

PERFEZIONAMENTO '94. CONOSCENZE.

Il coordinatore didattico Marina Dalè, nella sua lettera del 23 luglio '94, domanda ad ogni docente di preparare una "*griglia di rilevazione delle conoscenze possedute dai corsisti*".

Non ho capito bene quale sia il significato della espressione "griglia di rilevazione": e quindi temo di essere incapace di prepararla secondo le prescrizioni ricevute. Inoltre penso che i futuri corsisti saranno tutti (o quasi tutti) laureati, e quindi vorrei far loro credito della maturità mentale e culturale sufficiente per organizzare adeguatamente le proprie conoscenze e colmare le eventuali lacune in modo autonomo, quando conoscano, anche solo sommariamente, gli argomenti che verranno trattati. Pertanto credo di poter rispondere, come posso, alle richieste presentando un elenco sommario degli argomenti che intendo trattare, e richiamare le nozioni utili per seguire in modo efficace le lezioni.

TITOLO. Trasformazioni geometriche.

PRIMA PARTE. CONCETTI FONDAMENTALI.

1. Il concetto generale di trasformazione.
2. La trasformazione geometrica.
3. Composizione di trasformazioni.
4. Gli assiomi dei gruppi.
5. Relazioni di equivalenza in un insieme e classi di equivalenza.
6. Relazioni di equivalenza determinate da gruppi di trasformazioni su un insieme.
7. Le idee fondamentali della geometria delle trasformazioni.
8. Le trasformazioni fondamentali della geometria elementare (euclidea).

SECONDA PARTE. SVILUPPI FORMALI.

PREREQUISITI.

1. I capitoli fondamentali della geometria elementare (euclidea) del piano e dello spazio.
2. Geometria proiettiva elementare: proiettività tra forme di I specie. Omografie tra forme di II e III specie. Correlazioni e polarità. Dualità.
3. Algebra elementare. Elementi di teoria dei gruppi. Elementi di algebra lineare. Elementi di calcolo con matrici.

INDICE

PARTE PRIMA. LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE.

1. Il concetto generale di trasformazione. P. 3
2. La trasformazione geometrica. P. 4
3. Composizione di trasformazioni. P. 4
4. Gli assiomi dei gruppi. P. 5
5. Relazioni di equivalenza in un insieme e classi di equivalenza. P. 7
6. Relazioni di equivalenza determinate da gruppi di trasformazioni su un insieme. P. 7
7. Le idee fondamentali della geometria delle trasformazioni. P. 9
8. Questioni critiche sulla geometria elementare (euclidea). P. 10
9. Le isometrie del piano. P. 12

PARTE SECONDA. SVILUPPI FORMALI. P.13

AVVERTENZA.

Queste lezioni non possono e non debbono essere un elenco di ricette didattiche, o una raccolta di itinerari didattici, destinati a dettare la via migliore per insegnare certi argomenti o per trattare certi contenuti. Lo scopo di queste lezioni è invece quello di contribuire all'analisi culturale degli argomenti che figurano nei vigenti programmi di insegnamento, in modo che ogni insegnante possa valutare il significato della presenza degli argomenti stessi nei programmi, e scegliere liberamente la propria linea didattica per conseguire determinati scopi formativi, quando sia convinto della loro validità.



Paul Klee 1920

1 - Il concetto generale di trasformazione.

Non diamo per il momento la definizione formale del termine "trasformazione"; ci limitiamo per ora ad elencare alcuni termini che abitualmente vengono considerati come sinonimi: corrispondenza biunivoca, bijezione; rappresentazione, funzione, mappa ecc.

Preferiamo riflettere su alcune perplessità che vengono provocate talvolta dall'impiego del termine "trasformazione" in geometria. Infatti, nel linguaggio comune, l'impiego di questo termine induce in generale ad immaginare dei cambiamenti, anche di forma esteriore, degli oggetti che si considerano: la crisalide che si trasforma in insetto, il volto di una persona che invecchia, l'albero che cresce, il pulcino che diventa galletto ecc. ecc. Invece nel caso delle figure geometriche si parla di trasformazione anche soltanto in relazione a spostamenti rigidi, i quali non cambiano la forma esteriore di una figura spostata. Si direbbe quindi che, in questo caso, la operazione che viene chiamato "trasformazione" non trasformi nulla.

Si potrebbe riflettere che, a ben guardare, anche queste trasformazioni, che sembrano non trasformare nulla, nella realtà non lasciano invariata proprio ogni cosa: infatti, se un qualunque oggetto rigido viene spostato, si può osservare che l'oggetto in sé appare esteriormente come invariato, ma che è certamente cambiato l'insieme costituito dall'oggetto considerato e dagli altri oggetti che lo circondano, i quali costituiscono il riferimento rispetto a cui viene precisata la posizione dell'oggetto che è stato spostato; quindi viene trasformato l'insieme delle relazioni dell'oggetto con l'ambiente, anche se l'oggetto può presentarsi singolarmente come invariato.

Queste idee possono essere accostate a quelle espone dal fisico Giovanni Polvani, nella sua trattazione della termodinamica: osserva infatti Polvani che dopo ogni trasformazione termodinamica ciclica un sistema ritorna nella condizione iniziale; ma non tutto l'universo ritorna nelle condizioni iniziali, perché ogni trasformazione lascia una "traccia" nell'universo.

