appendice VI.

(que nous désignerons par les lettres UA suivies d'un nombre que nous choisirons parmi un ensemble de nombreuses hypothèses possibles; quant à leur signification économique, comme nous l'avons déjà dit, nous acceptons le jugement des experts en la matière : mieux que nous ils sont à même de juger de la pertinence de ces hypothèses et de leurs implications économiques; nous nous bornerons cependant à observer que, sans ces hypothèses (ou d'autres qui seraient équivalentes), le modèle représenté par l'équation (1) ne serait pas «acceptable»).

UA1. La quantité globale de chaque marchandise utilisée comme moyen de production est inférieure à la quantité globale de cette même marchandise qui est produite dans le système économique.

A l'aide de nos notations vectorielles, posons :

$$s = (1, 1, ..., 1). \tag{3}$$

L'hypothèse UA1 s'exprime alors comme suit :

$$[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}]\, \boldsymbol{s}_{\mathrm{T}} > \boldsymbol{O}_{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

UA2. Il existe au moins un vecteur de prix positif $\hat{\boldsymbol{p}}$ tel que la valeur des marchandises utilisées comme moyens de production par chaque branche, évaluées à ces prix, est inférieure à la valeur du produit, évalué à l'aide des mêmes prix.

Formellement, l'hypothèse UA2 s'énonce :

$$\exists\ \hat{\boldsymbol{p}} \left\{ \hat{\boldsymbol{p}} > \boldsymbol{O} \wedge \hat{\boldsymbol{p}}\, [\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}] > \boldsymbol{O} \right\} \tag{5}$$

Cette hypothèse est analogue à l'hypothèse implicite nécessaire à l'«acceptabilité» du modèle de Wassily Leontief [6].

Désignons par X l'ensemble des vecteurs-colonne dont les composantes sont non négatives. En d'autres termes :

$$\mathrm{X} = \left\{ \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}} / \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}} \geqslant \boldsymbol{O}_{\mathrm{T}} \right\} \tag{6}$$

Désignons ensuite par U (r) l'ensemble des vecteurs-colonne appartenant à X et tel que, pour tout vecteur $\boldsymbol{x}_{\mathrm{T}}$ de U (r), on ait :

$$[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1 + \mathrm{r})]\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}} \geqslant \boldsymbol{O}_{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

En d'autres termes, posons :

$$\mathrm{U}(\mathrm{r}) = \left\{ \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}} \mid \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}} \in \mathrm{X} \wedge [\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1 + \mathrm{r})]\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}} \geqslant \boldsymbol{O}_{\mathrm{T}} \right\} \tag{8}$$

6. *Cf.* Wassily W. Leontief, *The Structure of American Economy*, 1919-1939, Oxford University Press, New York, 1951.

On démontre aisément que l'ensemble U (r) est un cône polyèdre convexe. Dans la mesure où

(9) $$\boldsymbol{s} \in \mathrm{X}$$

il découle immédiatement de l'hypothèse (5) qu'il existe une valeur de r (et précisément la valeur r = 0) pour laquelle U (r) n'est pas vide.

Puisque la fonction vectorielle de la variable réelle r donnée par l'expression

(10) $$[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1+\mathrm{r})]\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{T}}$$

est de toute évidence continue, on déduit aisément de ce qui précède que l'ensemble des valeurs de r, appartenant à la demi-droite définie par la relation (2) et pour lesquelles l'ensemble U (r) n'est pas vide, est un intervalle fermé à gauche et non vide. De manière analogue, désignons par P l'ensemble des vecteurs-ligne à composantes non négatives. En d'autres termes :

(11) $$\mathrm{P} = \left\{ \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{O} \right\}$$

Désignons ensuite par V (r) l'ensemble des vecteurs non négatifs tels que l'on ait, pour tout vecteur de V (r) :

(12) $$\boldsymbol{y}\,[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1+\mathrm{r})] \geqslant \boldsymbol{O}$$

En d'autres termes, posons :

(13) $$\mathrm{V}(\mathrm{r}) = \left\{ \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathrm{P} \wedge \boldsymbol{y}\,[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1+\mathrm{r})] \geqslant \boldsymbol{O} \right\}$$

Nous pouvons démontrer aisément que l'ensemble V (r) est également un cône polyèdre convexe.

