Carlo Felice Manara*

GIUSEPPE PEANO ED I FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA

1 - Per inquadrare il pensiero di Peano sulla Geometria è forse utile ricordare, almeno per sommi capi, l'evoluzione di questa scienza nello scorso secolo. Sarebbe troppo lungo esporre minutamente tutti gli episodi che hanno accompagnato lo sviluppo della scienza geometrica nel secolo XIX, ma non posso evitare i ricordare i momenti più importanti, perché mi pare di poter dire che l'evoluzione della Geometria ha avuto una influenza fondamentale ed addirittura determinante sullo sviluppo dell'intera Matematica.

In questo ordine di idee, vorrei ricordare la costruzione delle Geometrie non-euclidee, che ha cambiato radicalmente l'atteggiamento della scienza nei riguardi del significato degli enunciati della Geometria, ed ha aperto la strada alla moderna concezione di questa scienza: essa non è più oggi considerata come una scienza qualificata dai suoi oggetti, o dai contenuti delle sue proposizioni, ma è vista come una dottrina specificata soprattutto dalle sue procedure. Questa evoluzione ha condotto alla concezione della Geometria come sistema ipotetico-deduttivo, concezione che distacca la Geometria dalla sua immagine classica, che la voleva fondata sulla evidenza di una esperienza esterna, il cui significato ed il cui valore erano stati contestati da molte parti. E del resto la fallacia della concezione classica era stata messa in evidenza dal fallimento dei secolari e vani tentativi per dimostrare la celebre proposizione euclidea delle parallele.

Come è noto, l'opera geometrica fondamentale di Bernhard Riemann è strettamente collegata con il problema della Geometria non-euclidea; ma oggi ci rendiamo conto del fatto che quest'opera ha iniziato un movimento di revisione dei fondamenti stessi sui

* Dipartimento di Matematica dell'Università di Milano. Via C.Saldini 50 - 20133 Milano

quali si basa le elaborazione teorica delle nostre esperienze spaziali.

2 - Ha parlato di Geometrie non-euclidee; ma va detto che la crisi determinata dalla invenzione di queste teorie è soltanto uno dei sintomi di una evoluzione profonda nella concezione della Geometria, evoluzione che ha le sue radici in epoche abbastanza lontane. A prova di queste affermazioni vorrei citare due episodi che ci sembrano importanti perché riguardano non soltanto la impostazione teorica della questione dei fondamenti, ma anche la didattica della Geometria. Il primo di tali episodi è costituito dalla pubblicazione del piccolo trattato intitolato "Elements de Géométrie" di Alexis-Claude Clairaut; il secondo è dato dal trattato, di Adrien-Marie Legendre intitolato "Géométrie".

Mi pare interessante citare queste due opere, perché ritengo che esse indichino l'esistenza di un movimento intellettuale di analisi dei fondamenti della scienza geometrica, movimento che aveva i suoi riflessi perfino nella didattica di tale scienza.

È noto che la prima opera citata (quella di Clairaut) è stata scritta per insegnare la Geometria ad una signora. La cosa che ci pare più interessante consiste nel fatto che quest'opera è diretta ad una persona che non è più in età scolare, e quindi non ha più la disponibilità di memoria e l' atteggiamento passivo dei soggetti in età infantile o adolescienziale; quindi l'autore si sforza di motivare le nozioni che presenta, e di collegarle con l'esperienza concreta del soggetto. In questa piccola opera troviamo quindi anche un esempio di insegnamento per problemi; esempio ignorato da molti pedagogisti, pronti a sbandierare idee che essi presentano come nuove, e che poi si rivelano vecchie da secoli.

Ma l'aspetto più interessante dell'opera di Clairaut sta nella opinione che egli esprime nella prefazione; opinione secondo la quale la esposizione classica della Geometria pecca di astrattezza, e non mette in evidenza l'aspetto pratico di questa scienza. La trattazione risente ovviamente di queste posizioni metodologiche iniziali, e quindi certe dimostrazioni fanno più appello all' immaginazione che alla logica, e non sempre con successo.

La seconda opera (quella di Legendre) è stata considerata in Francia come un classico della didattica della Matematica per vari decenni ed ha avuto moltissime edizioni; in essa si trova la nota definizione della retta tra due punti come "linea che ha la minima lunghezza" sulla quale ritorneremo. Inoltre, in alcune edizioni, vi si trovano due diversi tentativi di dimostrazione della proposizione euclidea delle parallele; ognuno di questi tentativi nasconde un postulato non espresso, oppure un paralogismo, dovuto forse ad una sbrigativa concezione dell'infinito ed ad una conseguente utilizzazione scorretta di questo concetto.

Per completare una visione, anche sommaria, dell'ambiente scientifico in cui maturò la ricerca di Peano sui fondamenti della Geometria, vorrei ricordare le memorie di Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz, il quale propose di impostare il problema dei fondamenti in modo del tutto diverso dalla tradizione secolare.

Manca qui lo spazio per presentare il pensiero di Helmholtz secondo i suoi meriti; mi limito quindi a ricordare ulteriormente che il fervore degli studi geometrici generò anche delle opere di sintesi e di analisi del metodo. Su quest'ultimo argomento ricordo il noto "Aperçu historique" di Michel Chasles; per quanto riguarda le opere di unificazione e di sintesi, mi limito a ricordare il "Programma di Erlangen" di Felix Klein.

Quest'ultima opera mi pare particolarmente notevole, perché, per la prima volta nella Storia della scienza geometrica, introduceva in Geometria certi concetti di Algebra (nella fattispecie il concetto di gruppo) che dovevano manifestare in seguito una straordinaria potenza e fecondità, come è provato dalla struttura della moderna Matematica.

3 - I momenti di crisi della Geometria, a cui ho accennato, si accompagnano, nel secolo scorso, anche ad episodi interessanti riguardanti la problematica della rappresentazione degli enti geometrici e delle loro relazioni, e la costruzione di certi simbolismi che surrogassero le procedure deduttive della Geometria euclidea classica o le procedure algebriche della Geometria analitica tradizionale. Mi pare di poter dire che gli episodi più significativi di queste tendenze sono rappresentati dalla invenzione di certi simbolismi di rappresentazione degli enti della Geometria che avessero, per così dire, una portata ed una presa immediata sugli enti che si rappresentano.

Si potrebbe infatti osservare che i metodi classici della Geometria analitica, come viene ancora oggi insegnata nei corsi universitari e nelle scuole dell'ordine medio, richiedono l'introduzione di certi enti che costituiscono il sistema di riferimento; tali enti costituiscono il sistema di convenzioni usato per rappresentare gli enti della Geometria e le loro relazioni; convenzioni scelte in modo che per la risoluzione dei problemi si possano applicare i metodi noti dell'Algebra e dell'Analisi matematica.

La presenza di questi sistemi di riferimento può essere giudicata dunque assolutamenete necessaria, addirittura perché si possa iniziare il procedimento di risoluzione dei problemi; tuttavia è facile osservare che molto spesso il riferimento ha ben poco a che vedere con i problemi considerati; infatti la scelta di un riferimento che renda facili e leggibili i calcoli e soprattutto i loro risultati rappresenta spesso un momento importantissimo e quasi decisivo per la soluzione di certi problemi.

Si potrebbe intravvedere il germe di questi movimenti intellettuali nelle idee di Joseph-Louis Lagrange, che, nei suoi lavori di Meccanica, diede cittadinanza a certe "coordinate" molte diverse dalle coordinate cartesiane classiche. Posizioni analoghe si incontrano in Karl Friedrich Gauss, il quale costruì dei sistemi di coordinate che sono pure degli ampliamenti dei sistemi classici.

Si potrebbe anche guardare alla costruzione dei vari sistemi di calcolo, come il calcolo vettoriale o il calcolo tensoriale, come allo sbocco quasi naturale di questi movimenti geometrici.

Si spiega così almeno in parte, la nascita di vari sistemi di notazione geometrica nel secolo XIX; ci limiteremo qui a ricordare sommariamente quelli che ci sembrano i più importanti, per ambientare il pensiero di Peano e la soluzione che egli diede dei problemi esistenti in questo campo.

A questo proposito vorrei ricordare anzitutto l'opera di Hermann Grassmann, intitolata "Ausdehnungslehre", e alla quale Peano fa esplicitamente riferimento nel suo "Calcolo geometrico". Manca qui lo spazio per un'analisi soddisfacente del pensiero dell'originalissimo matematico tedesco; mi limito a ricordare che egli tentò di risolvere il problema di rappresentare gli enti della Matematica con simboli originali, ed inventò per conto suo una tecnica di prodotto alterno per risolvere i sistemi di equazioni che egli scriveva in forma del tutto originale.

Come ho detto, si ritrova traccia del pensiero di Grassmann nel "Calcolo geometrico" di Peano, con le convenzioni di notazione e con la costruzione di quelli che egli chiama "prodotto progressivo" e "prodotto regressivo", che sono gli strumenti algoritmici di cui si serve per risolvere i problemi di Geometria elementare.

Ma non è soltanto nell'opera di Grassmann che si possono trovare i germi del pensiero di Peano a proposito della Geometria; infatti un altro autore al quale si possono far risalire i germi del pensiero geometrico peaniano è Moritz Pasch. Si potrebbe dire che Peano abbia tratto da Pasch l'idea di costruire la Geometria per così dire "dal piccolo", cioé abbandonando l'idea delle figure infinite in partenza (retta, piano, ecc.), per adottare invece l'idea della costruzione delle figure lineari.

4 - Queste correnti di pensiero matematico spiegano, almeno in parte, l'impostazione che Peano ha dato dei fondamenti della Geometria. Prima di dedicarmi all'analisi dell'opera peaniana, vorrei ricordare di passaggio l' influenza che essa ebbe sugli allievi e sulla trattatistica didattica dei decenni successivi a quelli in cui egli si occupò di questi problemi.

A proposito di queste questioni vorrei richiamare l'opera di Mario Pieri, che sviluppò le idee del maestro, con le memorie dedicate alla costruzione dei fondamenti della Geometria; l'influenza di Peano su questi lavori appare evidente dall'impiego del simbolismo logico che Peano stava creando; simbolismo la cui utilità era contestata in certi ambienti matematici italiani e stranieri suoi contemporanei. Credo che basti ricordare, a questo proposito, la polemica di Peano con Vito Volterra, polemica che vide tra i partigiani di Volterra diversi matematici dell'epoca; ed i giudizi di Henri Poincaré sui lavori di logica simbolica, ed in particolare su certe idee di Cesare Burali- Forti.

