



fig. 2

iperbolica è stato costruito dal matematico italiano E. Beltrami nel suo *Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea* (« Giornale di Matematiche », 6, 1868). In questa sede ci limitiamo a richiamare brevemente quello di F. Klein (*Über die so-genannte nicht-Euklidische Geometrie*, « Mathematische Annalen », 4, 1871), rimandando a [1] per l'esame dettagliato dei principali modelli che sono stati successivamente elaborati. Sia Σ una circonferenza euclidea. Chiamiamo, per brevità, *I*-punti e *I*-rette i punti e le rette della geometria iperbolica. Interpretiamo gli *I*-punti nei punti euclidei interni a Σ e le *I*-rette nelle corde di Σ (estremi esclusi). Diciamo che un *I*-punto *P* appartiene a una *I*-retta *r* se e solo se il punto euclideo associato a *P* appartiene alla corda di Σ associata a *r*. In questa interpretazione la figura precedente assume l'aspetto di fig. 2.

Dati la *I*-retta *r* e l'*I*-punto *P*, le *I*-rette *m* e *n* sono le parallele iperboliche a *r* condotte da *P*. La *I*-retta *s*, che passa per *P* e non incontra *r*, è una delle iperparallele a *r* passanti per *P*. Si può provare rigorosamente che, interpretando in modo opportuno le relazioni di uguaglianza tra segmenti e angoli, tutti gli assiomi della geometria euclidea risultano veri nel modello. Quindi, se vi fosse una contraddizione nella geometria iperbolica, questa stessa contraddizione dovrebbe essere dimostrabile a proposito degli enti del modello ossia, in ultima analisi, sarebbe una contraddizione nella stessa geometria euclidea.

Con un analogo procedimento si può dimostrare la non contraddittorietà della geometria ellittica (basta interpretare i punti nelle coppie di punti diametralmente opposti di una sfera euclidea e le rette nei cerchi massimi della sfera).

Si sarebbe portati a ritenere che, con la scoperta dei modelli delle geometrie non euclidee, che mettevano sullo stesso piano logico le nuove geometrie con quella di Euclide, non si frapponesse più alcun ostacolo alla loro accettazione. In realtà, storicamente le cose non sono andate in questo modo, a testimoniare il fatto che alla base del rifiuto delle geometrie non euclidee non stava il solo problema logico della loro coerenza. Solo alla fine del secolo scorso, con l'evoluzione della concezione del metodo

assiomatico, alla quale apportarono importanti contributi i matematici italiani della scuola di Peano e che giunse a piena maturazione con D. Hilbert, le teorie matematiche sono state concepite come sistemi astratti, suscettibili di diverse interpretazioni, per cui il problema della coerenza ha assunto un ruolo centrale.

Per tornare al periodo che ha seguito la creazione delle geometrie non euclidee, occorre segnalare che, a partire dalla fine del settecento, si assistette ad una rinascita degli studi di geometria pura dopo che il calcolo infinitesimale, calamitando l'attenzione dei maggiori matematici, aveva relegato la geometria ad un ruolo secondario nelle ricerche più avanzate. Da un lato, la nascita della geometria descrittiva, ad opera di G. Monge (1746-1818), portò alla ripresa e allo sviluppo della *geometria proiettiva*; d'altra parte, i lavori di Gauss sulle proprietà intrinseche delle superfici diedero l'avvio agli studi di *geometria differenziale*.

Senza entrare nel merito delle questioni tecniche, ci basta segnalare che i modelli di Klein sono stati ottenuti nel primo filone di ricerche e quello di Beltrami nel secondo. In parole semplici, le geometrie non euclidee sono state inserite, senza la diretta influenza dei loro fondatori, in teorie geometriche più generali, e ciò ha favorito la loro piena accettazione, almeno da un punto di vista puramente matematico. Da un punto di vista epistemologico, invece, sono da menzionare i lavori di B. Riemann (1826-

1866) e di H. Helmholtz (1821-1894), del primo *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria), del 1854, ma pubblicato postumo nel 1867, e del secondo *Über die Tatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sui fatti che stanno alla base della geometria) del 1868, nei quali comincia a maturare la consapevolezza, fondamentale per la definitiva accettazione dei sistemi non euclidei, della distinzione tra la geometria intesa come disciplina puramente matematica e la geometria intesa come studio dello spazio fisico. Molte delle resistenze che le geometrie non euclidee hanno incontrato durante tutto il secolo scorso erano in effetti originate dalla mancata distinzione tra questi due diversi livelli. La piena accettazione delle nuove teorie geometriche si è avuta solo dopo il superamento delle obiezioni di tipo logico, di tipo matematico e, infine, di carattere filosofico.