Così si potrebbe dire che anche un movimento rigido non muta apparentemente nulla in una figura, ma lascia in un certo senso una "traccia", perché la posizione della figura cambia in relazione agli oggetti, con riferimento ai quali la posizione della figura è determinata. Si può osservare inoltre che le eventuali perplessità che sono state espone si avverano anche in moltissime altre occasioni, nelle quali i termini del linguaggio comune vengono utilizzati in qualche dottrina scientifica: infatti ogni scienza ha bisogno di designare i propri oggetti con assoluta univocità, mentre il linguaggio comune quasi sempre utilizza dei termini che hanno diversi significati; e di volta in volta il significato di un termine viene precisato facendo ricorso al contesto nel quale il termine stesso è inserito. Un caso di fenomeno di questo tipo è presentato per esempio dal termine "fine"; questo può essere un aggettivo (con significato di "sottile", "acuto", oppure anche di "raffinato") ed anche un sostantivo; ed in questo secondo caso può essere di genere maschile oppure femminile: così "il fine di un'impresa" è una cosa certamente diversa da "la fine di un'impresa".

In quest'ordine di idee si potrebbe dire che ogni dottrina ha un suo linguaggio, e che di solito, per costruire tale linguaggio, si adottano dei termini del linguaggio comune, opportunamente precisati, ai quali viene attribuito convenzionalmente un significato preciso ed unico, talvolta lontano dal significato che il termine ha abitualmente. Per esempio, il termine "serie" viene utilizzato dalla statistica con un significato tecnico preciso, dalla matematica con un altro significato, diverso da quello che prende nella statistica; i termini "detrazione" e "riduzione", i quali per il linguaggio comune sono considerati sinonimi, hanno dei significati ben precisi e diversi tra loro per il linguaggio del Fisco; i termini "ammenda" e "multa", che nel linguaggio comune sono considerati praticamente sinonimi, hanno pure dei significati ben precisi e diversi tra loro per il linguaggio giuridico. Ed è anche noto che il termine "gruppo" viene impiegato in algebra con un significato molto diverso da quello che ha nel linguaggio comune.

Gli esempi potrebbero essere moltiplicati, e presi da molti e diversi campi della scienza e della tecnica; la matematica inoltre utilizza abitualmente dei simboli artificiali e convenzionali che non hanno alcun significato, prima del contesto

matematico e fuori di esso. Ma occorre tuttavia ricordare che la spiegazione del significato dei simboli matematici deve essere fatta con il linguaggio comune: infatti non si potrebbe altrimenti assegnare un significato qualsiasi ad un simbolo convenzionale assolutamente nuovo.

2 - La trasformazione geometrica.

Diremo *trasformazione* una corrispondenza biunivoca (bijezione o anche bigezione) tra i punti di due figure geometriche. Anche in questo caso esiste qualche pericolo di ambiguità nelle espressioni del linguaggio comune che si utilizzano. Infatti, date due figure che si corrispondono in una bijezione, si utilizza il termine *trasformazione* per indicare la operazione logica, che fa passare idealmente da una figura all'altra, ed anche la relazione che nasce da un'operazione cosiffatta. Anche in questo caso la distinzione tra le due accezioni del termine può essere ottenuta con riferimento al contesto. Osserviamo che in matematica un equivoco analogo può accadere anche in altri casi: è vero infatti che in aritmetica si utilizzano termini diversi per indicare le operazioni ed i loro risultati; per esempio addizione e somma, moltiplicazione e prodotto. Ma in molti altri casi invece si utilizzano termini uguali per indicare cose diverse, rimandando, come si è detto, al contesto, per la precisazione.

3 - Composizione di trasformazioni.

Sia X un insieme; indicheremo qui gli elementi di X con le ultime lettere dell'alfabeto latino, in carattere minuscolo: per esempio con

$$(3.1) \quad x, y, z, u, v, w, \dots$$

Sia Γ un insieme di operazioni che operano su elementi di X . Indicheremo gli elementi di Γ con le prime lettere dell'alfabeto latino, scritte in carattere maiuscolo, come per esempio:

$$(3.2) \quad A, B, C, \dots$$

Con la lettera I indicheremo un elemento speciale dell'insieme Γ , elemento che verrà chiamato *elemento neutro* di Γ , ed indicherà la "trasformazione identica", cioè quella operazione di Γ che non opera nessun cambiamento su X .

OSSERVAZIONE 1: La considerazione di una "operazione che non opera" può essere giudicata come un'inutile ed astratta acrobazia intellettuale. Si può tuttavia osservare che una circostanza analoga si verifica in aritmetica, con l'introduzione del concetto e del simbolo "0" (*zero*), oppure, in teoria degli insiemi, con l'introduzione del concetto di "insieme vuoto", indicato abitualmente con il simbolo \emptyset . Tutte queste operazioni logiche possono essere, a rigore, considerate non necessarie: per esempio nell'aritmetica dei Greci e dei Romani non esisteva il simbolo "0". Tuttavia con queste estensioni dei concetti abituali si consegue una notevole semplificazione nelle formule e nei calcoli. Pertanto queste introduzioni di nuovi concetti, e dei corrispondenti simboli, non sono inutili o cervelotiche, perché non contraddicono a nulla che sia stato stabilito prima e permettono di conseguire notevoli vantaggi nelle trattazioni teoriche. Con una formula del tipo:

$$(3.3) \quad y = x A$$

indicheremo che l'elemento y di X è stato ottenuto applicando l'operazione A di Γ all'elemento x di X . In particolare, per quanto riguarda l'elemento I di Γ , si avrà, per ogni elemento $x \in X$, la formula:

$$(3.4) \quad x = x I.$$

OSSERVAZIONE 2: Qui e nel seguito indicheremo una operazione eseguita sugli elementi di X scrivendo il simbolo dell'operazione stessa dopo il simbolo dell'elemento sul quale essa opera, come abbiamo fatto nelle formule (3) e (4). Questa convenzione è diversa da quella adottata frequentemente in matematica, ma non è completamente inusitata: per esempio, in molte lingue e dialetti, per indicare la negazione dell'operazione espressa da un verbo o da una forma verbale,

il termine indicante la negazione viene pronunciato o scritto dopo la forma verbale stessa: in tedesco "io non so" viene espresso con la frase "Ich weiss nicht"; ma anche in vari dialetti lombardi si dice "Mi so no" oppure "Mi so minga", in dialetto piemontese "Mi sai nen". In italiano invece, come è noto, la particella negativa viene abitualmente pronunciata o scritta prima, ed in francese la negazione viene addirittura espressa in due parti che stanno una prima ed una dopo la forma verbale negata: "Je ne sais pas".

