

La matematica chiave di lettura della realtà

di Carlo Felice Manara*

1 - Il titolo che abbiamo dato a questa lezione può sembrare un poco altisonante; ma a me pare giustificato dalle riflessioni che faremo sulla evoluzione del pensiero scientifico nella storia. Siamo infatti abituati a leggere e a sentire che il Rinascimento ha una importanza ed un significato fondamentali per la scienza modernamente intesa; ma ritengo che spesso i motivi di questa importanza non siano additati con sufficiente chiarezza: infatti, nelle esposizioni di storia del pensiero e dei suoi metodi, si insiste molto sulla adozione del metodo sperimentale e quindi sul valore del pensiero di Ruggero Bacon; ci si sofferma meno sul movimento di pensiero che ha condotto alla matematizzazione dello studio di moto dei corpi e, in generale, della meccanica e della fisica; movimento che ha condotto alla situazione di oggi, nella quale assistiamo ad una matematizzazione (attuale o tendenziale) di tutta la scienza della natura.

A mio parere, questa evoluzione è stata veramente uno dei momenti cruciali del cambiamento dei metodi della conoscenza scientifica; questa mia opinione è confortata dal pensiero di filosofia che ha meditato a fondo su questo periodo della storia del pensiero umano, e sul significato dei cambiamenti che sono avvenuti in quella occasione. Per esempio Maritain identifica il punto più importante e radicale della evoluzione del pensiero scientifico nel Rinascimento nel passaggio della scienza della natura, della tutela della metafisica (intesa come "scienza reatrix") a quella della matematica. Una opinione autorevole analoga a questa è stata anche espressa dalla Vanni Rovighi che ha indicato nella adozione del linguaggio matematico uno dei momenti più importanti della nascita della scienza modernamente intesa.

Nelle pagine che seguono cercherò di presentare il mio pensiero su questi

Da Galileo in poi il ruolo della matematica all'interno della scienza. Alcune riflessioni sull'evoluzione storica del pensiero scientifico per approfondire l'importanza di tale disciplina.

argomenti; il che ci condurrà anche a riflettere e meditare sulla natura e sul significato della matematica. Riflessione che non pare del tutto inutile, e che potrebbe estendere le sue conseguenze anche sui problemi della didattica di questa dottrina nelle scuole.

2 - Quando si parla dell'argomento che forma l'oggetto della nostra attenzione è quasi d'obbligo riportare il pensiero di Galileo: così faremo anche noi in questa occasione, ricordando il celebre passo del dialogo "Il saggiaiore", nel quale il famoso pisano dichiara che il gran libro dell'universo che continuamente ci sta aperto davanti agli occhi, è scritto in caratteri matematici; e che la possibilità di lettura di questo libro richiede perentoriamente la conoscenza della lingua nella quale esso è scritto.

Credo che il pensiero galileiano abbia una importanza fondamentale nell'ordine di idee che stiamo presentando: esso infatti esprime con estrema chiarezza l'evoluzione del pensiero scientifico, evoluzione dovuta all'opera geniale dello stesso Galileo: si trova infatti, in Galileo, la proclamazione dell'emancipazione della scienza della natura, della metafisica e dei suoi metodi, e si indica la necessità di trovare altrove e precisamente nella matematica, gli strumenti per rappresentare ed esprimere quella realtà materiale

che l'osservazione e l'esperimento nascondono sotto i nostri occhi.

Pertanto non è soltanto il metodo sperimentale che apre il nuovo metodo scientifico, ma è più propriamente l'adozione di una nuova sistemazione di concetti e di un nuovo linguaggio quello che ci porterà alla conoscenza del mondo della natura.

Quindi il compito del ricercatore non sarà più quello di cercare l'essenza, di distinguere la sostanza dagli accidenti, ecc: questi concetti, tipici della metafisica imperante all'epoca galileiana, che erano vivamente ereditati dalla metafisica aristotelica e diffusi dalla scolastica ufficiale, non sono più considerati sufficienti per leggere nel reale e per approfondire la nostra conoscenza: occorre imparare ed adottare la lingua nella quale il reale è scritto.

Il successo della scienza, matematizzazione della natura, che ha coronato la profonda visione metodologica di Galileo, ha confermato quale fosse l'importanza del suo pensiero.