Dario Palladino
Università di Genova

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. AGAZZI-D. PALLADINO, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Mondadori, Milano 1978.
- [2] R. BONOLA, *La geometria non-euclidea*, Zanichelli, Bologna 1906 (ristampa anastatica 1975).
- [3] N. I. LOBAČEVSKII, *Nuovi principi della geometria*, Boringhieri, Torino 1955.
- [4] L. MAGNANI (a cura di), *Le geometrie non euclidee*, Zanichelli, Bologna 1978.
- [5] P. PARRINI, *Fisica e geometria dall'ottocento a oggi*, Loescher, Torino 1979.

La generalizzazione del concetto di geometria

di Carlo Felice Manara

Sarebbe facile osservare che la dissoluzione del quadro tradizionale della geometria, avvenuta in gran parte nel secolo XIX, rientra in una crisi molto più vasta, che ha investito tutta la matematica ed ha portato questa scienza al suo assetto attuale. Tuttavia non ci è possibile qui inquadrare la evoluzione della geometria nell'ambito molto più vasto della evoluzione dell'intero universo della matematica del secolo XIX; pertanto ci limiteremo ad un sommario esame del fenomeno storico, e ad un tentativo di analisi della dottrina, varia e composita, che esso ha generato.

Per parte nostra pensiamo che non ci si debba stupire per il fatto che la dissoluzione della geometria tradizionale abbia dato origine ad una grande quantità di capitoli della scienza matematica, che appaiono anche molto distanti tra loro;

infatti, anche ad un esame frettoloso e sommario, la geometria tradizionale classica ci si presenta come un insieme di nozioni e di proposizioni che traggono la loro origine psicologica da esperienze e da estrapolazioni che hanno nature abbastanza diverse e distanti tra loro.

Senza volere approfondire l'argomento (che potrebbe forse portare ad interessanti conseguenze per la didattica), vorremmo ribadire che la nostra esperienza sul mondo che ci circonda è varia e composita; essa trae origine da sensazioni che afferiscono a sensi diversi ed a manipolazioni di varia natura sugli oggetti; pertanto non ci pare molto strano il fatto che una dottrina che si prefigga di razionalizzare queste esperienze e queste manipolazioni abbia delle radici intrecciate e ramificate.

Non può quindi stupire il fatto che il

processo evolutivo ed innovativo sia avvenuto in modo intricato ed abbastanza tumultuoso; il che rende difficile la sua disamina esauriente. In particolare diciamo subito che l'analisi che tenteremo della evoluzione della geometria non potrà riprodurre esattamente né la gerarchia logica delle innovazioni, né la loro precisa successione cronologica: si tratterà solo di uno sforzo per cercare un inizio di sistemazione in una situazione che appare di sua natura molto complessa.

Per l'analisi che abbiamo in vista ci pare sia utile ricordare alcuni atteggiamenti che caratterizzano la geometria classica e che, in certo modo, ne forniscono la genesi psicologica e ne fondano gli sviluppi. A nostro avviso, si potrebbero identificare tre punti dell'atteggiamento classico, che a noi appaiono importanti perché l'entrare in crisi di ognuno di loro ha dato origine ad un filone di ampliamento e di generalizzazione della idea di geometria: precisamente pensiamo che si possa ricordare in primo luogo l'accettazione del concetto di corpo rigido e di trasporto rigido come evidenti ed intuitivi; in secondo luogo la accettazione acritica della estrapolazione, a distanza comunque grande, della validità delle esperienze da noi eseguite sui corpi che ci circondano; infine la accettazione acritica del concetto di « continuo » e delle sue presunte proprietà.

Le tracce di questi atteggiamenti si incontrano ad ogni passo nella trattazione classica, perché le nozioni che venivano allora considerate come « evidenti » ispirano la impostazione dei problemi, la loro soluzione ed in generale tutta la struttura della teoria geometrica.

Ci pare chiaro infatti che la nozione di trasporto rigido sia alla base del concetto classico di uguaglianza delle figure geometriche.