Quindi i vari modi di rappresentare simbolicamente certe operazioni logiche sono materia di convenzioni, che possono essere scelte ed adottate con una certa libertà; e la loro adozione è spesso dovuta ad abitudini ed a gusti che ovviamente non possono essere contestati, ma che non possono essere imposti con argomenti razionali incontrovertibili.

Consideriamo ora una seconda volta un elemento di Γ (che può non essere diverso da A); indichiamolo con B , e sia:

$$(3.5) \quad z = y B$$

l'elemento di X in cui B porta y . Tenendo conto di (3) si avrà quindi:

$$(3.6) \quad z = (x A) B.$$

Possiamo quindi prendere in considerazione un'operazione che porta x in z ; ammettiamo che questa operazione appartenga a Γ , e chiamiamola C , ponendo quindi:

$$(3.7) \quad z = x C.$$

L'operazione C dà quindi come risultato ciò che si ottiene applicando la B al risultato dell'operazione A . Si suol dire che l'operazione C è stata ottenuta con la *composizione* delle due operazioni A e B ; la C viene spesso chiamata il "prodotto" delle due operazioni A e B , e si scrive:

$$(3.8) \quad C = A B;$$

si avrà quindi:

$$(3.9) \quad (x A) B = x(A B).$$

OSSERVAZIONE 3: Nelle formule (6) e (9) sono state utilizzate coppie di parentesi (la prima aperta e la seconda chiusa); il significato di queste notazioni è ben noto dalla matematica elementare: ciò che si trova tra due parentesi di questo tipo è da considerarsi come un tutto unico. È noto che, quando le formule scritte indicano dei calcoli (numerici o letterali), i calcoli indicati tra parentesi debbono essere eseguiti prima dei quelli che sono indicati fuori delle parentesi stesse. Questo impiego convenzionale delle coppie di parentesi è molto analogo all'impiego corretto delle coppie di parentesi nel linguaggio comune. Infatti anche in questo caso il discorso che si trova tra parentesi dovrebbe avere un senso compiuto.

OSSERVAZIONE 4: L'operazione che risulta dalla composizione di due operazioni dell'insieme Γ viene chiamata, come si è detto, "prodotto" delle due A e B ; qui il termine "prodotto" è usato in un senso diverso da quello che assume in relazione all'operazione di moltiplicazione di due numeri. Si tratta di una estensione del significato di un vocabolo ("prodotto") da un dato contesto ad uno più ampio: in questa estensione alcune delle proprietà del prodotto, che sono valide per i numeri, rimangono pure valide, come vedremo; altre cessano di essere valide.

4 - Gli assiomi dei gruppi.

Nel seguito prenderemo in considerazione degli insiemi di trasformazioni che posseggono determinate proprietà. Un insieme Γ che possenga le proprietà che stiamo per presentare viene chiamato *gruppo*; come abbiamo detto sopra (N.1) questa denominazione è convenzionale, in quanto utilizza con senso tecnico preciso un termine che viene utilizzato nel linguaggio comune con un significato diverso. Le proposizioni che presentano le proprietà fondamentali, che fanno un gruppo di un insieme Γ di operazioni, vengono abitualmente chiamate *assiomi dei gruppi*. Qui il termine "assioma" non ha il significato, ristretto e perentorio, che gli viene spesso dato nel linguaggio comune; infatti di solito si chiama "assioma" una affermazione che si considera evidente, e quindi tale da essere accettata come vera, in seguito alla sua sola

enunciazione, senza bisogno di ulteriore convalida o dimostrazione. Invece nella pratica abituale della matematica (che noi qui adottiamo), e nella dottrina riguardante i fondamenti della matematica, si chiama "assioma" una proposizione che viene enunciata senza dimostrazione all'inizio di una determinata teoria, e che fornisce, insieme con altre della sua stessa natura, la definizione implicita degli enti dei quali la teoria tratta. Pertanto il fatto che una proposizione sia un assioma (cioè non venga dimostrata) oppure un teorema (cioè ammetta una dimostrazione) non è una proprietà della proposizione, presa isolatamente, ma consegue dall'ordine nel quale la proposizione stessa viene inserita in una data teoria che si sta presentando. Pertanto non si esclude che una proposizione, la quale non può essere dimostrata nell'ambito di una certa teoria, e quindi risulti essere un assioma di questa, divenga un teorema nell'ambito di un'altra teoria, oppure di una diversa sistemazione della medesima teoria. In questo senso presenteremo qui le proposizioni che sono enunciate nelle presentazioni abituali della teoria dei gruppi; senza escludere quindi che le stesse proposizioni possano essere dimostrate (e quindi diventare dei teoremi) in presentazioni diverse da questa.

I) Il *prodotto* di due elementi di Γ è ancora un elemento di Γ . In formule:

$$(4.1) \quad A, B \in \Gamma \Rightarrow A B \in \Gamma.$$

Si usa esprimere il contenuto di questo assioma dicendo che, nell'insieme Γ , l'operazione di "prodotto" è un'operazione di "composizione interna".

II) Si ha:

$$(4.2) \quad (A B) C = A (B C).$$

Si usa esprimere il contenuto di questo assioma dicendo che l'operazione di "prodotto" possiede la "proprietà associativa". Questa proprietà è una di quelle che è posseduta anche dal prodotto di numeri (Oss.4).