Per accettare questo punto di vista non è necessario - a nostro parere - adottare una visione pitagorizzante della realtà, e prendere alla lettera le espressioni galileiane, accettando che la realtà sia proprio scritta così pensiamo infatti che sia sufficiente riflettere sul significato e sulle proprietà del linguaggio, che noi adottiamo per progresso che la scienza ha vissuto dall'epoca di Galileo ai nostri giorni, senza spingerci a credere e a dire che la realtà stessa, in sé presa, sia effettivamente costituita da enti matematici.

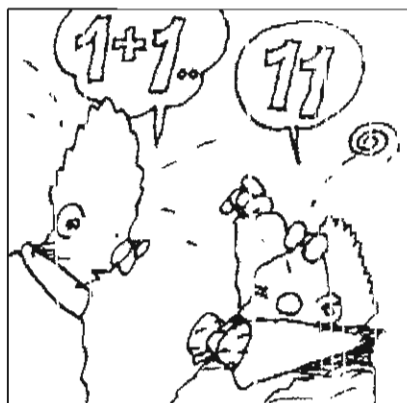
Nel seguito cercheremo di approfondire questo nostro punto di vista, quindi ci limiteremo ad osservare per ora che Galileo, nel passo citato, enumerò tra i caratteri in cui è scritto, secondo lui, il libro dell'universo, delle figure geometriche e non dei simboli algebrici.

Vorremmo spingere avanti questa

osservazione perché essa mostra la profondità del pensiero galileiano: oggi infatti noi parleremo di formule matematiche e non di figure geometriche; invece si potrebbe dire che Galileo era forse ancora sotto l'influenza della visione classicheggiante della matematica; visione secondo la quale la geometria costituiva uno degli strumenti principali della scienza matematica: quello che era stato adottato da Euclide nel suo trattato, e poi reso celebre da quella meravigliosa fioritura scientifica che è stata la geometria greca. In altre parole si potrebbe dire che Galileo non avesse valutato fino in fondo le possibilità del linguaggio algebrico, che stava sviluppandosi proprio nei secoli che videro la fioritura della nuova scienza. Ma aveva lo stesso intuito che quel linguaggio, riguardante gli aspetti quantitativi della realtà materiale, doveva diventare la lingua della conoscenza scientifica modernamente intesa.

Questa osservazione ci offre il destro per osservare ulteriormente che anche per la mentalità greca la geometria poteva essere ritenuta come un linguaggio nel quale esprimere e conoscere la realtà; in altre parole, ci pare lecito pensare che per i Greci la geometria potesse essere il primo capitolo della fisica come ha detto argutamente una grande matematico. Il primo capitolo cioè di una conoscenza che richiede una idealizzazione ed una astrazione come quelle che ci conducono dalle sensazioni alla costruzione delle figure e degli enti della geometria; ma soprattutto una conoscenza che possiede un aspetto radicalmente deduttivo; aspetto che fonda la conoscenza motivata e spiegata come dovrebbe essere la conoscenza scientifica.

Il progresso della matematica e l'introduzione di nuovi metodi di questa scienza dovevano fornire alla scienza ulteriori strumenti per le procedure



fondamentali che ne costituiscono l'essenza; ma resta sempre vero che l'intuizione del grande pisano gli ha permesso di prevedere quale fosse il cammino futuro del pensiero umano.

3 - Per poter sviluppare ulteriormente il nostro pensiero crediamo utile soffermarci un poco sulle procedure fondamentali che portano l'uomo a costruire un pensiero da potersi chiamare scientifico. Riteniamo infatti che una riflessione in questo ordine di idee, anche sommaria e rudimentale, sia utile per poter giustificare gli sviluppi che seguono e per poter comprendere il significato di certe tesi che cercheremo di esporre.

Ci pare di poter dire che è necessario anzitutto distinguere tra conoscenza scientifica e puro accumulo di protocolli, o di fatti o di qualunque altro componente elementare che certa ingenua visione positivista voglia presentare come costruttivo della conoscenza umana. Noi riteniamo infatti che non basti l'informazione per costituire la conoscenza scientifica, ma che invece la differenza specifica costituiva di questa, sia la motivazione che la spiegazione: in una parola, la ricerca, anche iniziale o incoativa, delle cause delle cose che ci si manifestano con l'osservazione o con l'esperimento.