De l'hypothèse (5), on tire :

(14) $$\hat{\boldsymbol{p}} \in \mathrm{P}$$

On déduit de l'hypothèse (4) que l'ensemble V (r) n'est pas vide pour au moins une valeur de r (et précisément pour r = 0). Puisque la fonction vectorielle de la variable réelle r, donnée par l'expression

(15) $$\boldsymbol{y}\,[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1+\mathrm{r})]$$

est évidemment continue, on déduit facilement de ce qui précède que l'ensemble des valeurs de r appartenant à la demi-droite définie par la relation (2) et pour lesquelles l'ensemble V (r) n'est pas vide est un intervalle fermé à gauche.

Supposons à présent que l'hypothèse suivante soit satisfaite :

(16) *UA3.* $$\text{dét}\,[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}] \neq 0$$

Cette hypothèse garantit que, pour une valeur au moins de r (et précisément r = 0), les vecteurs formant les lignes de la matrice $[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}(1+\mathrm{r})]$ sont linéairement indépendants.

Puisque la fonction réelle f (r) de la variable réelle r, définie par

$$(17) \qquad f(r) = \text{dét}\ [\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}(1+r)]$$

est évidemment continue, l'ensemble des valeurs de r appartenant à la demi-droite définie par la relation (2) et telles que :

$$(18) \qquad \text{dét}\ [\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}(1+r)] \neq 0$$

constitue un intervalle fermé à gauche, ayant comme élément extrême à gauche la valeur r = 0.

Nous prendrons en considération les valeurs de r appartenant à la demi-droite définie par la relation (2), pour lesquelles les deux ensembles U (r) et V (r) sont non vides et pour lesquelles la condition (18) est satisfaite. Nous désignerons par la suite cet intervalle par $\boldsymbol{J}$.

4. Les hypothèses UA1, UA2 et UA3, que nous venons d'expliciter dans le paragraphe précédent, sont nécessaires pour que le modèle examiné possède des solutions économiquement significatives. Elles ne sont cependant pas encore suffisantes pour que ce modèle puisse servir d'instrument pour déterminer un vecteur des prix qui en soit solution et qui soit, bien entendu, économiquement significatif. En effet, si nous examinons l'équation fondamentale du modèle, équation que nous reproduisons ici sous la forme (1) du paragraphe 3 pour la commodité du lecteur :

$$w\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\,[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}(1+r)],$$

il apparaît que cette équation ne possède pas comme solution un vecteur des prix qui soit positif quel que soit le vecteur $\boldsymbol{q}$ des quantités de travail employées dans les branches du système.

L'exemple suivant illustrera notre propos.

Soit :

$$(1) \qquad k = 3;$$

et considérons les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ données par

$$(2) \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2.9 & 1.2 & 1.9 \\ 1.2 & 2.9 & 3.9 \\ 0.1 & 1.2 & 3.9 \end{bmatrix}$$

Ces deux matrices satisfont aux hypothèses UA1 et UA2; de toute évidence, cette dernière est vérifiée lorsque l'on suppose un vecteur $\hat{\boldsymbol{p}}$ donné par :

$$\hat{\boldsymbol{p}} = (1, 1, 1) \tag{4}$$

On vérifie aisément que la condition UA3 est également remplie.

On peut aussi constater que toutes les marchandises prises en compte dans le modèle sont des marchandises fondamentales; le lecteur pourra vérifier notre affirmation (que nous lui demandons d'accepter en nous faisant confiance provisoirement) lorsqu'il aura examiné comment, par la suite, nous traitons la question des marchandises fondamentales; il pourra alors appliquer les critères que nous lui fournirons pour être en mesure de juger si un modèle déterminé, dont les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont connues, prend également en compte l'existence de marchandises non fondamentales, au sens de Sraffa et selon la définition qu'il en donne (SRF,60 et s.).

Si donc

$$\mathrm{r} = 0 \text{ et } \mathrm{w} = 1 \tag{5}$$

on constate que le vecteur des quantités de travail donné par

$$\boldsymbol{q} = (1.73,\ 1.66, 0.47) \tag{6}$$

engendre le vecteur des prix suivants :

$$\boldsymbol{p} = (11,\ 1,\ -0,7) \tag{7}$$

dans lequel les prix ne sont pas tous positifs.