In particolare ci pare chiaro che la idea del movimento rigido sia alla base del III postulato del I libro degli *Elementi* di Euclide; e che la idea del trasporto rigido e delle proprietà del continuo geometrico sia alla base, per esempio, delle proposizioni I e II dello stesso I libro, laddove è data come eseguibile e dotata di senso la operazione che consiste nella costruzione delle intersezioni di due circonferenze o di una circonferenza e di una retta per il suo centro.

Analogamente la concezione che considera la continuità come una proprietà fondamentale degli oggetti della geometria appare chiaramente fondata su una facile e comprensibile estrapolazione della esperienza sensibile; essa appare giustificata dalle concezioni della fisica del tempo ed anche dei secoli successivi ad Euclide, concezioni che accettavano il concetto di « materia continua » come un dato elementare e primario della esperienza, dato che pertanto, in quell'ordine di idee, non aveva bisogno di ulteriori precisazioni.

E del resto occorre ricordare che queste erano le idee che fondavano la concezione della fisica fino alla fine del secolo XVIII e forse anche oltre.

Infine vorremmo dire che la estrapolazione, ad una distanza qualunque, della validità dei risultati di una esperienza eseguita in una regione limitata dello spazio è alla base dell'enunciato del V postulato di Euclide.

Ci pare di poter dire che l'entrare in crisi di ognuno dei punti che abbiamo elencato poco fa ha portato in modo quasi naturale ad un cambiamento della struttura della geometria e ha dato origine ad un ampliamento dell'orizzonte di questa scienza, con accrescimento dei contenuti e, potenzialmente, dei metodi. In questa luce si potrebbe anche dire che la nascita e la maturazione della geometria non euclidea è soltanto uno degli episodi e dei momenti nei quali si è realizzata la rottura del quadro della geometria classica e la sistemazione più moderna di questa scienza; essa ha avuto un indubbio valore « scatenante » e perciò forse oggi ancora attrae molte attenzioni; ma forse il quadro è molto più complesso di quanto non appaia a chi guardi prevalentemente agli attori che sono al proscenio.

Nelle pagine seguenti la nostra esposizione seguirà in linea di massima l'ordine dei punti che abbiamo elencato, e precisamente cercherà di analizzare la progressiva estensione del concetto di geometria al cambiare ed al trasformarsi delle certezze sulle quali la geometria classica fondava implicitamente il proprio edificio ed i propri metodi e quindi la sua stessa esistenza.

Per svolgere il nostro discorso ci pare molto opportuno fondarci sulle idee direttive esposte da F. Klein nella sua celebre dissertazione, che viene attualmente richiamata con la espressione « Programma di Erlangen ». Pensiamo che la potenza unificante della impostazione kleiniana autorizzi il mancato rispetto del rigoroso ordine cronologico; avvalorando così la tesi secondo la quale frequentemente, nello sviluppo della scienza, le idee veramente profonde ed unificanti si presentano a conclusione di processi spesso lunghi, di sviluppi tumultuosi e di evoluzioni tortuose.

Seguendo lo schema esposto, vorremmo anzitutto analizzare gli sviluppi conseguenti all'ampliamento del gruppo delle trasformazioni geometriche e quindi alla crisi della geometria metrica tradizionale, fondata sulla accettazione acritica del concetto di trasporto rigido e di corpo rigido. Ci pare che il primo passo in questa direzione sia stato fatto con la invenzione della geometria proiettiva, e quindi con la accettazione del fatto che le figure geometriche possano essere trasformate anche per proiezione e non solo con movimenti rigidi o con similitudini che lasciano invariati gli angoli. È inutile ricordare la massa di risultati nuovi che sono venuti così ad accrescere il patrimonio della geometria; ma vale la pena di osservare che in questo modo anche i risultati già noti sono stati guardati in una luce del tutto nuova; tale è il caso delle proprietà delle coniche, le quali erano state classicamente definite come curve ottenute secondo il cono (o al limite il cilindro) rotondo, ed in questa nuova concezione sono viste

come curve ottenute per proiezione della circonferenza. E vorremmo ricordare che, nello spirito del metodo geniale introdotto da V. Poncelet, i nuovi risultati sono stati ottenuti proprio con una nuova « lettura » dei vecchi, lettura motivata dalla ricerca delle proprietà invarianti delle figure di fronte alle trasformazioni proiettive.