Per dire la stessa cosa con altre parole, potremmo esprimerci dicendo che il cammino di ogni scienza ci porta a dire: "la realtà si manifesta a noi secondo queste modalità perché è fatta, è costruita così e così".

Ricordiamo, come esempio, la celebre "Guerra di Marte" che G. Keplero descrive, parlando della scoperta delle leggi che reggono il moto di questo pianeta attorno a Sole. Anche in questo caso la procedura è stata analoga alla precedente: Keplero ha enunciato varie ipotesi, ha dedotto le conseguenze, ed ha conformato tali conseguenze con i dati dell'osservazione. Le ipotesi riguardavano la forma della traiettoria descritta da Marte attorno al Sole; prima enunciò ipotesi che la traiettoria fosse circolare, ed il Sole fosse il suo centro; poi enunciò l'ipotesi che la traiettoria fosse un'ellisse, e che il Sole occupasse il suo centro; infine enunciò l'ipotesi che la traiettoria fosse un'eclisse e che il sole occupasse uno dei fuochi. Le operazioni logiche per dedurre le conseguenze dalle ipotesi enunciate si concretarono in calcoli lunghi e faticosi: il confronto delle conseguenze otte-

nute con il calcolo e le osservazioni veniva fatto utilizzando i dati già osservati da Tycho Brahe.

4 - Non vorrei dilungarmi nella descrizione delle procedure fondamentali che permettono la costruzione di una spiegazione razionale dei fenomeni che noi osserviamo, che talvolta riproduciamo; abbiamo osservato che in questa costruzione vi è un momento deduttivo che non si può eliminare perché le ipotesi con le quali noi cercheremo di spiegare i fenomeni riguardano la costituzione intima della realtà, può essere realizzata soltanto sulle conseguenze che si traggono dalle ipotesi formulate. Si tratta di un'osservazione che può apparire molto banale, ma che spiega anche molte vicende dell'evoluzione del pensiero scientifico. Può accadere infatti che da ipotesi false si possano trarre delle conclusioni vere: questo fatto era conosciuto anche dalla logica antica ("ex falso sequitur quodlibet"). Pertanto il fatto che le conclusioni che si traggono da una certa ipotesi sono confermate dalla realtà non segue per nulla che le ipotesi formulate siano valide. Questa certezza non può esserci data dalla procedura che necessariamente seguiamo: la certezza si avrebbe soltanto nel caso in cui l'osservazione smentisse le conseguenze delle ipotesi. Ma se le conseguenze sono confermate dalla realtà possiamo soltanto concludere che le ipotesi possono essere vere.

Questa circostanza ha condotto qualche filosofo della scienza a tentare di definire quest'ultima come "pensiero falsificabile"; io preferisco guardare all'aspetto positivo della ricerca della verità, e quindi parlare di pensiero che cerca la certezza attraverso la spiegazione. Il fatto che le ipotesi che noi formuliamo possano essere smentite, e che di conseguenza occorre spesso ricominciare la ricerca con nuove osservazioni, e con la formulazione di nuove ipotesi, e con nuove deduzioni è soltanto la conseguenza del fatto che non abbiamo altro modo per giungere ad una spiegazione di ciò che osserviamo.

Gli esempi si potrebbero moltiplicare e sempre metterebbero in evidenza una circostanza che a me pare fondamentale: il fatto che il passaggio dalle ipotesi che si formulano alle conseguenze che si possono controllare con l'osservazione o con l'esperimento richiede necessariamente una deduzione. Questa può essere condotta a ter-

mine con l'applicazione delle regole dalla logica tradizionale, oppure può essere un calcolo, o un insieme di trasformazioni di formule matematiche. Ma in ogni caso si tratta di un'operazione che non si riduce alla osservazione o ad un rilevamento di puri fatti: è sempre, in ogni caso, un'operazione mentale ed astratta. Pare a me che non si possa fare a meno di un'operazione cosiffatta, se si vuole superare lo stadio della pura raccolta di dati, della pura osservazione per giungere alla motivazione, alla spiegazione, a una visione razionale d'insieme, che stabilisca delle gerarchie causali, e spieghi ciò che si rileva in base alla sua costituzione intima cioè in base a ciò che la filosofia scolastica chiamava in termine tecnico la natura delle cose che si vogliono conoscere con certezza.