De cet exemple, nous déduisons que, pour que le modèle soit «acceptable», nous devons énoncer quelque hypothèse supplémentaire pour exprimer les conditions pour lesquelles, en présence de l'équation (1) du paragraphe 3, et une fois connues les valeurs de r et w, un vecteur $\boldsymbol{q}$ des quantités de travail engendre un vecteur des prix positif, tout au moins dans le cadre restreint dans lequel nous nous sommes placés (toutes les marchandises sont fondamentales).

A cette fin, considérons donc une matrice $[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1 + \mathrm{r})]$, correspondant à une valeur de r qui appartienne à l'intervalle $\boldsymbol{J}$ défini dans le paragraphe précédent. Désignons par V' (r) l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{z}$ donnés par

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1 + \mathrm{r})] \tag{8}$$

lorsque $\boldsymbol{p}$ appartient à l'ensemble V (r): on pourrait appeler cet ensemble V' (r) l'«image» de V (r) par l'application linéaire donnée par la matrice carrée $[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1 + \mathrm{r})]$; il est défini par la formule :

$$\mathrm{V'}(\mathrm{r}) = \left\{ \boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1 + \mathrm{r})] \wedge \boldsymbol{p} \in \mathrm{V}(\mathrm{r}) \right\} \tag{9}$$

De cette définition de V' (r), nous déduisons immédiatement :

$$\boldsymbol{q} \in \mathrm{V'}(\mathrm{r}) \rightarrow \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(1 + \mathrm{r})]^{-1} > \boldsymbol{O} \tag{10}$$

L'hypothèse que nous recherchons peut alors être énoncée de la manière suivante.

UA4. Pour toute valeur de r appartenant à l'intervalle $\boldsymbol{J}$, le vecteur $\boldsymbol{q}$ appartient à l'ensemble V' (r). Formellement :

$$\text{(11)} \qquad r \in \boldsymbol{J} \rightarrow {}'\boldsymbol{q} \in V'(r).$$

5. Dans le système de Piero Sraffa, nous savons l'importance revêtue par le produit-étalon : dans le cas des branches à produit unique qui fait l'objet de la première partie de l'ouvrage , il sert de numéraire pour la mesure de la valeur du produit global, du salaire et des prix. Le produit-étalon semble posséder une importance analogue dans le cas de la production conjointe; mais, dans ce second cas, Sraffa lui-même paraît s'être rendu compte de la possibilité de complications dans la définition du produit-étalon. On peut du moins interpréter en ce sens les affirmations (SRF, 58) selon lesquelles il est évident que l'on doit prendre également en considération des multiplicateurs négatifs pour former le produit-étalon.

Cependant, il ne semble pas que le moindre doute ait effleuré Sraffa quant à la possibilité d'imaginer l'existence d'un produit-étalon, alors qu'au contraire cette possibilité n'est pas toujours vérifiée : elle doit être postulée grâce à l'adoption d'une hypothèse appropriée concernant la constitution des matrices que nous avons désignées par $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$.

Pour préciser ce point, remarquons que l'ensemble des multiplicateurs qui engendrent le produit-étalon est défini par l'équation :

$$\text{(1)} \qquad (1 + R)\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_T.$$

Cette équation vectorielle est déduite de l'équation (5) du paragraphe 2, dans laquelle on a posé :

$$\text{(2)} \qquad r = R \ ; \ w = 0.$$

Les composantes du vecteur $\boldsymbol{x}_T$ (définies à un facteur multiplicatif près) sont les cœfficients de la combinaison linéaire des branches qui engendrent le produit-étalon. L'équation (1) exprime le système décrit chez Sraffa (SRF,65); nous faisons ici l'hypothèse selon laquelle toutes les marchandises sont fondamentales; cette hypothèse n'est pas restrictive pour ce que nous voulons établir; le lecteur pourra transcrire notre équation lors de la prise en compte ultérieure dans notre étude de l'existence des marchandises non fondamentales, comme nous l'avons déjà annoncé.

L'équation (1) peut également être écrite sous la forme :

$$\text{(3)} \qquad [\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1 + R)]\, \boldsymbol{x}_T = \boldsymbol{O}$$

Selon les théorèmes classiques de l'algèbre des systèmes d'équations linéaires, cette équation possède pour solution un vecteur $\boldsymbol{x}_T$, différent du vecteur nul, si :

$$\text{(4)} \qquad \text{dét}\ [\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1 + R)] = 0$$

En outre, le produit-étalon n'a de sens, pour la signification économique que Sraffa lui attribue, que si le vecteur $\boldsymbol{x}_T$ est défini de façon univoque, par rapport à une valeur R solution de (4), à un facteur multiplicatif près.