In questo ordine di idee si dovrebbero anzitutto ricordare le applicazioni della geometria proiettiva alla rappresentazione degli enti geometrici dello spazio ordinario, che hanno trovato la loro realizzazione nei vari metodi della geometria descrittiva.

Ma gli sviluppi più importanti — a nostro parere — lungo questa linea sono quelli che hanno portato, anche sotto lo stimolo della problematica collegata con la geometria analitica, all'algebra lineare, alla geometria proiettiva degli iperspazi, alle varie *geometrie-non*. A questo proposito ricordiamo come D. Hilbert, nella sua fondamentale opera dedicata ai fondamenti della geometria, abbia collegato le varie « geometrie-non » alle proprietà formali del calcolo dei segmenti, aprendo così la strada al collegamento tra lo studio delle strutture algebriche e le problematiche della geometria.

Ricordiamo ancora che l'adozione dei metodi della geometria analitica, il progresso dell'algebra e in particolare l'ampliamento degli insiemi numerici tradizionali hanno portato alla geometria algebrica, nel senso classico. Questa dottrina infatti può essere considerata come uno dei filoni di ricerca più interessanti tra quelli che trovano la loro origine nei metodi della geometria analitica e nell'ampliamento dei gruppi di trasformazioni delle figure.

Invero è facile osservare che buona parte delle relazioni geometriche che traducono le nozioni ed i problemi della geometria classica si esprimono con relazioni algebriche; e moltissimi luoghi geometrici che furono oggetto di studio per la geometria classica si rappresentano con equazioni algebriche nelle coordinate cartesiane.

Si spiega così come la teoria delle funzioni algebriche, cioè di quelle funzioni della variabile complessa che sono definite implicitamente da equazioni algebriche, sia presto diventata un capitolo importante dell'analisi complessa. A loro volta questi studi davano occasione ad altre ricerche di stile prettamente geometrico, perché le proprietà di una funzione complessa di variabile complessa non possono essere rappresentate nel modo intuitivo che era abituale alla geometria classica. Nello studio di queste funzioni vengono coinvolte delle proprietà di topologia delle varietà a due dimensioni, e precisamente di certe superfici che furono introdotte da B. Riemann e che in suo onore e ricordo vengono chiamate abitualmente « riemanniane » delle funzioni.

Altri studi, collegati con questi, davano origine alle teorie riguardanti funzioni trascendenti « nuove » rispetto a quelle conosciute da tempo, come le funzioni ellittiche e le funzioni theta; funzioni che permettono la parametrizzazione di

curve algebriche oppure la soluzione di problemi di inversione e di altri.

Sempre nello stesso ordine di idee, vorremmo ricordare anche tutta la grande quantità di ricerche riguardanti le strutture algebriche generali; argomenti che spesso vengono presentati con linguaggio geometrico proprio perché affondano le loro lontane radici nella geometria. Caso abbastanza tipico di ricerche cosiddette « geometrie finite », e quello delle geometrie costruite su corpi numerici diversi dal campo reale o dal campo complesso, che ne costituisce la più naturale estensione.

Vorremmo ricordare infine che anche gli oggetti noti e studiati fino dall'antichità, come per esempio i poliedri regolari, possono essere visti sotto una luce del tutto nuova quando si adotti la visione della geometria che è presentata dalle idee di Klein. Vorremmo per esempio ricordare che la impostazione che porta a concentrare l'attenzione più sulle operazioni che sulle cose in sé può condurre lontano, per esempio al classico collegamento tra i gruppi dei poliedri regolari e le questioni riguardanti la risoluzione algebrica delle equazioni, oppure alla analisi dei gruppi cristallografici del piano e dello spazio ed ai corrispondenti problemi di « pavimentazione ».

Abbiamo detto degli ampliamenti del concetto di geometria che in certo senso traggono la loro origine dall'ampliamento del gruppo di trasformazioni a cui pensiamo di poter sottoporre le figure e quindi al conseguente cambiamento delle proprietà prese in considerazione come invarianti per quel gruppo.

Tuttavia la crisi più clamorosa, e storicamente più importante, delle concezioni classiche è certo quella che ha la sua origine nella critica della ingenua estendibilità a distanza delle esperienze locali; e potremmo identificare in questa crisi, più o meno esplicitamente avvertita, la genesi della geometria non euclidea. Si può osservare infatti che il postulato euclideo della parallela non riguarda delle costruzioni, non afferma la possibilità di trasportare delle figure o di confrontare delle grandezze, ma si limita ad affermare la esistenza della intersezione di due rette complanari quando certe misure di angoli, eseguite in un ambito che è alla portata dell'osservatore, danno un certo risultato. Si tratta quindi di una estrapolazione del significato e della portata della esperienza locale e quindi, a posteriori, appare ben naturale che esso sia stato fatto oggetto di critiche.