L'influenza del pensiero di Peano su Burali Forti appare chiara nei libri di Geometria metrico-proiettiva, che egli scrisse all'inizio del secolo; uno dei trattati è dedicato agli allievi della R. Accademia militare di Torino, e costituisce uno sviluppo delle idee, dei metodi e delle notazioni che Peano aveva introdotto nel suo "Calcolo geometrico".

In particolare l'influenza del pensiero di Peano su Burali Forti appare ancora più chiara nella definizione di vettore e di lunghezza di un segmento, che si incontra per esempio nella "Logica matematica".

Va detto tuttavia che il sistema di notazioni geometriche ispirato alle idee di Peano non ebbe la fortuna che invece arrise alle notazioni di logica, forse anche per merito di Bertrand Russell. Oltre alle opere di Burali Forti di cui abbiamo detto, per quanto si può ricordare, esso fu utilizzato da Ugo Cassina in una memoria, nella quale egli sviluppava i calcoli relativi ai problemi di Meccanica e di Geometria che avevano dato origine alla polemica di Peano con Volterra sulla soluzione del problema del moto dei poli.

5 - Vorrei dedicare la seconda parte di questo intervento all'analisi dell'assiomatica geometrica di Peano. Ma non intendo chiudere questa prima parte senza ricordare la celebre memoria, comparsa nei Mathematische Annalen del 1892 col titolo "Sur une courbe qui remplit toute une aire plane"; è superfluo ricordare qui il rumore suscitato da questa memoria nell'ambiente scientifico del tempo, e mi limiterò a dire che ancora oggi, nella letteratura matematica, vengono chiamate "curve di Peano" quelle che posseggono questa proprietà, al tempo giudicata inquietante, di non avere tangente in nessun punto, e di avere quella che oggi si chiama "dimensione frattale" diversa da 1, anzi uguale a 2.

Il minimo che si possa dire di questo celebre risultato è che esso costrinse i matematici a precisare con opportune ipotesi il significato e la portata degli strumenti teorici che essi adottano per rappresentare certi enti le cui proprietà erano considerate come "evidenti" nelle epoche precedenti.

Nel capitolo V del "Formulario mathematico" Peano presenta questa sua creazione con il linguaggio "Interlingua"di cui era inventore: noi traduciamo qui le sue frasi in italiano, perché l'Interlingua, come altre sue idee, non ha avuto fortuna. Scrive dunque Peano a questo proposito:

"Esistono dei complessi di ordine *n*, cioé dei punti dello spazio ad *n* dimensioni, che sono funzioni continue di una variabile reale, oppure del tempo, in modo tale che la traettoria del punto mobile riempie l'intero spazio. Cioé esiste una linea continua che passa per ogni punto del piano, ed esiste una linea che passa per ogni punto dello spazio ecc. Questo risultato ha qualche interesse nello studio dei principi della Geometria: infatti non esiste alcun carattere specifico che distingua la linea dalla superficie."

Si potrebbe dire che incominciava da questa memoria di Peano la discussione critica sul concetto di dimensione, discussione dalla quale sono nate tante ricerche di topologia, come anche le moderne invenzioni degli oggetti frattali.

Ad un livello più modesto, è stato osservato che le funzioni con le quali Peano rappresentava le coordinate del punto che percorre la curva passando per tutti i punti di un quadrato forniscono un esempio elementare e comodo di funzioni continue senza derivata per alcun valore della variabile indipendente.

L'assiomatica geometrica di Giuseppe Peano

1 - Abbiamo già accennato al "Calcolo geometrico", e non ci dilunghiamo su questo tema, che è tanto interessante da giustificare la esistenza, in questo nostro Convegno, di una relazione appositamente dedicata ad esso.(*)

Vorrei limitarmi ad osservare qui che in questo libro (di mole relativamente piccola, ma denso di idee) mi pare di poter vedere il germe di vari problemi dei quali Peano si occupò nel seguito e quasi sino alla fine della sua vita.

Tra questi problemi vorrei ricordare anzitutto quello, di cui ho detto, della creazione di un sistema di simboli atti a rappresentare in modo, per così dire, "diretto ed immediato", gli enti della Geometria e le loro relazioni; ed un secondo, ovviamente collegato al primo, di creare una sintassi di questi simboli, un'Algebra della logica, sulla scorta dei lavori di George Boole, in modo tale che la risoluzione dei problemi geometrici prendesse gli stessi caratteri di quella dei problemi algebrici: cioé si riducesse alla applicazione rigorosa delle regole di sintassi dei simboli scelti.

È noto che l'interesse di Peano per la Geometria non si limitò alla costruzione del calcolo geometrico. Vorrei soffermarmi qui ad analizzare gli atteggiamenti e le idee su cui Peano costruì la sua assiomatizzazione della Geometria e dei suoi fondamenti; idee che sono coerenti con tutta la sua concezione della Matematica e con il suo modo di vedere non soltanto questa scienza, ma tutto l'atteggiamento scientifico, quando voglia essere rigoroso.

Mi soffermerò in particolare su due lavori: uno è "I principi di geometria logicamente esposti" [Torino, 1991], il secondo è "Sui fondamenti della Geometria" [Rivista Matematica Vol.IV, 1894].

Non presenterò i singoli assiomi enunciati da Peano, e non analizzerò minutamente la costruzione teorica da lui messa in piedi;

questi assiomi saranno oggetto di un'altra relazione di questo Convegno. Io vorrei limitarmi a cercare di intravvedere i caratteri del pensiero di Peano, caratteri che egli dimostrò in tutto il suo lavoro scientifico.

2 - Volendo cercare di caratterizzare, anche in modo sommario e superficiale, le linee fondamentali del lavoro scientifico di Peano si potrebbe dire che la sua fu una ricerca costante della semplicità, della concretezza ed ovviamente del rigore.

Per quanto riguarda il rigore, si potrebbe dire che esso fu l'oggetto della sua opera fin dal suo affacciarsi alla scena della scienza internazionale. E questa sua ricerca del rigore diede luogo ai noti episodi riguardanti i rapporti con il suo maestro Angelo Genocchi, e sui quali non ritornerò. Ma interessante, per dipingere il carattere di Peano, è la sua definizione di rigore: esso consiste nel dire soltanto delle cose vere.

Ritengo di dover sottolineare quell'avverbio "soltanto", che si ricollega da una parte all'altro carattere del suo pensiero, e cioé alla ricerca della semplicità; e da un'altra parte si ricollega anche alla sua opera didattica, che mira a presentare i concetti matematici secondo la linea più diretta e più semplice.

Questa osservazione dovrebbe forse essere tenuta presente da coloro che scrivono oggi libri di testo e stendono i programmi di insegnamento. Ma non intendo iniziare qui un discorso che mi condurrebbe, temo, molto lontano e con scarsi risulati. La costante ricerca della concretezza da parte di Peano mi pare testimoniata anche dai numerosi lavori, suoi e di allievi, relativi al calcolo numerico. Mi sembra infatti che ciò denoti una preoccupazione costante di mettere in luce il significato concreto di ciò che si dice; ricerca che conduce ai numeri come agli strumenti di applicazione dei risultati della elaborazione teorica, alla realtà concreta, che si tocca, si osserva e si misura. Forse questo carattere della personalità di Peano e della sua opera, ha fondato la posizione da lui presa nei riguardi dell'opera di Giuseppe Veronese. Questa posizione condusse Peano a pronunciare una condanna definitiva, pesante e senza appello (ed espressa con parole dure) nei riguardi dell'opera di Veronese. A questo proposito si potrebbe osservare che l'opera di questo matematico è scritta in uno stile astratto e difficile, e coinvolge tutta una quantità di enti e di nozioni che hanno poco a che vedere con argomenti matematici.

È noto che la polemica tra Peano e Veronese ebbe per oggetto la costruzione del concetto di iperspazio e soprattutto la costruzione di una retta non-archimedea; è pure noto che la costruzione che Veronese fa di grandezze non-archimedee è stata giustificata da Tullio Levi Civita, con la costruzione di un sistema di concetti e di simboli (che egli chiamò "numeri monosemi"). Forse la disputa tra i due è nata da una certa concezione del continuo geometrico; ritornerò nel seguito su questi argomenti; qui ritorniamo all' analisi degli atteggiamenti di Peano nei riguardi della Geometria.

3 - Ho detto che non esporrò l'assiomatica di Peano, ma che cercherò, come sono capace, di cercare i fondamenti di essa nelle qualità della mentalità peaniana.

Una prima osservazione che si potrebbe fare riguarda le notazioni inventate da Peano; ho già parlato ripetutamente della importanza che attribuisco alla simbolizzazione dei concetti matematici; per questo ritengo che il sistema di notazioni che Peano ha inventato per la Geometria sia pure una manifestazione della sua mentalità: infatti nelle sue opere che ho citato egli mira, come al solito, alla massima semplicità ed alla essenzialità. Infatti, una volta che siano note le poche notazioni di logica che egli adotta, il resto viene presentato con formule prive di parentesi.

A questo proposito vorrei ripetere le considerazioni già esposte e in relazione alle notazioni che Peano ha proposto per la Geometria e per il calcolo geometrico; abbiamo visto che queste notazioni non hanno avuto la stessa fortuna che ha arriso alle notazioni di logica; i germi di queste ultime, spesso deformate e non correttamente usate, si incontrano ancora oggi nella trattatistica matematica (non parlo delle opere di logica): ricordo per esempio il simbolo di appartenenza di un elemento ad un insieme, simbolo che è stato inventato da Peano, il quale utilizzò la forma della lettera greca "epsilon" come iniziale della terza persona del tempo presente del verbo "essere"; simbolo che oggi si incontra nei libri di Matematica, ma deformato in veri modi, e naturalmente senza che nessuno si occupi di ricordare la sua origine, il suo significato iniziale, e colui che per primo lo introdusse.

4 - È noto che Peano costruisce le figure della Geometria elemen-

tare a partire dal punto e dal segmento; ed insisto sul termine "costruisce" per sottolineare l'attaccamento alla concretezza, che è presente in tutta l'opera di Peano, come ho già detto.