Osserviamo esplicitamente che per l'operazione di prodotto non vale la proprietà commutativa, che invece vale per il prodotto di numeri. Tuttavia possono esistere delle coppie di elementi di Γ per i quali il prodotto risulta essere commutativo; e addirittura possono esistere dei gruppi per i quali la proprietà vale per ogni coppia di elementi. Questi particolari gruppi vengono chiamati gruppi *commutativi*, o anche gruppi *abeliani* (dal nome del matematico svedese N. H. Abel [1802-1829], che studiò in modo particolare dei gruppi di questi tipo).

III) Per l'elemento I vale la formula:

$$(4.3) \quad I A = A.$$

Si usa esprimere il contenuto di questo assioma dicendo che I è il "neutro a sinistra" per ogni elemento di Γ .

Il fatto che I venga chiamato "neutro a sinistra" è giustificato da ciò che abbiamo osservato a proposito dell'Assioma II: infatti non è detto che per il prodotto di due elementi di Γ valga la proprietà commutativa; anzi, per un gruppo generico essa non vale. Tuttavia, in base all'insieme di tutti gli assiomi della teoria, si può dimostrare che per l'elemento I vale la proprietà espressa dalla formula seguente:

$$(4.4) \quad A I = A;$$

il contenuto di questa formula viene abitualmente espresso in parole dicendo che l'elemento I di Γ , che è neutro a sinistra, è anche neutro a destra per ogni elemento di Γ . Si dimostra poi anche che l'elemento di Γ che soddisfa alle (4.3) e (4.4) è unico.

IV) Dato un qualunque elemento $A \in \Gamma$, esiste un elemento $A^{-1} \in \Gamma$ tale che si abbia:

$$(4.5) \quad A^{-1} A = I.$$

L'elemento A^{-1} che soddisfa la (4.5) viene chiamato *inverso a sinistra* di A . La ragione per cui A^{-1} viene chiamato inverso a sinistra è ancora fondata sull'osservazione fatta a proposito dell'Assioma III; cioè sul fatto che in generale in un gruppo, per l'operazione di prodotto, non vale la proprietà commutativa. Tuttavia si dimostra che, per ogni elemento $A \in \Gamma$, si ha :

$$(4.6) \quad A A^{-1} = I;$$

cioè l'inverso a sinistra di un qualunque elemento di Γ è anche inverso a destra. Pertanto d'ora innanzi l'elemento A^{-1} sarà

chiamato semplicemente *inverso* di A . In forza di ciò che precede si ha poi:

$$(4.7) \quad (A^{-1})^{-1} = A.$$

Infine si dimostra che l'inverso A^{-1} di un qualunque elemento A è unico.

5 - Relazioni di equivalenza e classi di equivalenza in un insieme.

Supponiamo che tra gli elementi di un insieme X possa sussistere una relazione, che ha certe proprietà importanti, di cui diremo subito. Per esprimere che tra due elementi a e b dell'insieme considerato sussiste la relazione in parola interporremo il simbolo \equiv tra i simboli degli elementi considerati, scrivendo cioè:

$$(5.1) \quad a \equiv b.$$

Supporremo che la relazione in parola possieda le seguenti proprietà fondamentali:

$$(5.2) \quad a \equiv a \text{ (proprietà riflessiva);}$$

$$(5.3) \quad \text{se } a \equiv b \text{ allora anche } b \equiv a \text{ (proprietà simmetrica);}$$

$$(5.4) \quad \text{se } a \equiv b \text{ ed anche } b \equiv c, \text{ allora } a \equiv c \text{ (proprietà transitiva).}$$

Una relazione che possieda le proprietà ricordate viene detta *relazione di equivalenza* tra gli elementi di X .

Quando sia data una relazione di equivalenza tra gli elementi di un insieme X , questi possono essere ripartiti in sottoinsiemi, che vengono chiamati abitualmente *classi di equivalenza* (rispetto alla relazione considerata).

Così per esempio le automobili nuove di una certa marca possono essere ripartite in base al colore della loro vernice, i poligoni piani possono essere ripartiti in base alla loro area, i segmenti rettilinei in base alla loro lunghezza ecc. Il fatto che due elementi dell'insieme X appartengano alla stessa classe di equivalenza è quindi condizione necessaria e sufficiente affinché sussista tra loro la relazione di equivalenza che fonda la ripartizione; in termini poco precisi, ma abbastanza efficaci, si potrebbe dire che gli elementi dell'insieme X che appartengono ad una medesima classe di equivalenza hanno una "qualità", una "proprietà" in comune; e che, ai fini di verificare se gli elementi posseggano tale proprietà, uno qualunque degli elementi della classe di equivalenza vale l'altro. Così, rifacendoci agli esempi addotti, quando si voglia verificare l'effetto del colore di una carrozzeria, basta osservarlo su una sola automobile, perché ovviamente le altre hanno tutte lo stesso colore; se si vuole conoscere l'area di uno dei poligoni della classe di equivalenza, basta determinarla su uno qualunque di essi; se si vuole conoscere la misura della lunghezza di un segmento della classe di equivalenza, basta misurarne uno qualunque ecc.

Osserviamo esplicitamente che possono sussistere varie relazioni di equivalenza tra coppie di elementi di un medesimo insieme X ; pertanto tali elementi possono essere ripartiti in classi di equivalenza in molti modi, e le ripartizioni possono essere del tutto diverse tra loro. Così dei poligoni piani possono essere ripartiti in classi di equivalenza a seconda dell'area, oppure a seconda della lunghezza del perimetro, oppure a seconda del numero dei vertici ecc.

Osserviamo inoltre che, quando si attribuisce un elemento di X ad una determinata classe di equivalenza rispetto ad una relazione, si esegue una operazione logica che può essere chiamata di "astrazione". Infatti, per attribuire l'elemento ad una classe di equivalenza, si tiene conto soltanto della proprietà che caratterizza la classe, prescindendo, ossia, come suol dirsi, "facendo astrazione" dalle altre proprietà possedute dall'elemento. Così per esempio, quando si costruiscono le classi di equivalenza di poligoni piani, inserendo in una determinata classe un poligono quando e solo quando ha la stessa area di tutti gli altri della classe, si fa astrazione dalle altre proprietà geometriche del poligono.