Può essere interessante guardare sotto questa luce la dimostrazione del V postulato euclideo data nel XVII secolo da J. Wallis; come è noto, questa dimostrazione si fonda sulla accettazione del postulato della esistenza di una figura simile ad una figura data (in particolare ad un triangolo dato) e *comunque grande*. Appare chiaro — a nostro parere — come la enunciazione di un postulato cosiddetto si fondi su un atteggiamento psicologico che accetta come evidente la uniformità della esperienza geometrica, e la liceità della sua estrapolazione, da

un ambito accessibile alla nostra esperienza, a distanze comunque grandi.

Come è noto, la crisi delle certezze, presunte « intuitive », che stava alla base della formulazione del V postulato, ha avuto la sua manifestazione più clamorosa nella nascita delle geometrie non euclidee; ma le sue conseguenze hanno avuto una portata molto più vasta, soprattutto grazie all'apporto dei procedimenti della geometria differenziale, intesa come insieme di metodi che utilizzano l'analisi matematica ed i suoi strumenti per studiare gli oggetti della geometria. Si potrebbe dire che questi sviluppi hanno il loro punto di partenza nella generalizzazione del concetto di coordinate, e trovano il loro sbocco principale nella impostazione rivoluzionaria che B. Riemann diede dei fondamenti della geometria; e non va dimenticato che proprio con i metodi della geometria differenziale E. Beltrami diede un modello di geometria non euclidea di una varietà a due dimensioni, cioè diede un contributo determinante alla questione della compatibilità logica dei sistemi di postulati che fondano la geometria non euclidea iperbolica.

Dalla impostazione di Riemann discende tutta la serie di ricerche che hanno condotto alla moderna concezione della geometria come scienza che descrive in modo ragionevole e coerente le nostre esperienze sugli oggetti che ci circondano e che noi manipoliamo.

Sempre in questa linea di pensiero acquistata importanza fondamentale il concetto di « connessione »; questo potrebbe essere descritto in modo approssimato e sommario dicendo che la geometria, nel suo complesso, viene costruita « saldando » insieme varie faccette che rappresentano le esperienze locali dei vari osservatori.

Appare quindi del tutto naturale il fatto che questo insieme di concetti e di metodi abbia fornito gli strumenti per la formulazione della teoria della Relatività generale. Possiamo intravedere qui un interessante parallelismo tra questa visione della geometria e le concezioni moderne della fisica; e possiamo aggiungere che l'insieme degli strumenti del

calcolo tensoriale, inventati in origine per gli scopi della geometria, risponde in modo egregio a quella esigenza di ricerca della « obiettività » delle osservazioni e delle leggi che è uno degli scopi fondamentali della fisica.

Abbiamo accennato di sfuggita alla geometria analitica; vorremmo ritornare qui sull'argomento ricordando gli apporti che questo insieme di metodi ha fornito alla geometria. Ma vorremmo pure ricordare che, in senso per così dire opposto, anche la geometria ha fornito una grande quantità di stimoli e di problemi all'algebra ed all'analisi matematica. Invero, ci è già capitato di dire che il concetto di continuo geometrico è stato accettato dalla geometria come intuitivo ed evidente per secoli, ma possiamo aggiungere che questo concetto è risultato fondamentale per la costruzione del calcolo infinitesimale e che la fondazione rigorosa di questa dottrina matematica passa sostanzialmente attraverso la precisazione dell'idea di continuità.

La precisazione del concetto di continuo geometrico è avvenuta, come è noto, attraverso la formulazione, in vari modi e con vari atteggiamenti, di opportuni postulati, che hanno permesso di esprimere in modo rigoroso questa proprietà delle figure elementari della geometria classica; essa ha condotto i matematici alla rimediazione di un insieme di questioni di logica che sono strettamente collegate con la teoria degli insiemi e con la problematica dei fondamenti della matematica.