5 - L'impiego del linguaggio matematico conferisce delle caratteristiche particolari a questa procedura di ricerca, che segna la vicenda della conoscenza scientifica umana. Per comprendere più a fondo queste caratteristiche possiamo osservare anzitutto che l'impiego del linguaggio matematico permette di rappresentare le nostre osservazioni in modo molto più chiaro, certo e sicuro di quanto non si possa fare con il linguaggio comune. A titolo di esempio, pensiamo a ciò che avviene quando cerchiamo di rappresentare e di comunicare la numerosità degli elementi o un insieme: il linguaggio comune conosce soltanto gli aggettivi "molti" oppure "pochi", con i loro accrescitivi; il che conferisce una notevole imprecisione ai concetti, perché questi aggettivi traducono necessariamente dei giudizi soggettivi; si pensi ad esempio a ciò che avviene con le notizie giornalistiche, a proposito delle adunate politiche. A seconda del colore politico di chi scrive, il giudizio sul numero dei partecipanti può variare di molto; le parole con cui tale giudizio si esprime possono permettere una comunicazione che è sostanzialmente di carattere qualitativo; ovviamente del tutto diversa, è la comunicazione dell'informazione quando si faccia ricorso al numero.

Analoghe considerazioni si possono fare quando si vogliono dare delle informazioni riguardanti le grandezze: il che avviene con molta frequenza, nella pratica, nella tecnica e soprattutto nella scienza. Pertanto l'impiego del linguaggio matematico permette una

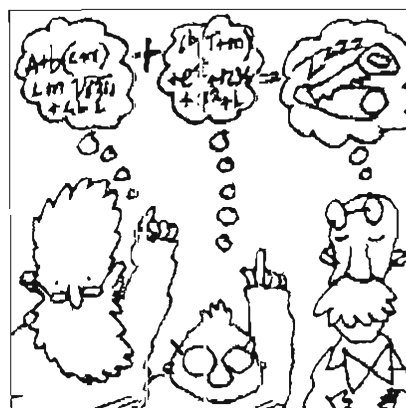
rappresentazione della realtà materiale che è in generale molto più precisa, chiara e sicura di ogni comunicazione che venga fatta utilizzando il linguaggio comune.

Ma non è soltanto questa circostanza che dà alla matematica un vantaggio grandissimo nei riguardi del linguaggio ordinario; invero essa si accompagna ad un'altra circostanza di importanza fondamentale; infatti la matematica permette di dedurre, di inferire, di prevedere i risultati della operazioni che noi eseguiamo sulla realtà materiale, ed in questo ordine di idee essa si presenta come un potentissimo strumento di logica deduttiva.

Si pensi ad esempio a ciò che avviene quando si prendano in considerazione due insiemi finiti che non abbiano elementi in comune; è noto che si può eseguire l'operazione di riunione dei due insiemi, costruendo un terzo insieme che ha come elementi, quelli appartenenti all'uno oppure all'altro dei due considerati. Orbene è noto che il numero degli elementi di questo terzo insieme si ottiene facendo la somma dei due numeri ognuno dei quali rappresenta uno dei due insiemi. Pertanto questa operazione di somma, eseguita sui due concetti corrispondenti ai due insiemi ci informa con insuperabile certezza su quello che potrebbe essere il risultato del conteggio degli elementi dell'insieme unione.

Si potrebbe dir ciò che precede con altre parole osservando che lo strumento matematico, utilizzato secondo le proprie leggi, permette di conoscere i risultati delle operazioni e delle manipolazioni che noi eseguiamo sulla realtà materiale, osservando le leggi proprie di questa realtà.

Le osservazioni che abbiamo fatto nel caso elementare della riunione di due insiemi finiti possono essere ampliate ed applicate a moltissimi casi, che interessano la pratica e la scienza. Per esempio i teoremi della geometria elementare, che conducono a definire l'area di un poligono piano convesso, si traducono nelle operazioni su numeri, che forniscono le misure dei lati e degli angoli del poligono stesso: conoscendo le misure di certi elementi del poligono, sufficienti a determinarlo, è possibile calcolarne l'area: pertanto il linguaggio matematico ci permette di prevedere il risultato di eventuali operazioni concrete di misura dell'area, senza eseguire tali operazioni. Gli esempi potrebbero essere moltiplicati,



facendo appello ai campi più disparati della scienza e della tecnica, ovunque si possa applicare il concetto di grandezza (fisica o geometrica) e si possa quindi rappresentare una grandezza mediante numeri; come è ovvio, tale rappresentazione si ottiene mediante operazioni concrete, diverse a seconda delle grandezze che si considerano, operazioni che danno luogo a numeri.