Cela est vérifié si la valeur

$$r = R \tag{5}$$

est une racine simple de l'équation algébrique :

$$\text{dét } [\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(1+r)] = 0 \tag{6}$$

Toutes ces conditions sont réalisées dans le modèle de P. Sraffa de branches à produit unique, sur la base des célèbres théorèmes de Perron et de Frobenius. Mais, dans le cas du modèle qui nous intéresse ici, ces circonstances peuvent très bien ne pas se présenter, comme le prouve l'exemple suivant (dans lequel il n'est pas même possible de construire le produit-étalon, tout au moins si nous demeurons dans l'ensemble des nombres réels).

Soit le modèle dans lequel

$$k = 2 \tag{7}$$

et

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1.1 \\ 1.1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1.09 & 1.144 \\ 1.144 & 0.99 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Posons

$$1 + r = t; \tag{10}$$

on en déduit aisément que l'équation

$$\text{dét } [\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}t] = 0 \tag{11}$$

s'exprime dans ce cas par

$$0.21\, t^2 - 0.4368\, t + 0.229636 = 0 \tag{12}$$

et ne possède aucune racine réelle [7].

D'autre part, on vérifie que les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ données respectivement par (8) et (9) satisfont aux hypothèses UA1, UA2, UA3.

7. Les termes «nombre réel» et «solution réelle» sont utilisés ici au sens technique précis des mathématiques, et non dans la signification un peu vague qu'il a en SRF, 54; dans ce dernier passage, et pour autant que nous ayons pu comprendre, l'auteur utilise peut-être l'expression «solutions réelles» pour «solutions économiquement significatives» ou bien «qui correspondent à quelque chose dans la réalité».

En conséquence, pour que les déductions de P. Sraffa soient valides, l'hypothèse suivante doit être vérifiée.

UA5. L'équation algébrique en r :

$$\text{dét}\,[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}(1+r)] = 0 \tag{13}$$

admet au moins une racine réelle et positive. Cette racine (ou la plus petite des racines réelles et positives s'il en existe plusieurs) est une racine simple de l'équation algébrique (13).

Cette dernière proposition, selon laquelle la racine dont on suppose l'existence (ou bien la plus petite des racines) doit être racine simple de l'équation (13) est fondée sur les considérations suivantes : d'après ce qui est écrit en SRF, 65, et pour des raisons tenant à la signification économique du produit-étalon, il apparaît que, pour déterminer ce dernier, l'auteur veuille adopter la convention de prendre pour racine de l'équation (13) la plus petite des racines positives (s'il en existe plusieurs); on désignera par ρ cette racine; toutefois, pour que la construction du produit-étalon ait un sens, il faut que l'équation correspondante (3) possède un seul vecteur-solution, défini à une constante multiplicative près. Il serait contraire aux vues de l'auteur que l'équation (3) possède au moins deux vecteurs-solutions linéairement indépendants. Mais cela ne pourrait se produire que si la racine ρ n'était pas racine simple de l'équation (13).

6. Comme on sait, la distinction entre produits fondamentaux et non fondamentaux est essentielle à l'analyse de Sraffa; notamment parce que selon sa conception ce sont les premiers qui déterminent le vecteur des prix, solution de l'équation fondamentale du modèle.

La distinction entre produits fondamentaux et non fondamentaux est effectuée en SRF, 60 et suivantes; elle sera transcrite ici dans les termes du symbolisme mathématique que nous sommes convenus d'adopter.

A cette fin, supposons qu'un certain nombre m de marchandises de notre système soient non fondamentales. Nous avons évidemment :

$$m < k, \tag{1}$$

et nous pouvons poser, par commodité :

$$k = j + m \quad (j > 0). \tag{2}$$

En faisant appel à notre remarque formulée au paragraphe 2, nous pouvons toujours imaginer d'avoir réordonné les lignes des matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ (et par conséquent aussi les éléments du vecteur $\boldsymbol{p}$) de manière à ce que les marchandises dont nous nous occupons correspondent aux m dernières lignes de ces matrices.