A questo proposito vorrei ricordare ciò che egli scrive nei "Fondamenti della Geometria": il passaggio si intitola "Sul concetto si spazio", e contiene le seguenti considerazioni:

"In quasi tutti i trattati italiano moderni si introduce per primo il concetto di "spazio", dicendo che esso non si definisce, ma gli si attribuiscono le proprietà di essere omogeneo, illimitato, infinito, divisibile, immobile ecc, proprietà queste parimenti non definite.

Ritenendo quindi il concetto di spazio come fondamentale per la geometria, ne viene che non si potrebbe scrivere un trattato di questa scienza in una lingua che per avventura manchi di tali parole. Quindi non si potrebbe scrivere di Geometria nella lingua d'Euclide ed Archimede, ove appunto manca la parola corrispondente al termine "spazio", nel senso in cui lo si usa negli odierni trattati.

In conseguenza una prima e notevole semplificazione si ottiene col sopprimere puramente e semplicemente il termine "spazio", gli aggettivi "omogeneo", "illimitato" e tutti i postulati che legano quel soggetto a questi attributi.

Questa osservazione sulla inutilità del termine "spazio", in Geometria, riuscirà strana agli autori che incominciano il loro libro col parlare dello spazio.

Però l'esempio di Euclide e di tanti altri che non ne parlano affatto è del tutto convincente, In seguito si vedrà meglio il perché della superfluità di questo termine."

Qui si manifesta in piena la acutezza della critica peaniana delle idee recepite tradizionalmente. Un altro esempio si può leggere a proposito del trattato di Legendre (di cui ho già detto); si trova nella Nota dal titolo "Sui fondamenti dell'analisi", pubblicata nel 1910 nel Bollettino della Mathesis.

" ... laureati, e liberi di studiare ciò che si vuole, e dovendo insegnare agli altri, ci accorgiamo di avere sui fondamenti della matematica, idee confuse. Quindi si cercano con avidità i libri che trattano di questi soggetti. Ogni anno se ne pubblicano dei nuovi, che gettano nuova luce sulle questioni controverse, ma anche nuova oscurità in quelle ritenute chiarissime. Valga un esempio.

Legendre introdusse quale definizione della retta, in sostituzione della euclidea, ritenuta poco chiara, la ben nota: "La retta è il più breve cammino tra due punti". Questa definizione appariva chiarissima ai tempi di Legendre, e parrà tale agli allievi che incominciano lo studio della Geometria. Invece è cosa nota a tutti che l'idea di "cammino", o "lunghezza" d'una linea, che comparisce nella definizione di retta, è molto più complicata dell'idea che si definisce; e i trattati di calcolo non sono ancora concordi nella definizione della lunghezza di una linea e nella teoria relativa. Quindi le definizione di Legendre, che esprime un'idea semplice mediante una più complicata si deve rifiutare; e così è fatto nei moderni trattati".

5 - Per quanto riguarda gli elementi iniziali della trattazione geometrica, si potrebbe rilevare una certa differenza tra i "Principi" e i "Fondamenti". Infatti nei "Principi" si incontra come primo postulato l'affermazione: "La classe "punto" non è nulla", ovvero "esistono dei punti".

Si potrebbe qui osservare che, nel momento in cui si costruisce una definizione implicita di certi enti, potrebbe accadere, in linea di principio, che il sistema di assiomi che si enunciano sia incompatibile, e quindi che sia vuoto l'insieme degli enti che lo realizzano; in altre parole che non esista un modello del sistema. In queste condizioni pare chiaro che la pura e semplice affermazione che esistono gli enti di cui si parla appare quanto meno di scarso valore. Del resto si direbbe che lo stesso Peano si sia reso conto di questo neo nella sua trattazione, perché nei commenti che egli scrive ai suoi assiomi si legge:

"Di questo assioma non avremo mai occasione di fare uso, e si potrebbe sopprimere".

La posizione dell'autore è lievemente cambiata nei "Fondamenti"; ivi l'assioma di esistenza è ripetuto tale quale, ma il suo commento è cambiato; infatti ivi si legge:

"Si può segnare un punto".

Questo commento si collega con ciò che si può leggere nelle pagine precedenti:

"Un trattato di Geometria — scrive Peano — potrebbe cominciare con parole come le seguenti:

"Il punto si segna dagli agrimensori, sul terreno, con una palina o con una pietra (termine). Sulla carta, sul legno, ... con un segno fatto con un corpo terminato in punta. In agrimensura si verifica che un punto c giace tra a e b, quando una persona, posta in a, vede che l'oggetto c copre b. Dai disegnatori, fabbri, per riconoscere questa relazione fra i tre punti si adopera lo strumento detto "rigo"; alcuna volta si usa una corda ben tesa..."

In queste righe si può riconoscere l'inesorabile richiamo alla concretezza ed all'esperienza che ispira tutta l'opera di Peano, e che gli detta il cammino da lui percorso per costruire razionalmente la Geometria. Il che del resto è confermato dalle parole che egli scrive nei "Fondamenti":

"E prima di abbandonare questo soggetto, sarà ancora utile un'osservazione sulla natura pratica, o sperimentale dei postulati. Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e lo sviluppare le conseguenze logiche contenute in quelle ipotesi. Ma affinché questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche."

Vorremmo tuttavia osservare che forse nella frase "Si può segnare un punto" di Peano c'è una eco della parola con cui Euclide indica il punto; sappiamo che tale parola è "semeion", che in italiano potrebbe essere tradotto con "segno".

Forse, se si facesse così, verrebbero evitate tutte le frasi che si possono leggere in certa trattatistica, nelle quali si invita il Lettore ad immaginare un corpicciolo piccolissimo, sempre più piccolo, per costruirsi l'immagine del punto; ma crediamo che il riferimento a corpi materiali (granellini di sabbia, piccole macchie d'inchiostro e simili) sia un poco fuorviante, perché il corpo materiale quasi spontaneamente è immaginato divisibile. Invece pare a noi che si possa dire che l'atto di identificare una posizione nei riguardi degli oggetti dell'ambiente conduca quasi spontaneamente a considerare e ad immaginare tale identificazione come indecomponibile ed irriducibile ad altri elementi. Non intendiamo proseguire in questa direzione, che tuttavia potrebbe anche condurre a certe posizioni di didattica, utili per semplificare certe esposizioni didattiche che sono forse troppo complicate, o poco rigorose, oppure addirittura hanno entrambe le qualità insieme.

Ma non intendiamo parlare ancora delle opere di didattica, opere che, come dice Peano ["Sui fondamenti dell'analisi"] "...ancora infestano le scuole"; infatti si può osservare che neppure lui ha avuto successo nel lavoro di disinfestazione, che noi lasciamo malinconicamente da parte qui.

6 - Non è possibile in questa sede rilevare tutta la originalità del lavoro di Peano a proposito della Geometria; dobbiamo quindi limitarci a ricordare qui un altro momento in cui la sua ricerca del rigore e della semplicità si manifesta in pieno. Intendiamo parlare delle proposizioni di Geometria elementare che richiedono l'enunciazione di postulati di esistenza. Nella trattatistica abituale, che voglia essere rigorosa, si suole enunciare un postulato di continuità con vari atteggiamenti; infatti i trattatisti scelgono l'enunciato di Wilhelm Richard Dedekind oppure quello di Georg Cantor a seconda dei gusti e delle premesse. Non sono a conoscenza di trattati di Geometria per le scuole medie che assumano l'atteggiamento adottato da David Hilbert nei suoi "Grundlagen der Geometrie".

La procedura seguita da Peano lo conduce anzitutto a definire il concetto di figura convessa ed a sviluppare le sue proprietà. Una volta in possesso di queste proposizioni, Peano enuncia il seguente Postulato [Principi - Assioma XVII]:

"Se h è una figura convessa, e se a e b sono punti, il primo appartenente ad h, il secondo no, allora si può determinare un punto x, appartenente al segmento ab o ai suoi estremi, in guisa che il segmento ax sia contenuto in h, e il segmento xb sia tutto fuori di h."

Ed a questo postulato aggiunge il commento:

"Questo assioma, che esprime la proprietà che suolsi chiamare la continuità della retta, è necessario in molte questioni".

Ed appoggiandosi a questo assioma egli dimostra le proprietà della relazione di parallelismo tra rette. Dove, si noti, la relazione di parallelismo è quella valida in "Pangeometria", come egli dice, cioé è stata definita senza far ricorso al postulato V di Euclide.

È appena necessario osservare che in questo modo Peano, come in altri moltissimi casi, segue la strada più semplice e sicura per giungere ai risultati che ha in mente.

7 - Vorrei chiudere queste brevi considerazioni ricordando l'assiomatica che Peano ha enunciato a proposito dei vettori. Egli si occupò di questa teoria nel lavoro intitolato "Analisi della teoria dei vettori" pubblicato negli "Atti della R. Accademia delle Scienze

di Torino [Vol. XXXIII, 1897-98]. Da questo lavoro egli trasse un'altra impostazione della Geometria elementare, che egli espose nella Nota intitolata "La Geometria basata sulle idee di punto e distanza" [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino - Vol XXXVIII, 1902-03].

Questi lavori fanno parte di un insieme di teorie che Peano ha sviluppato non soltanto in relazione ai problemi dei fondamenti della Geometria, ma anche in relazione a Problemi di Meccanica razionale. Dalle notazioni da lui create Peano si servì anche nella polemica che ebbe a proposito della questione del moto dei poli. Ma, ancora una volta, forse la scarsa fortuna delle sue notazioni in questo campo determinò anche la dimenticanza che colpì le sue idee e le sue argomentazioni.

(*) N.d.R. Presentiamo l'intervento cui Carlo Felice Manara si riferisce:

Paolo Freguglia. Il contributo di Giuseppe Peano e della sua Scuola al Calcolo Geometrico.

Paolo Freguglia*

IL CONTRIBUTO DI GIUSEPPE PEANO E DELLA SUA SCUOLA AL CALCOLO GEOMETRICO

§1 *Introduzione*

Hermann Grassmann (1809-1877) - come è noto - aveva pubblicato nel 1844 il volume *Die lineale Ausdehnungslehre*[1], inerente appunto la teoria lineare dell'estensione. Quest'opera, per la rilevante originalità dell'impostazione con cui fu scritta, ebbe una fredda accoglienza presso il mondo matematico tedesco. Né valse a migliorare le cose una versione più consona alla mentalità dei matematici realizzata nel 1862[2]. Bisognerà aspettare la fine degli anni sessanta, quando tematiche affini, come quelle sui quaternioni e sulle matrici si stavano ormai affermando, per vedere influenze dell'opera grassmanniana. Nonostante ciò, grazie ad una serie di articoli comparsi nel giornale di Crelle, qualche studioso più attento a tematiche geometriche notò gli studi di Grassmann. È il caso, per l'Italia, di Bellavitis (1859, 1860), ed ancor prima di B. Tortolini (1855)[3]. Fu poi soprattutto, sin dal 1860, Luigi Cremona[4] ad apprezzare particolarmente l'opera di Grassmann ed a contribuire non poco alla conoscenza di questa in Italia. Volendo fortemente sintetizzare, possiamo dire che Grassmann aveva proposto una teoria generale ed astratta delle *forme*, concependo quest'ultime come basi del pensiero matematico, indipendenti e concettualmente collocate prima della stessa geometria.