6 - La rappresentazione della realtà mediante l'operazione di misura ci appare quasi naturale; essa infatti è stata da noi incontrata in casi molto elementari, che abbiamo imparato a conoscere ed a dominare fin dai primi anni della scuola. Tuttavia si può osservare che l'operazione di misura non è la sola che si possa escogitare per rappresentare la realtà con linguaggio matematico. Infatti questo può essere impiegato anche per rappresentare altri oggetti ed altri enti, che non rientrano nella concezione classica ed elementare delle grandezze; ma anche per questi enti è possibile utilizzare il linguaggio matematico, e di conseguenza sfruttare anche le possibilità che questo offre per la formulazione delle leggi e la deduzione. Abbiamo in mente gli esempi che riguardano la rappresentazione del concetto di informazione e del concetto di probabilità; altri se ne potrebbero trarre dalle scienze dell'uomo, esempi che dimostrerebbero quanto sia ristretta la validità delle critiche, mosse da qualcuno alla utilizzazione del linguaggio matematico nella scienza: secondo tali critiche, questo linguaggio avrebbe un campo di applicazione limitato a quegli enti che sono "quantificabili"; e con questo termine si intende forse indicare quegli enti che possono essere inquadriati sotto il concetto comune di grandezza. Ma gli esempi che abbiamo addotto, mostrano che la fecondità e l'utilità della sua utiliz-

zazione sta nel fatto che la deduzione può essere fatta con l'applicazione delle regole di sintassi dei simboli che utilizzano; e non è detto che tali simboli siano sempre e soltanto dei numeri e quindi che la sintassi a cui si accenna sia sempre e soltanto l'insieme delle regole che reggono i numeri.

7 - Nelle pagine che precedono abbiamo visto che la matematica presenta in particolare due aspetti che la rendono molto utile: il primo è quello essere un linguaggio che permette una rappresentazione precisa della realtà; il secondo è quello di permettere una deduzione ineccepibile, come avviene con l'applicazione delle leggi sintattiche del linguaggio stesso.

In questo ordine di idee, ricordiamo ciò che ha scritto il grande matematico italiano Giuseppe Peano, affermando che "La matematica è una logica perfezionata"; invero la validità di questa affermazione è provata dalla esistenza della logica simbolica moderna. Questa dottrina, come è noto, ha costruito dei sistemi di simboli che permettono di rappresentare i concetti, i rapporti tra concetti e di ricondurre la deduzione ad un calcolo, cioè ad una applicazione delle leggi sintattiche che valgono per simboli adottati. In questo ordine di idee si potrebbe dire che la logica simbolica di oggi realizza quell'ideale di certezza e di chiarezza deduttiva che era stato vagheggiato da G.W. Leibniz; questo filosofo aveva augurato la costruzione di un linguaggio simbolico, il quale permettesse appunto di trasformare la deduzione in un calcolo; di modo che, secondo i suoi desideri, non ci sarebbero più state le dispute interminabili dei dotti, ma a due di questi, per decidere su una questione, sarebbe bastato sedersi ad un tavolo e dire "calulemus" cioè "calcoliamo" così come fanno i ragionieri. Forse Leibniz vedeva troppo roseo nel futuro della scienza ma resta il fatto che le scienze matematizzate hanno realizzato dei formidabili progressi dai suoi tempi.

Potremo cercare le ragioni di questo straordinario progresso della scienza matematizzata riflettendo su quella che abbiamo individuata come procedura fondamentale di ogni scienza, quando voglia raggiungere una conoscenza certa, motivata e spiegata nei suoi principi. Abbiamo infatti osservato che la spiegazione, fine ultimo di ogni conoscenza scientifica, viene ricer-

cata formulando delle ipotesi e verificandone le conseguenze; contenuti delle ipotesi non sono direttamente verificabili con l'osservazione e per giungere alle conseguenze occorre passare inevitabilmente per una procedura di deduzione. Ora ci pare chiaro che, quando si adotti il linguaggio della matematica la formulazione delle ipotesi si riduce nella maggior parte dei casi alla formulazione di relazioni quantitative tra le grandezze che vengono prese in considerazione, e la procedura di deduzione si riconosce al calcolo, cioè alla trasformazione delle relazioni formulate secondo le leggi della sintassi propria dei simboli matematici, per dare loro una forma che permetta la verifica sperimentale.