Pour plus de clarté, après ce nouvel arrangement, nous pouvons considérer que la matrice $\boldsymbol{A}$ et la matrice $\boldsymbol{B}$ sont obtenues par accolement de deux matrices chacune, que nous désignerons par $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$ et $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{B}''$ respectivement. Les matrices $\boldsymbol{A}'$ et $\boldsymbol{B}'$ sont rectangulaires d'ordre (j, k); les matrices $\boldsymbol{A}''$ et $\boldsymbol{B}''$ sont également rectangulaires mais d'ordre (m, k). Nous écrirons donc :

(3) $$A = \left[\begin{array}{c} A' \\ \hline A'' \end{array}\right] \quad ; \qquad B = \left[\begin{array}{c} B' \\ \hline B'' \end{array}\right]$$

A l'aide des matrices A'' et B'', on construit à présent une matrice D d'ordre (2m, k) en accolant les deux matrices A'' et B''. Posons donc :

(4) $$D = \left[\begin{array}{c} A'' \\ \hline B'' \end{array}\right]$$

Selon P. Sraffa, si les m marchandises qui correspondent aux lignes des matrices A'' et B'' sont non fondamentales, la matrice D est de rang m.

En d'autres termes, cela signifie que m colonnes seulement de la matrice D seront linéairement indépendantes et donc que toutes les autres peuvent être obtenues par des combinaisons linéaires de celles-ci.

En faisant une nouvelle fois appel à la remarque formulée au paragraphe 2, nous pouvons imaginer avoir réordonné les colonnes des matrices A et B (et donc également les éléments du vecteur q) de façon à ce que les m colonnes qui forment une base pour les colonnes de la matrice D soient les dernières eolonnes de ces matrices.

La condition formulée par Piero Sraffa pour que les m marchandises qui correspondent aux m dernières lignes des matrices A et B soient non fondamentales après le nouvel arrangement que nous sommes supposés avoir effectué s'exprime de la manière suivante.

Imaginons les matrices A et B décomposées, chacune en quatre sous-matrices : A_{11}, A_{12}, A_{21} et A_{22} et, respectivement, B_{11}, B_{12}, B_{21} et B_{22}; les matrices A_{11} et B_{11} sont carrées d'ordre j; les matrices A_{22} et B_{22} sont aussi carrées mais d'ordre m. Nous aurons donc :

(5) $$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad ; \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

Les marchandises correspondant aux m dernières lignes des deux matrices A et B sont non fondamentales, au sens de P. Sraffa, s'il existe une matrice H de type (m, j) telle que l'on ait :

(6) $$A_{21} = A_{22} H \ ; \ B_{21} = B_{22} H.$$

La matrice H est la matrice formée par les cœfficients des combinaisons linéaires par lesquelles les j premières colonnes des matrices A'' et B'' (après, bien entendu, le nouvel arrangement mentionné ci-dessus) s'expriment au moyen des m dernières.

Nous pouvons donc construire la matrice M, carrée d'ordre k, de la manière suivante :

(7) $$M = \left[\begin{array}{c|c} I_j & O \\ \hline -H & I_m \end{array}\right]$$

où I_j et I_m sont les matrices unité d'ordre j et m respectivement. De (6) nous déduisons aisément que les matrices

$$\bar{A} = AM\,;\ \bar{B} = BM \tag{8}$$

ont la forme suivante :

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right];\quad \bar{B} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{B}_{11} & B_{12} \\ \hline O & B_{22} \end{array}\right] \tag{9}$$

où, en particulier :

$$\bar{A}_{11} = A_{11} - A_{12}H\ ;\qquad \bar{B}_{11} = B_{11} - B_{12}H \tag{10}$$

Nous pouvons alors distinguer dans le vecteur $\boldsymbol{q}$ l'ensemble $\boldsymbol{q}^1$ formé des j premières composantes, de l'ensemble $\boldsymbol{q}^2$ constitué des m dernières :

$$\boldsymbol{q} = [\,\boldsymbol{q}^1 \mid \boldsymbol{q}^2\,]. \tag{11}$$

Posons alors :

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}M\ ; \tag{12}$$

on aura :

$$\bar{\boldsymbol{q}} = [\,\bar{\boldsymbol{q}}^1 \mid \boldsymbol{q}^2\,] \tag{13}$$

où :

$$\bar{\boldsymbol{q}}^1 = \boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^2\, H. \tag{14}$$