---

* Dipartimento di Matematica dell'Università di Siena. Via del Capitano, 15 - 53100 Siena

[1] H. Grassmann [1844]

[2] H. Grassmann [1862]

[3] U. Bottazzini [1985] p. 27

[4] L. Cremona [1860]; U. Bottazzini [1985] pp. 31-34.

Quando dal 1885 al 1887 Giuseppe Peano (1858-1932) sostituì, presso l'Università di Torino, Angelo Genocchi (1817-1889) nell'insegnamento delle "Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale", tenne ben presenti le questioni relative al calcolo geometrico. Cosicché quando pubblicò in un volume[5] le sue lezioni, gli autori che ebbe presenti furono Bellavitis, Möbius, Hamilton e Grassmann. In particolare privilegiò, in questa prima trattazione sull'argomento, il modo di esprimersi bellavitisiano, anche per una certa influenza che dovette subire da parte del Genocchi, il quale fu legato da sincera amicizia al Bellavitis[6]. Nel *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*[7], pubblicato nel 1888, Peano dimostra di essersi convinto decisamente all'impostazione grassmanniana. Va ricordato anche che Peano realizzò lavori di tipo algebrico geometrico tra 1881 e 1882, quando era assistente, prima di esserlo di Genocchi, di Enrico D'Ovidio (1842-1933). La geometria analitica in Italia a quel tempo risentiva positivamente delle influenze tedesche (tanto per citare Plüker, Hesse, Clebsch, Lindemann, Baltzer, Bobillier). Di notevole interesse è a tal proposito il trattato del 1896 di geometria analitica realizzato da D'Ovidio[8], dove si riscontrano, ampiamente esaminate , varie tematiche tipicamente geometrico analitiche con un uso metodico delle coordinate. Si riscontra peraltro l'impiego dell cosiddetta "notazione abbreviata"[9], della quale già nel 1828 Bobillier e Plüker mostrarono l'utilità, dal momento che "permette sovente di rendere più spediti i calcoli e più espressive le formule"[10]. Tramite questa notazione D'Ovidio dimostra, fra l'altro, il teorema di Desargues sui triangoli omologici nel caso piano. L'esigenza di un'utilizzazione della "notazione abbreviata" testimonia la tendenza verso una compattificazione del formalismo in geometria analitica che scaturirà in qualche modo nell'attuazione da un lato dei metodi proposti dai vettorialisti (Burali Forti e Marcolongo) e dall'altro delle tecniche di coloro che useranno l'algebra delle matrici.

[5]G. Peano [1887]
[6]Per l'epistolario Genocchi-Bellavitis si veda G. Canepa, P. Freguglia [1991]
[7]G. Peano [1888]
[8]E. D'Ovidio [1896]
[9]ibid. pp. 105-108
[10]ibid. p. 105

L'allievo di Peano che maggiormente si dedicò agli studi sul calcolo geometrico fu Cesare Burali Forti (1861-1931); ma anche F. Castellano (1860-1919) e lo stesso M. Pieri (1860-1904) mostrarono notevole interesse. In quel che segue, dunque, ci soffermeremo sui contributi di Peano e di Burali Forti al calcolo geometrico. Per Peano ed ancor più per Burali Forti, l'uso delle coordinate costituiva una sorta di intermediazione per lo studio degli enti geometrici e delle loro proprietà. Il calcolo geometrico si propone invece con la sua assolutezza e sinteticità, come un approccio immediato e diretto alle questioni geometriche, senza tuttavia escludere le coordinate. Burali Forti dice[11]:

> "[...] le coordinate stesse, nessuna specie eccettuata, derivano come casi particolari, dal calcolo geometrico assoluto. L'opinione di taluni per cui il calcolo geometrico escluda le coordinate è dunque inesatta; il calcolo geometrico può non fare uso delle coordinate, ma è pronto a darle di qualsiasi specie. L'opinione inversa che il calcolo geometrico richieda necessariamente le coordinate cartesiane e sia un semplice ed insignificante tachigrafo delle coordinate è dunque del tutto erronea."

Peano, ad esempio, fa vedere già nel *Calcolo geometrico*[12] come facilmente si introducono le coordinate.

§2 *Le basi del calcolo geometrico*

Come abbiamo detto, nel 1888 Peano pubblica il *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.* In questo lavoro Peano presenta con elementi di originalità e con chiarezza espositiva le concezioni grassmanniane dando peraltro un apporto non indifferente alla comprensione di queste. Il volume è organizzato in modo tale che ad ogni capitolo viene inserita una parte inerente le applicazioni, soprattutto riferite alla geometria elementare e proiettiva e alla meccanica. Oltre questo ampio saggio, Peano realizzò altri interessanti lavori sul calcolo geometrico tra i quali vanno rammentati *Gli elementi di calcolo geometrico*[13], "Saggio di calcolo

[11] C. Burali Forti [1926] p. viii
[12] G. Peano [1888] p. 133
[13] G. Peano [1891]

geometrico"[14], "Analisi della teoria dei vettori"[15]. Cominciamo a vedere in sintesi gli aspetti basilari del calcolo geometrico proposto da Peano. Si parte da nozioni che sono di geometria elementare[16]:

> "Siano A, B, C,.. dei punti nello spazio.
>
> Def. 1^a. *Diremo linea* AB *la linea retta limitata dai due punti* A *e* B, *e immaginata descritta da un punto* P *che la percorra da* A *verso* B. [...]
>
> Def. 2^a. *Diremo* supeficie ABC *la superficie piana triangolare descritta dalla linea* AP, *ove il punto* P *descriva la linea* BC, *da* B *verso* C. [...]
>
> Def. 3^a. *Diremo* volume ABCD *il volume tetraedrale descritto dalla superficie* ABP, *ove il punto* P *descriva la linea* CD, *nel senso già convenuto*"

Peano dice esplicitamente che il calcolo geometrico è dunque un "sistema di operazioni analoghe a quelle del calcolo algebrico", gli elementi sui quali vengono effettuate queste operazioni sono enti geometrici, invece di numeri. L'ente geometrico generale e fondamentale preso in esame, sulla scia dell'insegnamento grassmanniano, sono le *formazioni (o forme) geometriche* che Peano, considerando le dimensioni spaziali solo fino a tre,classifica di prima, seconda, terza e quarta *specie* (o, come anche dice, *grado*). Riporteremo fra poco alcuni brani del "Saggio di calcolo geometrico"[17], in cui vengono date con molta chiarezza nozioni inerenti le operazioni sulle *forme geometriche*, e quindi la basilare definizione di vettore.

Come si può osservare da successive definizioni, a ciascuno degli enti elementari descritti si dovrà associare una *grandezza* (rispettivamente: lunghezza, area e volume) ed un *segno*. Ma i concetti che costituiscono i cardini di tutta la teoria del calcolo geometrico sono appunto le cosiddette 'formazioni geometriche'. Si tratta di espressioni polinomiali il cui significato geometrico viene via via specificandosi durante la trattazione. Come abbiamo già detto ne vengono presentate quattro *specie*: queste sono sufficienti per sviluppare tutto il calcolo geometrico tanto per questioni metriche e

---

[14] G. Peano [1895-96]

[15] G. Peano [1897-98]

[16] G. Peano [1888] pp. 21-22

[17] vedi G. Peano [1895-96]

meccaniche quanto per quelle proiettive. In sintesi le 'formazioni geometriche' consistono in quanto segue. Siano m, n, p, ... numeri (reali), una 'formazione geometrica' sarà una espressione di questo tipo:

$$m\alpha + n\beta + p\gamma + \cdots$$

in cui se $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ denotano *punti* si dirà di prima specie, se denotano *linee*, di seconda specie, se denotano *superfici*, di terza specie e se, infine, individuano *volumi*, di quarta specie.

"Già dicemmo *linea* il prodotto AB di due punti, e *triangolo* il prodotto ABC di tre punti. Però qui queste parole hanno un significato affatto speciale, e sono casi particolari di forme di secondo e terzo grado. Quindi l'eguaglianza $ABC = A'B'C'$ significa, per la definizione data, che comunque si prenda il punto D si ha sempre $ABCD = A'B'C'D'$ il che equivale a dire che i due triangoli giacciono in un medesimo piano, hanno la stessa grandezza e lo stesso senso. Analogamente $AB = A'B'$ significa che i due segmenti stanno sulla stessa retta, hanno la stessa grandezza, e lo stesso senso; e ciò non per definizione, ma come conseguenza immediata della definizione.

Daremo ora della somma e del prodotto di forme geometriche le seguenti definizioni intuitive:

Somma di due forme dello stesso grado è la forma che si ottiene scrivendo dopo i termini della prima quelli della seconda. Prodotto d'una forma di grado i per una di grado j, supposto $i + j \leq 4$, è la somma dei prodotti d'ogni termine della prima per ogni termine della seconda.

Conseguenza immediata di queste definizioni, si è che il calcolo geometrico che ne risulta differisce dal calcolo algebrico in ciò che

1° Possiamo moltiplicare solo due, o tre, o quattro punti: non si hanno forme di grado superiore al quarto.

2° Si ha $AB = -BA$, e quindi $AA = 0$.

In tutto il resto il calcolo geometrico ha tutte le proprietà del calcolo algebrico sui polinomii.

L'addizione è commutativa ed associativa, la moltiplicazione è associativa, e distributiva rispetto ad ambi i fattori. Dovunque ad una forma possiamo sostituirne una eguale.

Questa coincidenza dei due calcoli costituisce l'immenso vantaggio del metodo di Grassmann. Esso permette di operare e ragionare con un grande risparmio di sforzo e di memoria; poiché in questo nuovo calcolo si opera come in calcolo già conosciuto. Questo metodo risponde quindi al principio del minimo sforzo, il quale sussiste non solo in meccanica, ma anche in didattica.