6 - Relazioni di equivalenza determinate da gruppi di trasformazioni su un insieme.

Si consideri un insieme X e sia Γ un gruppo di trasformazioni di X su se stesso. Sia dato un qualunque elemento $x \in X$, e si

consideri l'insieme degli elementi di X che sono i corrispondenti di x per tutte le operazioni di Γ . Questi elementi costituiscono un insieme, che indicheremo con $Y(x)$, che è ovviamente un sottoinsieme di X . Nel seguito supporremo sempre che $Y(x)$ non coincida con X . Esisterà quindi almeno un elemento $z \in X$ che non è corrispondente di x per alcuna operazione di Γ . I trasformati di z per tutte le operazioni di Γ costituiranno un insieme $Y(z)$, il quale, come vedremo, non ha alcun elemento in comune con $Y(x)$, ed è pure un sottoinsieme di X . Possiamo ripetere la procedura precedente: se esiste un elemento u di X che non appartiene né ad $Y(x)$ né ad $Y(z)$ possiamo considerare l'insieme dei trasformati di u mediante tutte le operazioni di Γ ; e così via, fino a che si esauriscono tutti gli elementi di X .

Dati due elementi $x, y \in X$, se esiste una trasformazione di Γ che li porta uno nell'altro, nasce tra essi una relazione; faremo vedere che questa relazione possiede le tre proprietà (riflessiva, simmetrica e transitiva) che nel precedente N. 5 abbiamo presentato come caratteristiche delle relazioni di equivalenza [formule (5.2), (5.3), (5.4)]. A tal fine, indichiamo qui provvisoriamente il fatto che tale relazione sussista tra i due elementi considerati scrivendo il simbolo \approx tra i simboli degli elementi stessi. Quindi, per il momento, con la sequenza di simboli:

$$(6.1) \quad x \approx y$$

indicheremo convenzionalmente che esiste una trasformazione A del gruppo Γ che porta x in y , cioè esiste una $A \in \Gamma$ tale che si abbia:

$$(6.2) \quad y = x A.$$

Ma poiché Γ è un gruppo, esiste in Γ un elemento I tale che valga la (2.4), tale cioè che:

$$(6.3) \quad x = x I;$$

e quindi, per la convenzione provvisoria fatta, si ha:

$$(6.4) \quad x \approx x,$$

dunque per la relazione indicata con \approx vale la proprietà riflessiva.

In secondo luogo, supponiamo che sussista la (6.1), cioè che sussista la (6.2) per un elemento $A \in \Gamma$. In forza dell'assioma IV dei gruppi (N. 4) esiste allora in Γ un elemento A^{-1} tale che sussista la (4.6). Operando su entrambi i membri della (6.2) con l'operazione A^{-1} , e tenendo conto delle (3.4), (3.9), (4.6), si ottiene:

$$(6.5) \quad y A^{-1} = (x A) A^{-1} = x (A A^{-1}) = x I = x.$$

Quindi, se esiste una operazione A di Γ che porta x in y , esiste anche la A^{-1} che porta y in x ; cioè se vale la (6.1), vale anche la:

$$(6.6) \quad y \approx x;$$

dunque, per la relazione indicata con \approx vale la proprietà simmetrica.

Infine supponiamo che valga (6.1), e quindi la (6.2); e supponiamo anche che esista in X un elemento z tale che:

$$(6.7) \quad y \approx z;$$

esista cioè in Γ una operazione B tale che sia:

$$(6.8) \quad z = y B.$$

Allora, operando su entrambi i membri della (6.2) con B , tenendo conto della (3.9), avremo:

$$(6.9) \quad y B = x (A B) = z;$$

ma, per l'Assioma I dei gruppi (N. 4), $A B$ è un'operazione di Γ ; quindi la (6.9) dice che z si ottiene da x con una operazione di Γ , ossia si ha:

$$(6.10) \quad x \approx z,$$

come conseguenza della (6.1) e della (6.7). Quindi per la relazione indicata con \approx vale anche la proprietà transitiva. Pertanto questa relazione possiede le tre proprietà caratteristiche di una relazione di equivalenza; d'ora innanzi quindi la indicheremo con il simbolo solito \equiv .

7 - Le idee fondamentali della geometria delle trasformazioni.

Nel Numero precedente abbiamo visto che un gruppo Γ di trasformazioni di un insieme X su se stesso permette di stabilire nell'insieme una relazione di equivalenza, e quindi di ripartire l'insieme stesso in classi di equivalenza. Nel N. 5 abbiamo osservato che se due elementi di X appartengono alla medesima classe di equivalenza rispetto ad una certa relazione, ciò può essere espresso dicendo che entrambi gli elementi posseggono la "qualità" ovvero la "proprietà" che caratterizza la classe di equivalenza in parola. Quindi la esistenza di gruppi di trasformazioni dell'insieme X su se stesso permette di mettere in evidenza certe proprietà degli elementi dell'insieme. Tali proprietà risultano comuni a tutti gli elementi della classe di equivalenza; e poiché tali elementi si ottengono tutti l'uno dall'altro mediante trasformazioni del gruppo Γ , tali proprietà non cambiano quando si sottopone un elemento dell'insieme X ad una qualunque trasformazione del gruppo; esse vengono quindi a ragione chiamate gli invarianti del gruppo (alcuni Autori sogliono parlare al femminile, parlando "delle invarianti" del gruppo; ma ovviamente il concetto non cambia).

È questo il punto di vista che viene assunto in quella dottrina che nei programmi viene chiamata "Geometria delle trasformazioni". Non si tratta ovviamente di un insieme di risultati nuovi che riguardano gli enti della geometria, ma di un certo modo di guardare alle proprietà geometriche e di impostare una visione globale della geometria.