Ora abbiamo visto che l'adozione del linguaggio matematico per la rappresentazione della realtà permette quasi sempre una grande chiarezza e precisione; e la riduzione della deduzione al calcolo permette di rendere questa operazione ineccepibile, ripetibile e verificabile a volontà. A conferma della validità di ciò che diciamo, basti pensare al fatto che i moderni computer permettono di dare a questa operazione una sicurezza ed una velocità che erano impensabili soltanto qualche decennio fa.

A nostro parere, in questa circostanza risiedono le principali ragioni che giustificano il successo della matematizzazione della scienza.

8 - A conclusione di queste poche considerazioni sull'argomento che intendevamo trattare vorremo tuttavia aggiungere qualche osservazione, per renderci conto della reale validità delle procedure che oggi la scienza fisica adotta con tanto successo.

Una prima considerazione si fonda sul fatto che la rappresentazione della realtà mediante numeri, pur consentendo una grande precisione nei riguardi della rappresentazione puramente qualitativa che adotta il linguaggio comune, ha sempre tuttavia certi limiti, i quali non permettono mai di raggiungere una precisazione perfetta e, per così dire, finale ed assoluta. Analogamente, le verifiche che si eseguono sulle deduzioni delle ipotesi, cioè sui risultati dei calcoli, non permettono quasi mai una risposta definitiva, che autorizzi l'accettazione (almeno provvisoria) di certe ipotesi, oppure la loro confutazione irrevocabile.

Di conseguenza il cammino per la

costruzione di una teoria scientifica si fa sovente lungo e faticoso: infatti molto spesso quando i risultati dei calcoli non coincidono con quelli delle osservazioni, si cerca di non abbandonare le ipotesi formulate, ma di salvarle magari con lievi ritocchi.

È questa la procedura che è stata seguita da Keplero, per giungere alle leggi del moto dei pianeti; procedura che abbiamo descritto sopra (n. 3). Soltanto quando le smentite della verifica si fanno numerose e certe, e quando non è più possibile limitarsi a ritoccare le ipotesi si è costretti ad abbandonare le ipotesi formulate e ad escogitarne di completamente nuove. Questi cambiamenti danno luogo spesso a rivoluzioni profonde nel panorama della scienza, come è avvenuto per esempio con la formulazione dell'ipotesi della discontinuità dell'energia e della esistenza di un quanto di azione, oppure con la formulazione della teoria della relatività einsteiniana.

Si potrebbe quindi dire che le teorie fisico-matematiche sono portatrici di una specie di radicale provvisorietà, il che giustifica forse, almeno in parte, quella definizione della scienza come "pensiero falsificabile" di cui abbiamo detto sopra (n. 4). A nostro parere tuttavia ciò non giustificerebbe una posizione di totale scetticismo nei riguardi delle possibilità conoscitive della fisica: piuttosto confermerebbe la validità di quella affermazione di H. Poincaré, il quale osservava molto giustamente che non ha molto senso parlare di teorie fisico-matematiche vere oppure false, ma che occorrerebbe piuttosto parlare di teorie più o meno adeguate quando siano fissati gli scopi in vista dei quali le teorie sono costruite secondo gli ordini di approssimazione delle misure e delle osservazioni di conferma o di smentita delle ipotesi.

Tutto ciò permette di meditare sul significato e sul valore della nostra conoscenza scientifica: questa meditazione ci porterebbe molto lontano, ed invaderebbe anche il campo della epistemologia ed in generale della filosofia; pertanto ci arrestiamo qui, ricordando ciò che il grande Newton affermava dicendo che tutte le sue scoperte gli apparivano come un granello di sabbia di fronte alla maestà dell'universo. ■

* *Lezione tenuta ad un corso di perfezionamento in didattica della biologia presso l'Università degli Studi di Milano nell'anno accademico 1990/91.*