Reciprocamente, attribuendo ad $ABCD$ il significato già detto, e volendo che sussistano le dette regole algebriche, si ottiene di necessità il calcolo di Grassmann, che risulta così definito. Però siffatta definizione sarebbe sovrabbondante; essa equivale ad un gruppo di proposizioni, alcune delle quali sono vere definizioni, e le altre ne sono conseguenza."

[...]

"Fra le forme di primo grado merita menzione speciale le differenza $B - A$ di due punti, cioè l'insieme di due punti A e B coi coefficienti -1 e $+1$. Siffatta differenza dicesi *vettore*.

Due vettori $B - A$ e $B' - A'$ sono equali quando, per la definizione data, comunque si prendano i punti PQR, si ha

$$BPQR - APQR = B'PQR - A'PQR.$$

Ma questa condizione si trasforma facilmente nell'altra : 'i due vettori sono eguali quando hanno la stessa lunghezza, sono paralleli, e diretti nello stesso verso'.

A e B diconsi l'*origine* e il *termine* del vettore $B - A$".

Grassmann aveva scritto[18] che si potevano riguardare: il baricentro come somma di punti, la retta congiungente due punti come prodotto di due punti, il piano (il triangolo) individuato da tre punti come il prodotto di questi e il tetraedo nello spazio come il prodotto dei quattro punti che lo determinano.

Il prodotto di cui si parla nel precedente brano peaniano è detto *prodotto progressivo* (o anche *prodotto alternativo* o *alternato progressivo*) che in qualche modo esprime l'operazione geometrica di proiezione tra forme (o formazioni) di grado (o specie) i e j, tali che $i + j \leq 4$ (quando ci riferiamo al solo piano al posto di 4 poniamo 3). Per renderci conto intuitivamente che si trattta di proiezione, si pensi ad esempio al seguente prodotto progressivo tra una formazione di prima specie (il punto A) ed una di seconda specie (la linea AB):

[18] H. Grassamnn [1844] p.9

$A(BC) = ABC$ sta a significare che proiettando da un punto A su un segmento BC che non contiene A è come congiungere tutti i punti di BC con A quindi ottenere il triangolo ABC (Figura 1).

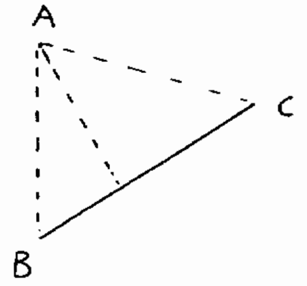

Figura 1

Analogo ragionamento vale per il caso (che esprime il prodotto progressivo tra una formazione di prima specie, il punto A, ed una di terza specie, il triangolo BCD):

$A(BCD) = ABCD$ dove A è un punto dello spazio non appartenente al triangolo BCD e $ABCD$ è un tetraedro.

Un altro esempio è il seguente prodotto progressivo tra una formazione di prima specie, $(B - A)$, ed una di terza specie, π, che dà per risultato una formazione di terza specie, $B\pi - A\pi$:

$(B - A)\pi = B\pi - A\pi$ diverso da zero.

Con riferimento alla Figura 2, l'espressione suddetta rappresenta la differenza tra i due volumi.

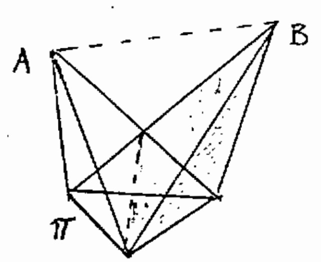

Figura 2

Risulta ora utile, per la comprensione geometrica di questo calcolo, tener presenti le seguenti proprietà:
- per il teatraedro $ABCD$ (essendo $A, B, \cdots$ punti, cioè i vertici) si ha:

$$ABCD = -BACD = -ACBD = -ABDC = BCAD = CDAB;$$

- se $A, B, \cdots, P, Q, \cdots$ sono punti, $a, b, \cdots, p, q, \cdots$ sono linee (rette), $\alpha, \cdots, \pi, \cdots$ triangoli (piani) si ha:

$AB + BC + CA = 0$
$(A + B)C \neq C(A + B)$
$AAB = 0$
$Aa = aA$
$ABp = -BAp$
$AaP = aAP$
$bP = \pi$
$A\alpha = -\alpha A$
$ab = ba.$

Sono poi significative le seguenti interpretazioni, che scaturiscono da opportuni significati, geometricamente intrinseci dell'uguagliare a zero volumi, triangoli, segmenti:

$ABCD = 0$: i quattro punti A, B, C, D sono complanari;
$ABC = 0$: i tre punti A, B, C giacciono su di una stessa retta;
$AB = 0$: i due punti A e B coincidono;
$A\alpha = 0$: il punto A giace sul piano α;
$Aa = 0$: il punto A giace sulla retta a;
$ab = 0$: le rette a e b giacciono su uno stesso piano, cioè o si incontrano o sono parallele;
$abc = 0$: le rette a, b, c hanno un punto in comune;
$(B - A)a = 0$: le rette AB ed a sono parallele;
$(B - A)\pi = 0$: la retta AB e il piano π sono paralleli.

È, ad esempio, facile dimostrare che $ABC = ABD$ significa che la retta CD è parallela alla retta AB. Infatti si ha di seguito (posto $AB = a$): $aC = aD, aD - aC = 0, a(D - C) = 0$.

È opportuno osservare che tanto nell'algebra della logica, di cui Peano tratta diffusamente nella premessa al *Calcolo geometrico*[19], quanto nel calcolo geometrico il preminente obiettivo tecnico-teorico

[19] G. Peano [1888] pp.1-20

sembra essere quello di giungere di volta in volta, calcolisticamente, ad identità tra polinomi. In ambedue i casi è poi essenziale (e non sempre immediata) la fase interpretativa, da un lato in senso logico, dall'altro in senso geometrico, dell'identità (ad es. polinomio uguagliato a zero) ottenuta.

Da notare che Burali Forti chiama AB *bipunto* ed ABC *tripunto.* Di particolare interesse è la trattazione che Peano dedica alla riduzione delle formazioni di prima specie, nella quale affronta questioni relative al baricentro. Riportiamo alcuni passi significativi in merito[20].

"TEOREMA. *Essendo* A *e* B *due punti, m ed n due numeri, la cui somma non è nulla, la formazione di prima specie* mA + nB *è uguale ad* (m + n)C, *ove* C *è il punto della retta* AB, *le cui distanze dai punti* A *e* B *sono inversamente proporzionali ai due numeri m ed n, e che sta fra* A *e* B *se questi due numeri sono dello stesso segno, e sta fuori del segmento* AB *se essi sono di senso contrario.*

[...]

DEF. *Dicesi* massa *d'una formazione di prima specie* $m_1A_1 + m_2A_2 + \cdots + m_nA_n$, ove $A_1 \cdots A_n$ *sono punti, la somma dei coefficienti* $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

TEOREMA. *Ogni formazione di prima specie* $m_1A_1 + m_2A_2 + \cdots + m_nA_n$, *la cui massa* $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ *non sia nulla, è riduttibile ad un punto solo* G *col coefficiente* $m_1 + m_2 + \cdots m_n$.

Infatti sia il numero n dei termini della formazione maggiore di 2; potremo supporre che nessuno dei coefficienti numerici sia nullo, poiché altrimenti il numero dei termini sarebbe minore di n; allora presi tre termini qualunque, p. es.: m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3 non possono essere vere ad un tempo le tre equazioni $m_1 + m_2 = 0$, $m_1 + m_3 = 0$, $m_2 + m_3 = 0$; supponiamo, p. es., che sia $m_1 + m_2 = 0$, si potrà, pel teorema precedente, determinare un punto G_1, tale che

$$m_1A_1 + m_2A_2 = (m_1 + m_2)G_1$$

onde

$$m_1A_1 + \cdots + m_nA_n = (m_1 + m_2)G_1 + \cdots + m_nA_n\ ,$$

[20]G. Peano [1888] pp.33-36

ossia la formazione proposta, contenente n termini, è ridotta ad un'altra contenente $n-1$ termini, e la massa della prima è uguale a quella della seconda.

Così continuando, la formazione proposta si ridurrà alla somma di due termini $pP + qQ$ in cui $p + q = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$; e siccome questa somma non è nulla, per ipotesi, si potrà determinare un punto G tale che $pP + qQ = (p+q)G$, ossia

$$m_1 A_1 + \cdots + m_n A_n = (m_1 + \cdots + m_n) G\,.$$

NOTA. Il punto G così determinato dicesi, in Meccanica, *baricentro* o *centro di gravità* dei punti dati cui siano affisse masse misurate dai rispettivi coefficienti".

Veniamo ora ad esaminare un'interessante applicazione del calcolo geometrico presentato da Peano ad un teorema alquanto cruciale per la geometria elementare. Si tratta del cosiddetto teorema di Menelao. Vale la pena ricordare che questo teorema, dimostrato per il caso dei triangoli sferici appunto da Menelao di Alessandria (ca. 100 d.C.), presumibilmente, per il caso piano, doveva comparire già nei perduti *Porismi* di Euclide. Fu poi riportato da Tolomeo di Alessandria (100-178 d.C.) nell' *Almagesto.* Come è noto[21] esso gioca un ruolo determinante nella trattazione che Desargues fa della teoria dell'involuzione esposta nel suo *Brouillon projet* del 1639. Il teorema di Menelao dice che se i lati AB, BC, CA di un triangolo vengono intersecati da una trasversale rispettivamente nei punti B', A', C', allora:

$$AC' \cdot BA' \cdot CB' = BC' \cdot CA' \cdot AB' \tag{2.1}$$

e viceversa.

La (2.1) è equivalente alla

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1 \tag{2.2}$$

[21] P. Freguglia [1982] p.117 e sgg.