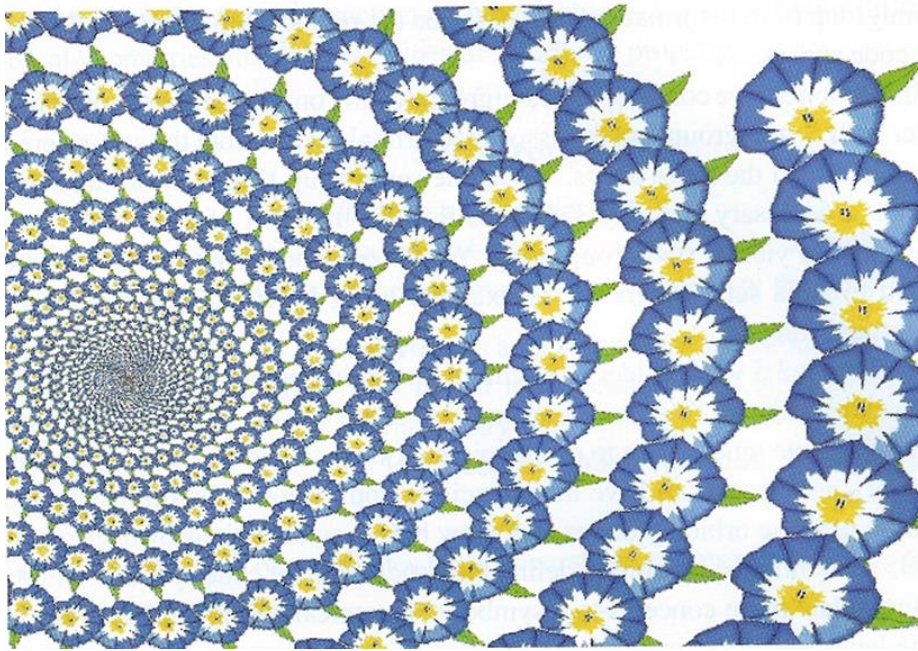
Possiamo ricordare che questa impostazione, che conduce ad un nuovo modo di guardare alla geometria trae il suo fondamento da un'opera giustamente celebre del matematico tedesco Felix Klein; questi espose le sue idee in una lezione inaugurale, da lui tenuta presso l'Università di Erlangen, in occasione dell'inizio dei suoi corsi presso quella Università. Tale lezione viene oggi spesso ricordata con l'espressione "Programma di Erlangen" [il titolo tedesco originale della lezione di Klein è "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", ed è stato tradotto in italiano (da G. Fano) con la frase: "Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti"].

Si può osservare che i vecchi contenuti della geometria classica possono essere esposti in questa nuova luce, e secondo questo nuovo punto di vista. Valga qualche esempio; supponiamo provvisoriamente di sapere che cosa si intende per "spostamento rigido" di una figura (ritorneremo in seguito sull'argomento); è facile verificare che gli spostamenti rigidi nel nostro spazio costituiscono un gruppo di trasformazioni (nel senso ampio di cui abbiamo detto nel N. 1), perché soddisfano agli assiomi I), II), III), IV) enunciati nel N. 4. Sia X l'insieme dei segmenti rettilinei; allora due segmenti cosiffatti saranno messi nella stessa classe di equivalenza se esiste un movimento rigido che li porta l'uno sull'altro. La relazione che intercede tra due segmenti in questo caso viene chiamata "congruenza" da alcuni Autori; e la qualità, o proprietà comune a tutti i segmenti che possono essere portati l'uno sull'altro con un movimento rigido può essere chiamata "lunghezza"; invero questa è la stessa per tutti i segmenti della medesima classe di equivalenza, e quindi la lunghezza è l'invariante che caratterizza i segmenti rettilinei rispetto al gruppo dei movimenti rigidi.

Ancora: consideriamo un insieme finito di poligoni piani, che diremo elementari (per esempio i pezzi del gioco detto "tangram"); e sia X l'insieme di tutti i poligoni che si ottengono accostando tutti i poligoni elementari, in modo che due quali si vogliano di questi abbiano in comune soltanto una parte del contorno. In questo caso abbiamo ancora un gruppo di trasformazioni: ogni operazione del gruppo consiste nello smontare un poligono e nel costruirne un altro, accostando in modo diverso le parti elementari. Si ottiene con questo gruppo una classe di equivalenza di poligoni piani, e la proprietà comune a tutti i poligoni equivalenti viene chiamata "area" dei poligoni stessi. Questa è dunque l'invariante del gruppo di operazioni le quali, in questo caso, possono essere chiamate trasformazioni, con un vocabolo il cui significato è abbastanza vicino a quello che viene preso dal termine nel linguaggio comune. Pertanto si può presumere che quest'esempio susciti minori perplessità, del tipo di quelle di cui si è detto nel N. 1.

Nell'ordine di idee che abbiamo cercato di presentare nei numeri precedenti, quell'insieme di concetti, di teoremi e di procedure che viene abitualmente indicato come "geometria elementare" viene caratterizzato da un gruppo di trasformazioni sul quale ora rifletteremo. Infatti all'inizio della trattazione geometrica vengono di solito presentati quelli che, nella trattatistica classica, venivano chiamati "criteri di uguaglianza dei triangoli"; in questo contesto, il termine "criterio" significa ovviamente "condizione sufficiente" (infatti per esempio, per quanto riguarda quello che viene chiamato "primo criterio di uguaglianza", si legge che, dati due triangoli, aventi rispettivamente i vertici A, B, C ed A', B', C' , è sufficiente che siano valide le uguaglianze tra le coppie di lati: AB ed $A'B'$, AC ed $A'C'$ ed infine tra i due angoli che hanno rispettivamente i vertici in A ed in A' perché l'uguaglianza valga anche tra le altre coppie di elementi di nomi uguali; e quindi perché i due triangoli possano essere detti uguali tra loro). È superfluo osservare che questi criteri costituiscono il punto di partenza per gli sviluppi successivi della geometria elementare, e permettono di dimostrare molti tra i teoremi classici: per esempio le proprietà dei parallelogrammi, quelle della circonferenza ecc.