Nell'ambito dell'opera di precisazione dei concetti, prima accettati acriticamente perché ritenuti « evidenti », non vorremmo dimenticare l'apporto di G. Peano con la sua celebre « trovata » critica della « curva » che riempie un quadrato. Risultato che ha contribuito a stimolare un insieme molto fecondo di precisazioni e di formulazioni rigorose.

Vorremmo dire infine che in stretto collegamento con le questioni riguardanti l'analisi del concetto di continuità è anche la genesi di una dottrina che è oggi considerata una delle colonne portanti dell'edificio matematico: la topologia. Infatti uno degli aspetti iniziali di questa branca della matematica era quello di « geometria delle figure deformabili », ovvero di geometria che ha come gruppo fondamentale quello delle trasformazioni biunivoche e bicontinue; ed in questo ordine di idee essa si presentava come un ulteriore ampliamento delle geometrie conosciute, e quindi come la ricerca di proprietà invarianti delle figure che sono per così dire ad un livello più profondo di quello abituale, perché riconoscono la loro genesi psicologica in esperienze estremamente comuni ed elementari.

Abbiamo cercato di presentare il grande fenomeno storico che si è verificato con la dissoluzione del concetto classico di geometria guardando a quelli che ci sembrano i punti critici fondamentali; punti che — a nostro parere — mettono in evidenza il venire meno di certe certezze e di certi con-

Bernhard Riemann (Breselenz 1826 - Selasca 1866).



cetti, accettati per secoli come « evidenti » ed « intuitivi ». La Tav. 1, presentata nei « Materiali » a pag. 53, vorrebbe aiutare a seguire il nostro pensiero, e ad introdurre un certo ordine (ovviamente dal nostro punto di vista) in una situazione che a prima vista si presenta come multiforme e complessa.

Pensiamo di poter affermare che, come sempre, anche nel caso della geometria ogni crisi, dopo un certo sconvolgimento iniziale, è seguita da un periodo di riflessione e di assestamento che conduce ad una assimilazione vitale della crisi e diventa poi punto di partenza per chiarimenti, nuove sistemazioni e nuove scoperte.

Non intendiamo insistere in questo argomento, che tuttavia meriterebbe molta

attenzione; vogliamo soltanto ricordare che a nostro parere la geometria, nell'ambito della matematica, mette in essere l'apporto ineliminabile che la fantasia dà ad ogni attività razionale dell'uomo; attività che non può essere soltanto formalmente deduttiva, ma che deve essere necessariamente di creazione e di invenzione.

A nostro parere, in questo campo, ci pare essenziale l'apporto che la rappresentazione fantastica del mondo e delle nostre esperienze può dare alla conoscenza razionale e scientifica della realtà; e di conseguenza ci pare che la geometria, nei suoi vari aspetti, rimanga uno dei capitoli fondamentali della matematica.

Carlo Felice Manara
Università di Milano

Il significato epistemologico delle geometrie non euclidee

di Evandro Agazzi

La bimillennaria discussione sul postulato della parallela può essere considerata come una conseguenza e, nello stesso tempo, come una messa alla prova della concezione aristotelica di scienza dimostrativa perfetta. Se, infatti, « dimostrare » una proposizione significa ricavarla logicamente da altre già ammesse (premesse), è chiaro che, non potendosi risalire all'infinito nella ricerca di premesse, e non potendosi neppure richiudere in cerchio il ragionamento (assumendo come premesse le stesse proposizioni che si intendono dimostrare), è indispensabile che ogni dimostrazione muova da *proposizioni primitive*, non soltanto non dimostrate, ma addirittura indimostrabili. Con questa argomentazione, Aristotele codificava negli *Analitici Posteriori* la nozione di « metodo assiomatico » (gli *assiomi* essendo, per eccellenza, le proposizioni prime indimostrabili di ogni dimostrazione). Discutendo poi della nozione di sapere perfetto, tale cioè da meritare per davvero la qualifica di « scienza », Aristotele lo caratterizzava come quello che consta di proposizioni vere, fornite per di più della fondazione logica della loro verità, ottenuta mediante dimostrazione. Per quanto sopra chiarito, una scienza perfetta doveva presentarsi quindi come un sistema assiomatico di proposizioni vere, delle quali alcune dovevano essere vere e indimostrabili (ossia assolutamente vere o *vere di per sé*) e le altre vere in quanto dimostrate a partire dalle pri-

me (ossia vere in conseguenza di queste). Le proposizioni assolutamente vere venivano chiamate « assiomi » o « postulati » (i primi di validità molto generale, i secondi di validità specificamente ristretta alla scienza particolare in oggetto) e la loro scelta era legata ad una immediata « evidenza » della loro verità, risultante da un atto di « astrazione » di certe proprietà essenziali degli oggetti studiati.