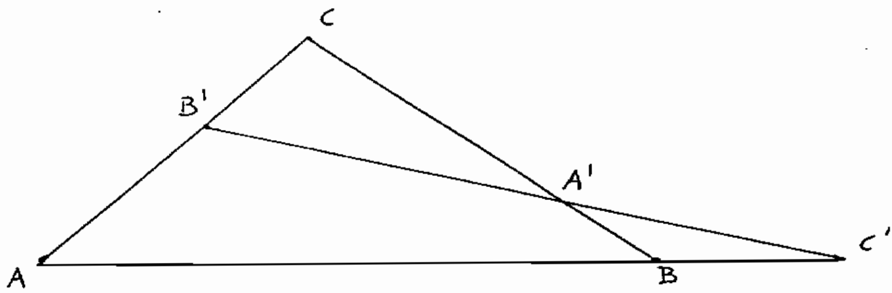

Figura 3

La dimostrazione che dà Peano parte dal fatto che se A, B, C sono tre punti allineati e A non coincide con B allora si ha che

$$C = \frac{CB}{AB}A + \frac{AC}{AB}C. \tag{2.3}$$

Infatti esistono sempre due numeri x e y tali che

$$C = xA + yB. \tag{2.4}$$

La (2.4) viene ricavata da Peano come caso particolare del teorema secondo il quale se I e J sono due vettori non uguali, allora ogni altro vettore K del piano si può ottenere sotto la forma

$$K = xI + yJ.$$

Se nella (2.4) moltiplichiamo prima per B e poi per A e dividiamo in ambedue i casi per AB, otteniamo la (2.3).

Riferendoci ora al triangolo ABC ed ai punti A', B', C' (Figura 3), applicando la (2.3) a questi ultimi punti otteniamo rispettivamente:

$$A' = \frac{A'C}{BC}B + \frac{BA'}{BC}C; \; B' = \frac{B'A}{CA}C + \frac{CB'}{CA}A; \; C' = \frac{C'B}{AB}A + \frac{AC'}{AB}B$$

eseguendo quindi il prodotto progressivo $A'B'C'$ a conti fatti si ha:

$$A'B'C' = \left(\frac{A'C}{BC} \cdot \frac{B'A}{CA} \cdot \frac{C'B}{AB} + \frac{BA'}{BC} \cdot \frac{CB'}{CA} \cdot \frac{AC'}{AB}\right)ABC \tag{2.5}$$

"Supposto ABC non nullo, la condizione necessaria e sufficiente affinché i tre punti A', B', C' siano in linea retta, ossia $A'B'C' = 0$, è l' annullarsi del coefficiente di ABC. Dunque se i punti A', B', C', che stanno sui lati BC, CA, AB del triangolo ABC sono in linea retta, si ha" la (2.2) e viceversa.[22]

§3 *Il prodotto regressivo*

Peano e poi Burali Forti presentano anche un'altra importante operazione geometrica: quella di *prodotto regressivo* (o anche *prodotto alternativo* o *alternato regressivo*), la quale in sostanza riproduce l'operazione di sezione tra forme geometriche di specie uguali o diverse. Un'esposizione elementare e chiara di questo concetto viene data da Peano nel "Saggio di calcolo geometrico", realizzato nel 1895[23]. Vediamo in sintesi cosa dice Peano. Supponiamo di avere due forme di prima specie, più esattamente due punti A e B, ed una forma di terza specie rappresentata da un triangolo π. Si vuol individuare il punto di incontro (intersezione) tra la retta AB e π. Intanto sappiamo che un generico punto P della retta AB viene individuato dall'espressione

$$P = xA + yB \tag{3.1}$$

inoltre dovendo P appartenere a π, varrà la condizione

$$P\pi = 0. \tag{3.2}$$

Sostituendo (3.1) in (3.2) otteniamo di seguito

$$(xA + yB)\pi = 0$$

$$xA\pi + yB\pi = 0. \tag{3.3}$$

L'equazione (3.3) è soddisfatta da x e y rispettivamente proporzio nali ai volumi $B\pi$ e $\cdot A\pi$. Denotato con $[t]$ la misura del tetraedro

[22] G. Peano [1888] p.47
[23] G. Peano [1895]

t rispetto ad un tetraedro fissato, la forma (che determina il punto P):

$$P = [B\pi]A - [A\pi]B, \tag{3.4}$$

risultando per la (3.3) $([B\pi]A - [A\pi]B)\pi = 0$,appartiene a π, oltre che alla retta AB dal momento che risulta anche $([B\pi]A - [A\pi]B)AB = 0$. Dice Peano:

> "Ora si può dimostrare che questa forma [cioè la (3.4)], che si presenta come funzione di A e di B, è in realtà funzione del solo prodotto AB, cioè che essa non varia ponendo al posto di A e B altre forme A' e B' tali che $AB = A'B'$. Perciò chiameremo l'espressione trovata il prodotto tra AB e π, e scriveremo:
>
> $$AB.\pi = [B\pi]A - [A\pi]B."$$

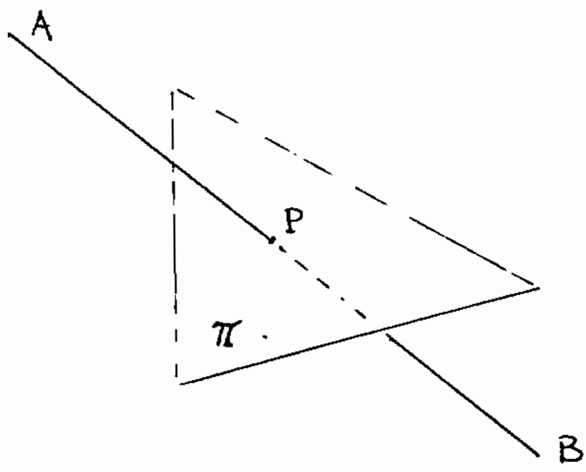

Figura 4

Cioè il prodotto di una formazione di seconda specie per una di terza dà per risultato una di prima. Questo prodotto, detto regressivo, determina mediante l'espressione (3.4) il punto intersezione della retta con il triangolo o se si vuole con il piano che contiene il triangolo π (Figura 4).

Peano aveva già presentato il prodotto regressivo nel *Calcolo geometrico*[24] nonché alcune interessanti applicazioni alla geometria. Vediamo di seguito il caso notevole relativo alle intersezioni nel piano. Viene data la seguente definizione:

> "Alla scrittura $AB.CD$ attribuiremo il significato
>
> $$AB.CD = ACD.B - BCD.A \tag{3.5}$$
>
> Perciò la scrittura $AB.CD$ rappresenta una formazione di prima specie che è collineare con AB, perché $(ACD.B - BCD.A)AB = 0$, ed è collineare con CD, perché $(ACD.B - BCD.A)CD = ACD.BCD - BCD.ACD = 0$ Ad essa daremo il nome di intersezione, o prodotto regressivo di $AB.CD$. Se AB si rappresenta con a, CD con b, invece di $AB.CD$ scriveremo anche $a.CD$, $AB.b$, $a.b$, ab."

In modo analogo, nel cap. VII, questa definizione è estesa allo spazio, così :

$$ABC.PQR = APQR.BC + BPQR.CA + CPQR.AB.$$

Peano dimostra che in generale il prodotto regressivo soddisfa alcune notevoli proprietà algebriche. Egli dice, sintetizzando e confrontando con il prodotto progressivo nello spazio[25]

> "Dalle definizioni date dei prodotti regressivi nello spazio, risulta che essendo A e B due formazioni nello spazio, di specie s e s', se $s + s' \leq 4$ [nel caso della geometria del piano si pone 3 al posto di 4], la scrittura AB rappresenta un prodotto progressivo, o proiezione, ed è una formazione di specie $s + s'$ $[F_s \cdot F_{s'} =$

[24] G.Peano [1888] pp.80 e segg. e pp.109 e segg.
[25] G. Peano [1888] pp.110-111

$F_{s+s'}$ se $s + s' \leq 4$]. Se invece $s + s' > 4$ [naturalmente anche in questo caso nella geometria del piano si pone 3 al posto di 4], la scrittura AB rappresenta un prodotto regressivo, o intersezione, di specie $s + s' - 4$ [$F_s \cdot F_{s'} = F_{s+s'\cdot 4}$ se $s + s' > 4$]. Sia nei prodotti progressivi che nei regressivi sono soddisfatte le proprietà:

$$\text{se } A = A' \text{ e } B = B' \text{ allora } AB = A'B'$$

$$A(B + B') = AB + AB'; \ (A + A')B = AB + A'B$$

$$(kA)B = A(kB) = k(AB).$$

Nei prodotti progressivi si ha:

$$AB = (-1)^{ss'} BA$$

e nei regressivi:

$$AB = (-1)^{(4\cdot s)(4\cdot s')} BA$$

che si può scrivere:

$$AB = (-1)^{ss'} BA.$$

Il prodotto alternato (progressivo o regressivo) ha dunque le seguenti caratteristiche
- non è commutativo : $F_s \cdot F_{s'} = - F_s \cdot F_{s'}$;
- non è associativo;
- il prodotto di una F_1 per se stessa è uguale a zero;
- $F_r \cdot F_s = F_r \cdot F_t$ non implica necessariamente che $F_s = F_t$, infatti se ad es. $P(ABC) = Q(ABC)$ non vuol dire che $P = Q$, ma che P e Q distano dal piano ABC in modo uguale e dalla stessa parte;
- il prodotto di più F_i non nulle può essere nullo.

Nel prodotto regressivo individuato da AB, detto X un elemento di specie $s + s' - 4$ comune ad A e B, e determinati gli elementi

P e Q, di specie $4-s$ e $4-s$ in modo che $XP=A$, $XQ=B$, sarà $AB=XPQ.X$."

Nel caso in cui A e B siano piani (specie 3), X sia una linea (specie $3+3-4=2$) e P e Q punti (specie $4-3=1$), la figura 5 fa vedere come viene rappresentata e soddisfatta l'espressione $AB = XPQ.X$, che a destra e a sinistra dà per risultato X, essendo XPQ un tetraedro.

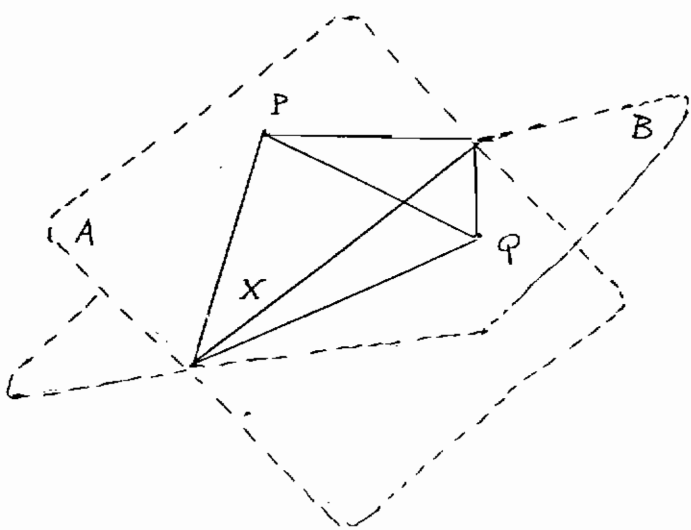

Figura 5

Ritorniamo ora al piano. Una parte del capitolo sesto del *Calcolo geometrico*[26] è dedicata alle intersezioni nel piano e ad applicazioni geometriche significative. Tra queste c'è il teorema di Desargues sui triangoli omologici nel piano. Utilizzando un teorema che fa da lemma fondamentale a tutta questa parte del capitolo, dalla (3.5) si ottiene l'identità:

$$AB.CD = ABD.C - ABC.D \tag{3.6}$$

Sostituendo nell (3.6) CD con p si ottiene:

$$AB.p = Ap.B - Bp.A \tag{3.7}$$

[26]G. Peano [1888] pp.79 e segg.