Si può concludere che, nelle trattazioni abituali della geometria elementare, il trasporto rigido di una figura viene accettato come un'operazione chiara e ben nota, le cui proprietà vengono considerate come evidenti, con un atteggiamento psicologico che si fonda sulle esperienze quotidiane che noi compiamo sugli oggetti che ci circondano; invero, nella concezione comune, un oggetto viene considerato "rigido" se non cambia visibilmente di forma e di dimensioni quando venga manipolato, con l'impiego di forze che non superano le forze muscolari che noi mediamente sappiamo esprimere. Nel Numero precedente abbiamo già preso in considerazione gli spostamenti rigidi delle figure, ed abbiamo osservato che essi possono esser considerati come gli elementi di un gruppo di trasformazioni, sia pure prendendo il termine "trasformazione" nel senso di cui abbiamo parlato nel N. 1. Tuttavia l'operazione di trasporto rigido dà luogo ad una relazione che può essere ulteriormente generalizzata; si giunge così alla trasformazione che viene chiamata "isometria". Questa viene definita come l'operazione che genera una corrispondenza biunivoca (bijezione) tra figure, nella quale segmenti corrispondenti (cioè che hanno estremi in coppie di punti corrispondenti) ed angoli corrispondenti risultano uguali. Si osserva che, quando si operi su un piano, si possono prendere in considerazione delle corrispondenze che si ottengono con movimenti rigidi che muovono le figure senza farle uscire dal piano; ed altre corrispondenze, come le simmetrie rispetto ad una retta, che si possono ottenere soltanto "ribaltando" il piano, facendolo cioè ruotare attorno ad una sua retta. Quando poi si considerano le corrispondenze tra figure dello spazio, si osserva che esistono delle isometrie che si possono ottenere con movimenti rigidi dello spazio; ma esistono anche corrispondenze, come le simmetrie (*) speculari rispetto ad un piano, che non possono essere ottenute con movimenti rigidi dello spazio; quindi l'operazione che stabilisce la corrispondenza tra due figure, che sono l'una l'immagine speculare dell'altra rispetto ad un piano, non può essere realizzata materialmente, per esempio su modelli concreti. Ma ciò non toglie che le considerazioni che svolgiamo siano sempre completamente valide, perché sono fondate sulla definizione di isometria e sulle deduzioni rigorose. Abbiamo detto che il concetto di spostamento rigido di una figura viene accettato come immediatamente evidente, sulla base di numerosissime esperienze concrete che noi eseguiamo quotidianamente. Esistono tuttavia altre numerose esperienze, le quali riguardano le sensazioni con le quali noi rileviamo la somiglianza di forma tra due oggetti: per esempio noi percepiamo la somiglianza tra un volto e la sua immagine fotografica, accettiamo come immediate le rappresentazioni degli oggetti o delle figure che si ottengono rimpicciolendo o ingrandendo "in scala" (come si dice) certe immagini, e non abbiamo dubbi sul fatto che due circonferenze, anche di raggio diverso, hanno uguale forma; e che la stessa relazione di uguaglianza di forma sussista anche tra due quadrati, quali che siano i loro lati. Pertanto possiamo anche accettare come evidente una relazione tra figure geometriche che nasce quando esse hanno uguali forme, anche se non sono trasportabili l'una sull'altra con un movimento rigido.



...uguali forme...

È noto che due figure cosiffatte vengono chiamate *simili*, e la relazione intercedente tra loro viene chiamata *similitudine*; inoltre la geometria elementare presenta dei "criteri di similitudine" tra figure, che hanno significato analogo di quelli di uguaglianza, di cui abbiamo detto.

Osserviamo tuttavia che, nel caso della similitudine, questa viene percepita e considerata più frequentemente piuttosto come una relazione tra figure che come il risultato di un'operazione eseguita sulle figure stesse. Tuttavia è facile mostrare che anche la relazione di similitudine tra due figure può essere ottenuta con certe operazioni (concrete o ideali), che costituiscono un gruppo, del quale le isometrie sono un sottogruppo.

Nella trattazione euclidea classica, ed in tutta la didattica e la produzione manualistica tradizionale, non si è mai ritenuto necessario trattare esplicitamente delle trasformazioni alle quali le figure vengono sottoposte. Come abbiamo detto, in Euclide si dà per nota la possibilità di trasportare rigidamente un triangolo, e su questa nozione, data implicitamente per chiara e conosciuta, viene costruito l'edificio successivo della geometria classica. Inoltre, quando si fanno delle deduzioni, oppure si utilizzano dei disegni, si dà per noto e scontato il fatto che si possano fare delle rappresentazioni "in scala", appoggiandosi alle quali si sviluppano i ragionamenti e le deduzioni; e non si avanza alcun dubbio sul fatto le conclusioni che si traggono abbiano validità per qualunque figura.

Pertanto la trattazione classica degli argomenti di geometria elementare si fonda su esperienze molto comuni, le quali giustificano la sensazione ed il giudizio di "evidenza", abitualmente pronunciato sulle proposizioni che esprimono i contenuti di queste esperienze. Tuttavia la critica dei fondamenti della matematica richiede che una teoria rigorosa non possa essere fondata sulla pretesa "evidenza" di certe proposizioni: invece, all'inizio della esposizione di una teoria, occorre enunciare chiaramente i termini che non si definiscono esplicitamente, e le proposizioni che non si dimostrano, e che forniscono la definizione implicita dei termini sopra nominati. In particolare, con riferimento alla relazione di uguaglianza ed al concetto di trasporto rigido delle figure, è chiaro che occorre scegliere di definire l'uguaglianza mediante il trasporto rigido, oppure di definire il trasporto rigido sulla base dell'uguaglianza, supposta nota.