Nous pouvons considérer de la même façon le vecteur des prix $\boldsymbol{p}$ comme composé de deux ensembles de j et m composantes respectivement :

$$\boldsymbol{p} = [\,\boldsymbol{p}^1,\ \boldsymbol{p}^2\,] \tag{15}$$

On peut enfin imaginer avoir multiplié les deux membres de l'équation fondamentale du modèle

$$\boldsymbol{p}A(1+r) + w\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}B \tag{16}$$

par la matrice M, à droite.

Une fois les partitions et la multiplication à droite par la matrice M effectuées, l'équation (16) peut être remplacée par le système suivant, de deux équations :

$$(17) \quad \boldsymbol{p}^1 \bar{A}_{11} (1+r) + w \bar{\boldsymbol{q}}^1 = \boldsymbol{p}^1 \bar{B}_{11}$$

$$(18) \quad \boldsymbol{p}^1 A_{12} (1+r) + \boldsymbol{p}^2 A_{22}(1+r) + w \boldsymbol{q}^2 = \boldsymbol{p}^1 \bar{B}_{11} + \boldsymbol{p}^2 B_{22}$$

L'équation vectorielle (17) exprime le système d'équations écrit en SRF, 64. Remarquons toutefois que ce système ne doit pas être considéré comme équivalent à celui qu'exprime l'équation vectorielle fondamentale (16), tout au moins si l'on veut conserver au terme «équivalent» la signification qu'il revêt dans la théorie des sytèmes d'équations linéaires. Qu'il suffise d'observer que le système exprimé par l'équation (17) possède un nombre d'équations et un nombre d'inconnues différents (et moins important) que le système exprimé par l'équation (16).

En toute rigueur, seul le système formé par le couple d'équations (17-18) est équivalent à l'équation (16), en ce sens que toute solution de l'équation (16) est aussi solution du couple d'équations (17-18) et, inversement, toute solution du système d'équations (17-18) est aussi solution de l'équation (16). Toutefois, nous pouvons remarquer que le système d'équations (17) et(18) peut être résolu dans l'ordre dans lequel les équations ont été écrites; en effet, l'équation (17) ne comprend que le vecteur $\boldsymbol{p}^1$ dont les composantes sont les prix des marchandises fondamentales; une fois ces prix déterminés, il est possible de résoudre également l'équation (18) en déterminant les prix des autres marchandises lorsque, bien entendu, les conditions qui assurent l'existence de solutions sont satisfaites. Nous pouvons formuler à propos de l'équation (17) des observations analogues à celles qui ont été faites à propos de l'équation fondamentale (16), dans le cas où tous les produits étaient fondamentaux. En effet, il n'est pas dit que tout vecteur $\bar{\boldsymbol{q}}^1$ mène à un vecteur des prix solution $\boldsymbol{p}^1$ dont les composantes soient toutes positives. Il faudrait pour cela formuler des hypothèses analogues à l'hypothèse UA4 énoncée ci-dessus, à la fin du paragraphe 4. Toutefois, remarquons enfin que, dans le cas de l'équation vectorielle (17), le vecteur $\bar{\boldsymbol{q}}^1$ qui y apparaît et qui est donné par l'équation (14) peut ne pas avoir de composantes positives. P. Sraffa a bien donné une interprétation du fait que, pour la construction du produit-étalon, et pour mettre en évidence le fait que certains produits ne sont pas fondamentaux, on pouvait concevoir une combinaison linéaire des branches à l'aide de cœfficients qui ne soient pas tous positifs (voir les arguments en SRF, 59); mais il ne semble pas qu'il se soit préoccupé de donner une interprétation des quantités négatives de travail appliquées à des branches. Cette introduction reste à justifier ou à interpréter; nous abandonnons volontiers cette tâche aux économistes.

La construction du produit-étalon dans le cas de l'équation (17) doit être effectuée selon un procédé que nous avons déjà examiné au paragraphe 5; on doit par conséquent s'assurer de la possibilité d'une telle construction à l'aide d'une hypothèse analogue à l'hypothèse UA5, puisque les seules hypothèses UA1, UA2, UA3 et UA4 ne suffisent pas à la garantir.