Ed ancora se nella (3.6) si sotituisce AB con p e C e D rispettivamente con A e B si ha:

$$p.AB = pB.A - pA.B \tag{3.8}$$

Vedremo tra poco l'importanza dell (3.7) per la deduzione di una espressione che rappresenta il teorema di Desargues. Intanto va osservato che dal confronto di (3.7) e (3.8) scaturisce una delle proprietà caratteristiche del prodotto regressivo, cioè che

$$pq = -qp.$$

Partendo dunque da (vedi Figura 6):

$$(BC.a)(CA.b)(AB.c) \tag{3.9}$$

applicando dapprima la (3.7) alla (3.9) si ha di seguito:

$$\begin{aligned}
&(Ba.C - Ca.b)(Cb.A - Ab.C)(Ac.B - Bc.A) = \\
&= (Ba.Cb.CA + Ca.Ab.BC)(Ac.B - Bc.A) = \\
&= Ba.Cb.Ac.CAB - Ca.Ab.Bc.BCA = \\
&= Ba.Cb.Ac.ABC - Ca.Ab.Bc.ABC = \\
&= (Ba.Cb.Ac - Ca.Ab.Bc)ABC;
\end{aligned}$$

in conclusione si ha l'identità:

$$(BC.a)(CA.b)(AB.c) = (Ba.Cb.Ac - Ca.Ab.Bc)ABC. \tag{3.10}$$

Per *dualità*[27] (cioè, operativamente, sostituendo al posto delle lettere maiuscole le minuscole ed al posto delle minuscole le maiuscole) della (3.10) si ottiene la

$$(bc.A)(ca.B)(ab.C) = (bA.cB.aC - cA.aB.bC)abc. \tag{3.10.1}$$

Moltiplicando la (3.10) per abc e la (3.10.1) per ABC si ha, sommando membro a membro:

$$abc(BC.a)(CA.b)(AB.c) + ABC(bc.A)(ca.B)(ab.C) = 0$$

se in quest'ultima espressione poniamo:

$$a = B'C' \, , b = C'A' \, , c = A'B'$$

[27] C.Burali Forti [1926] pp.172, 173

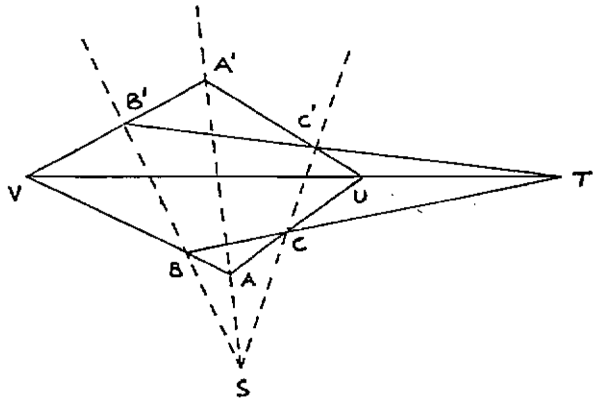

Figura 6

si ottiene

(3.10.2)
$$A'B'C'(BC.B'C')(CA.C'A')(AB.A'B') \\ + ABC(A'A.B'B.C'C) = 0$$

supposto nella (3.10.2) $A'B'C' \neq 0$ e $ABC \neq 0$ dovrà risultare:

$(BC.B'C')(CA.C'A')(AB.A'B') = 0$, che si legge "i punti di incontro dei lati corrispondenti sono collineari",
e ["se e solo se"]

$(A'A.B'B.C'C) = 0$, che si legge: "le congiungenti i vertici corrispondenti passano per un punto".

Peano ottiene pure altre identità da mettere in correlazione con il teorema di Desargues[28] tra le quali

(3.11)
$$(BC.B'C')(CA.C'A')(AB.A'B') \\ = ABC.A'B'C'(AA'.BB'.CC'.)$$

interpretabile in modo analogo alla (3.10.2), vedi Figura 6.

[28]G. Peano [1888] p.92

Peano in questo contesto propone anche il teorema di Pascal.
Egli parte dall' equazione

$$(AB.DE)(BC.EX)(D.AX) = 0 \tag{3.12}$$

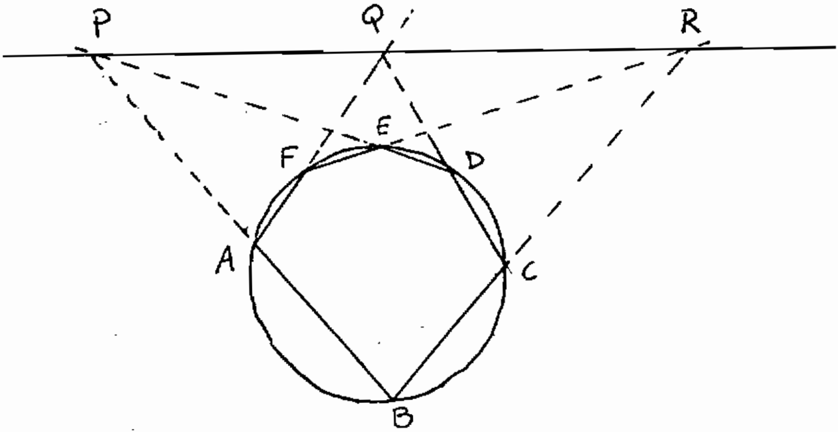

Figura 7

la quale mette in relazione sei punti (o sei elementi di prima specie) $ABCDEX$(vedi Figura 7). Comparendo nella (3.12) soltanto prodotti, essa a primo membro è, secondo quanto definisce Peano[29], un monomio. Inoltre è di secondo grado in ogni punto in quanto ogni punto compare in essa due volte ("il grado di un monomio rispetto ad una formazione" - in questo caso le formazioni considerate sono i punti - "è il numero delle volte che comparisce quella formazione nella scrittura",[30]), per cui se sono assegnati cinque punti, la (3.12) diventa un'equazione di secondo grado nel sesto punto. Poiché la (3.12) risulta verificata per $EX = 0$ o $AX = 0$, il luogo dei punti da essa individuato passa per E

[29] G. Peano [1888] p.92
[30] G. Peano ibid.

e per A; passa anche per D perché si ha identicamente, per $X = D, (AB.DE)(BC.ED)(ED.AD) = 0$. Ciò accade in modo del tutto analogo per $X = B$ e per $X = C$. Per cui la (3.12) rappresenterà la conica individuata dai cinque punti $ABCDE$[31]. Quando $X = F$ i sei punti distinti A, B, C, D, E, F, che appartengono alla conica, individuano un esagono in essa inscritto (Figura 7). Tutto questo coincide con l'ipotesi del teorema di Pascal ("se un esagono è inscritto in una conica"). Ma la (3.12) ci dice pure che i punti che scaturiscono dalle intersezioni delle tre coppie di lati opposti dell'esagono giacciono su una stessa retta. E questa è la tesi del teorema di Pascal ("le tre intersezioni delle coppie di lati opposti appartengono ad una stessa retta"). Per come è scritta la (3.12), vale pure il viceversa. Dualmente si può ricavare, come fa Burali Forti[32], il teorema di Brianchon.

Da quanto precede sembra quasi che esista una tendenza, sia da parte di Peano sia di Burali Forti, verso una sinteticità calcolativa, tramite operazioni di significato prettamente geometrico, nel dare la dimostrazione di un teorema geometrico. Addirittura nel caso del teorema di Pascal ci si riduce - di fatto - alla sola interpretazione della (3.12).

§4 *Verso il calcolo vettoriale*

Accanto al concetto di vettore, il calcolo geometrico di Peano e di Burali Forti contempla le nozioni di bivettore e di trivettore. Un bivettore è definito come il prodotto di due vettori e si può rappresentare come la somma di tre lati di un triangolo. Infatti considerati i vettori $I = B - A$ e $J = C - A$ e si fa il prodotto alternativo si ha:

$$IJ = (B - A)(C - A) = AB + BC + CA.$$

Discende poi che un bivettore è nullo se e solo se i due vettori di cui è prodotto sono tra loro paralleli. Peano dà poi le seguenti definizioni[33]:

[31] C. Burali Forti [1926] pp.212, 213
[32] ibid.
[33] G. Peano [1888] p.63

"Def. Diremo *bivettore* d'una superficie triangolare ABC il bivettore $AB + BC + CA$, ossia $(B - A)(C - A)$.
Def. Diremo *grandezza di un bivettore* $AB + BC + CA$ la grandezza di ABC."

Con Burali Forti diremo poi che un bivettore (come un vettore) è determinato da tre elementi (Figura 8): il modulo (area del triangolo), il verso (quello indicato in figura dalla freccia) e la giacitura (quella individuata dai vettori I e J).