Riassumendo il tutto, diremo che, secondo la concezione aristotelica, in una scienza perfetta ogni proposizione deve risultare *o evidente, o dimostrata*, la dimostrazione non essendo a sua volta altro che una *riduzione all'evidenza* (delle proposizioni primitive), ottenuta applicando alle proposizioni non evidenti i puri e semplici metodi della logica formale.

Gli « Elementi » di Euclide, proponendosi di essere una sistemazione assolutamente rigorosa delle conoscenze matematiche fondamentali, assai più che un'opera destinata alla presentazione di scoperte originali dell'autore, adottano in pieno, come è noto, la concezione aristotelica e organizzano l'intero sapere matematico « elementare » (ossia basilare) dell'epoca in modo che esso discenda per dimostrazione da un numero relativamente piccolo di assiomi e di postulati iniziali. Ma va anche detto che tale concezione aristotelica rimase intatta fino al secolo scorso, come sarebbe fa-

cilissimo documentare, e che proprio la costruzione delle geometrie non euclidee ne comportò una profonda, anche se non totale, revisione. Per affermare in modo esatto il senso di questa grande vicenda storica bisogna capire bene che ad una proposizione scientifica si richiedevano *due* requisiti: quello di essere intrinsecamente *vera*, e quello di essere garantita come tale in base all'*evidenza* o in base a una *dimostrazione*. Ora, come si è visto negli articoli precedenti, la verità del postulato euclideo della parallela non fu mai messa in dubbio, fino al secolo scorso, mentre già lo stesso Euclide nutriva perplessità circa la sua evidenza e, come a lui, tale evidenza apparve problematica a una nutrita schiera di matematici: per questo essi si sforzarono di darne una dimostrazione, cercando di « ridurlo » o agli altri postulati euclidei ritenuti per davvero evidenti, o a questi accresciuti di un nuovo postulato ritenuto evidente. Non è difficile rendersi conto che al di sotto di questo generale modo di pensare operava tacitamente una tesi filosofica assai impegnativa: *tutto ciò che è vero è anche o evidente o dimostrabile*.

Ma un ulteriore presupposto stava alla base di quello testé enunciato: ogni scienza, compresa la matematica, ha un *valore contenutistico*, ossia intende parlare di certi oggetti presenti nella realtà (solo a questa condizione, infatti, si può parlare di *verità* delle proposizioni, almeno secondo la concezione classica della verità come « adeguatezza » di ciò che si dice rispetto a ciò « attorno a cui » si dice). Perfino dopo la celebre « rivoluzione copernicana » di Kant, consistente nell'affermazione che, nel processo della conoscenza, non è il soggetto a regolarsi sugli oggetti, ma sono questi a regolarsi sul soggetto, questo aspetto contenutistico rimaneva intatto. Infatti anche per Kant non si ha conoscenza se non quando le forme pure dell'intelletto si applicano a « intuizioni » di provenienza extrasoggettiva e legate alla « reattività » dei nostri sensi. Pertanto, è facile sorridere della presunta pusillanimità del grande Gauss, quando in una lettera a Bessel scriveva di non voler pubblicare i suoi risultati di geometria non euclidea perché, data la loro anti-intuitività, temeva di suscitare « gli strilli dei Beoti ». Ma tale atteggiamento di compatimento deve scomparire non appena si legga, ad esempio in una lettera a W. Bolyai di trent'anni prima, che egli esitava a fidarsi di tali risultati perché essi avrebbero condotto a « porre in dubbio la verità della geometria », in quanto implicanti proprietà di cui lo spazio reale potrebbe benissimo non godere (si vedano i passi di queste, e di altre lettere nei « Materiali in inserto »). In altri termini, agli occhi di Gauss la pura coerenza logica non era garanzia sufficiente della verità, ossia dell'adeguatezza contenutistica, della geometria, che anche per lui, come per tutti i predecessori, continuava ad essere vista come la « scienza » delle proprietà dello spazio.

Con l'opera del Saccheri si realizza una prima importante « rivoluzione », che potremmo chiamare la « svolta logica »