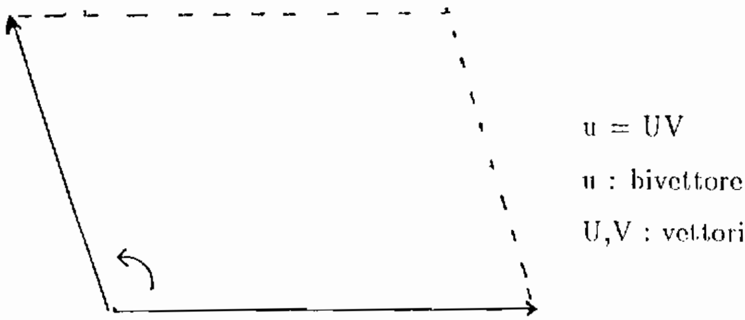

Figura 8

Cesare Burali Forti e Roberto Marcolongo via via si orientarono verso una trattazione del calcolo geometrico limitatamente a quello che viene chiamato semplicemente *calcolo vettoriale*, sviluppandone le proprietà e studiando la teoria delle omografie vettoriali, nonché le relative applicazioni alla fisica. Di notevole imporatanza sono in questa direzione sia il volume *Elementi di calcolo vettoriale* da loro pubblicato nel 1909[34], sia i due volumi *Analyse vectorielle générale*, pubblicati nel 1912[35], nonché una serie di articoli comparsi per lo più sui *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* tra 1907 e 1908. Già in questa tematica si era mosso lo stesso Peano soprattutto in un lavoro, di cui fra poco parleremo, del 1898. Ma anche nell'ultimo capitolo del *Calcolo geometrico* si trovano esaminate le nozioni di sistema lineare e di

[34] C. Burali Forti, R. Marcolongo [1909]
[35] C. Burali Forti, R. Marcolongo [1912]

trasformazione lineare. Peano stabilì dunque, nel 1888, con un'impostazione originale, pur ispirandosi sempre a Grassmann, in termini assiomatici la nozione di sistema lineare, cioè di spazio vettoriale sui reali. Gli aspetti basilari del calcolo vettoriale si ritrovano comunemente come capitolo iniziale di quasi tutti i trattati di meccanica razionale sin dai primi anni del Novecento. Peano presenta inoltre la nozione di trivettore come prodotto alternato di tre vettori.

Dal sistema generale di calcolo geometrico è possibile dedurre, mediante opportune definizioni, quello che Burali Forti chiama *sistema minimo.* D'altra parte il sistema minimo può essere autonomamente stabilito partendo dalla nozione che oggi diremo di spazio vettoriale ed aggiungendo quindi le usuali definizioni di prodotto scalare e di prodotto vettoriale. Questa via fu percorsa da Peano nel lavoro "Analisi della teoria dei vettori"[36] scritto dieci anni dopo il *Calcolo geometrico.* Egli assume inizialmente due idee primitive, quella di "punto" e la relazione quaternaria di equidifferenza tra quattro punti a, b, c, d che indica con $a - b = c - d$ (e che si può interpretare in vari modi: i segmenti ab e cd hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso, oppure la figura $abcd$ è un parallelogrammo). Le prime proposizioni primitive stabiliscono le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva dell'equidifferenza. Peano assume poi come quarta proposizione primitiva:

$$a - b = c - d. \ .a - c = b - d$$

e come quinta:

$$a - c = b - c. \ .a = b;$$

dopo di che introduce il concetto di vettore come differenza di due punti e la somma di vettori, dimostrandone le usuali proprietà che in termini moderni stabiliscono che l'insieme dei vettori rispetto alla somma (vettoriale) è un gruppo commutativo. Dopo aver presentato il prodotto di uno scalare per un vettore ed altre proposizioni primitive, Peano ottiene

[36] G. Peano [1898]

appunto quella struttura che oggi chiamiamo spazio vettoriale. Come egli osserva in questo modo siamo in grado di esprimere proprietà proiettive ed affini, ma per parlare delle proprietà metriche delle figure c'è bisogno di introdurre un altro concetto primitivo che è quello di *prodotto interno* tra due vettori, $u \times v$, che egli caratterizza con quattro assiomi.

In questo modo dunque Peano intravede la possibilità di impostare la geometria elementare sull'algebra lineare. In un altro lavoro di tipo fondazionale, "La geometria elementare basata sulle idee di 'punto' e di 'distanza' " del 1899[37], assumendo quali nozioni primitive "punto" e la relazione "$d(a,c) = d(b,c)$", cioè "la distanza di a da c è uguale a quella di b da c", riesce a definire il punto medio del segmento xy, denotato con $(x+y)/2$. Utilizzando quindi quest'ultima nozione Peano definisce l'uguaglianza tra due vettori così :

$$a - b = c - d. = .(a+b)/2 = (c+d)/2;$$

in questo modo si riallaccia logicamente alla memoria del 1898, È da osservare che Peano in questo lavoro del 1899 si collega anche al sistema delle idee primitive proposto da Pieri nel suo famoso lavoro del 1899 "La geometria elementare istituita sulle nozioni di 'punto' e di 'sfera' "[38].

Tenendo ancora presenti connessioni fondazionali, non si può fare a meno di ricordare che Hilbert nelle sue *Grundlagen der Geometrie* (1899, 1900), nello studiare sia il teorema di Desargues sia il teorema di Pascal, introduce un calcolo tra segmenti, ma - è opportuno sottolinearlo - questo presenta caratteristiche diverse tanto dal calcolo bellavitisiano delle equipollenze quanto dal calcolo vettoriale. Semmai il calcolo proposto da Hilbert si può in qualche modo ricollegare ai calcoli tra segmenti che troviamo già in Bombelli ed in Cartesio.

Giovanni Giorgi, un matematico emblematico per le critiche alle tecniche proposte dai vettorialisti, in un suo lavoro pubblicato nel 1947 per l' *Enciclopedia delle matematiche*

---

[37] G. Peano [1899]

[38] M. Pieri [1899]

elementari[39], opera in cui compare sullo stesso argomento un analogo apporto di Burali Forti[40], dice, ridimensionando la portata del contributo al calcolo vettoriale dato da Burali Forti e Marcolongo, che il sistema di calcolo vettoriale (ristretto) da loro proposto costituisce tutto sommato "un adattamento di quello di Gibbs[41], con alcune modificazioni di forma e di nomenclatura, con più accentuato distacco dal sistema hamiltoniano e da qualunque sistema completo, e con notevoli estensioni nella trattazione delle operazioni lineari sui vettori". Mentre uno dei punti di forza pragmatici degli assertori del calcolo vettoriale era basato sul fatto che l'uso delle coordinate portava a complessità ed a prolissità di calcolo, Giorgi ribalta l'accusa sostenendo a sua volta[42] che i metodi propugnati da Burali Forti e Marcolongo conducono a formule "molto poco compatte e di più difficile lettura".

Uno dei meriti riconosciuti ai due vettorialisti italiani fu quello di aver studiato con profondità la teoria delle *diadiche* - così chiamate da Gibbs - da loro ribattezzate con il nome di *omografie vettoriali.* Proprio la trattazione di questo argomento, e più in generale di quello delle trasformazioni lineari, dette però maggior spunto critico agli avversari dei vettorialisti. Vale ora la pena accennare a questa impostazione alternativa, peraltro a noi oggi alquanto familiare, che rifacendoci sempre al Giorgi troviamo in un suo ulteriore contributo all'*Enciclopedia delle matematiche elementari*[43]. Egli, introducendo al calcolo matriciale, dice:

> "*Matrice* (quadrata) è il simbolo di una sostituzione lineare omogenea in n variabili. L'operazione connessa alla matrice può essere anche riguardata come una trsformazione geometrica. Se $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sono le coordinate di un punto nello spazio S_n

[39] G. Giorgi [1947]$_1$ pp.116, 117
[40] C. Burali Forti [1938]
[41] J. W. Gibbs, E. B. Wilson [1909]
[42] ibid p.117
[43] G. Giorgi [1947]$_2$ p.129

ad n dimensioni, la trasformazione

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 + \cdots + \varphi_{1n}x_n, \\ y_2 = \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 + \cdots + \varphi_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \varphi_{n1}x_1 + \varphi_{n2}x_2 + \cdots + \varphi_{nn}x_n \end{cases}$$

è definita dalla matrice

$$\Phi = \begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{Vmatrix}$$

Scrivendo

$$\widehat{X} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$$

$$\widehat{Y} = (y_1, y_2, \cdots y_n)$$

intendiamo indicare che $\widehat{X}$ è il vettore di componenti $x_1, x_2, \cdots, x_n$; e così via. La notazione

$$\widehat{Y} = \Phi\widehat{X} \tag{4.1}$$

mette in evidenza la Ψ come una trasformazione tra vettori: considerata intrinsecamente come tale, l'operazione riceve il nome di *diadica, diatensore, affinore, omografia vettoriale,* etc., ed è un ente intrinseco. Cambiando gli assi coordinati (mentre l'origine resta invariata), la matrice si tramuta in altra matrice con nuovi elementi, ma continua a rappresentare la stessa trasformazione geometrica."

La (4.1) d'altra parte è una scrittura compatta che permette un'agevole trattazione della teoria delle trasformazioni lineari. Sostiene pertanto Giorgi[44] che gli studi effettuati da Burali Forti e Marcolongo sulle omografie vettoriali "si avvantaggerebbero di molto se venissero tradotti in notazioni più compatte e più agevoli, e se non fossero dominati dal preconcetto di voler ricavare ed esplicare tutto per mezzo

[44] G. Giorgi [1947]$_1$ p.117

dei vettori; infatti gli autori posteriori hanno mostrato come la trattazione diventi più efficace e più perspicua, prendendo come enti fondamentali le diadiche esse stesse, illustrandole per mezzo delle matrici, e ricavando i vettori come caso particolare".

Si può dire - a conclusione - che le tematiche relative agli studi sul calcolo geometrico trovano la loro sistemazione in qualche modo definitiva negli anni che seguono di poco la prima guerra mondiale. In altre parole il dibattito che si era sviluppato nel mondo matematico internazionale dalla seconda metà dell'Ottocento fino agli anni venti del Novecento cominciò ad affievolirsi. Si assiste così via via ad una perdita di interesse per l'argomento in sé ed alla presentazione sul piano della ricerca matematica di impostazioni alternative. Questa perdita di interesse per il calcolo geometrico non dipese tuttavia dalla sola comparsa di impostazioni alternative, in particolare dagli sviluppi dell'algebra lineare in termini analitico-matriciali, settore di ricerca che anche in Italia trovò valenti cultori, ma altresì e forse soprattutto da fattori di crisi interni allo stesso indirizzo di ricerca. Non c'è dubbio infatti che le tecniche e le relative prospettive di sviluppo in ambito prettamente geometrico di questo calcolo non suscitarono un interesse dominante. In quel periodo, ad esempio, la maggior parte dei geometri italiani stava sviluppando altri più prolifici temi. D'altro canto però, come accadeva anche fuori d'Italia, le tecniche del calcolo vettoriale erano proficuamente impiegate nelle questioni basilari geometriche e nelle applicazioni alla meccanica ed alla fisica-matematica, per le quali stavano diventando uno strumento essenziale di analisi.