È chiaro tuttavia che l'impostazione di un lavoro didattico efficace non può condurre alla presentazione di una teoria completa, nella forma rigorosa e generale che è richiesta dalla critica dei fondamenti; occorrerebbe invece far maturare progressivamente nei discenti la richiesta della chiarezza e del rigore, richiesta che viene soddisfatta appunto nella precisazione esplicita dei punti di partenza, che si ottiene con la scelta e l'enunciazione esplicita di assiomi in numero

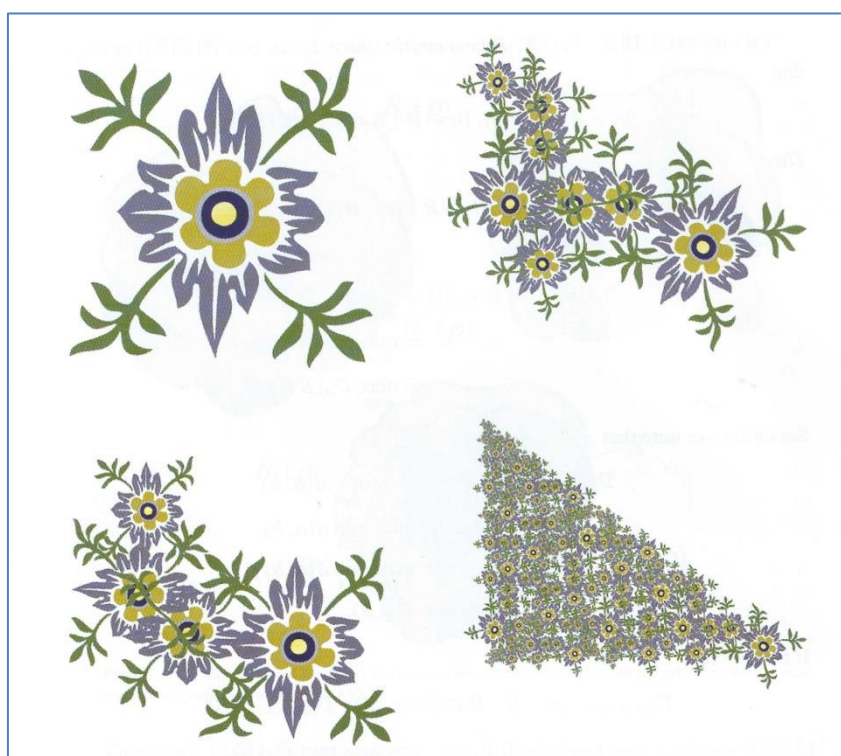
sufficiente; assiomi che forniscono la definizione implicita dei concetti ed i punti di partenza per le deduzioni ineccepibili.

9 - Le isometrie del piano.

Abbiamo già accennato alla impostazione che si adotta abitualmente per presentare la geometria elementare del piano. I punti di partenza di questa impostazione sono di solito presentati parlando di "criteri di uguaglianza dei triangoli".

INDICE

1. I gruppi delle matrici quadrate di ordine 2. P. 14
2. Gruppi di trasformazioni di vettori. P. 15
3. I gruppi delle trasformazioni del piano. Affinità ed isometrie. P. 18
4. *I gruppi delle similitudini del piano. La geometria elementare.*
5. *I gruppi delle matrici quadrate di ordine 3.*
6. *Gruppi di trasformazioni di vettori a tre componenti.*
7. *Affinità ed isometrie dirette dello spazio.*
8. *Similitudini nello spazio. Le trasformazioni della geometria elementare.*
9. *Il piano proiettivo e le omografie.*
10. *Classificazione delle omografie piane.*
11. *L'assoluto del piano e l'interpretazione proiettiva degli invarianti della geometria elementare.*
12. *Classificazione delle omografie dello spazio*
13. *L'assoluto dello spazio e l'interpretazione proiettiva degli invarianti della geometria elementare.*



1 - I gruppi delle matrici quadrate di ordine 2.

Dedicheremo questa seconda parte alla rappresentazione simbolica degli enti e dei concetti presentati nella prima parte. Si può osservare che, per quanto riguarda le trasformazioni della geometria elementare, gli ordinari strumenti della geometria analitica, nel campo reale, basterebbero per dare una trattazione completa di tutti i concetti che ci interessano; tuttavia si constata facilmente che gli strumenti e le procedure abituali darebbero luogo a calcoli forse troppo lunghi e complicati; ed in questo caso il conseguimento dei risultati sarebbe forse troppo faticoso, e le espressioni ottenute sarebbero forse poco facilmente leggibili. Quindi abbiamo scelto di utilizzare gli strumenti e le convenzioni dell'algebra delle matrici, che permettono di rappresentare in forma sintetica e precisa i calcoli, e di mettere in evidenza anche l'apporto delle idee fondamentali della geometria delle trasformazioni all'argomento che stiamo svolgendo. Indicheremo con

$$(1) \quad a, b, c, \dots, a', b', c', \dots, x, y, z, \dots, x', y', z', \dots$$

dei numeri reali. Indicheremo con lettere latine maiuscole, come A, B, C, \dots, I, \dots delle matrici quadrate di secondo ordine; porremo per esempio:

$$(1.2) \quad A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

ed indicheremo, secondo il solito, col simbolo $|A|$ il determinante della A :

$$(1.3) \quad |A| = a d - b c.$$

Col simbolo I indicheremo la matrice identica:

$$(1.4) \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ricordiamo l'operazione di "prodotto righe per colonne" di due matrici; posto:

$$(1.5) \quad A' = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix},$$

si definisce, come è noto, come *prodotto*, e si indica con $A A'$ la matrice:

$$(1.6) \quad A A' = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

È noto che per il prodotto ora definito vale la proprietà associativa; inoltre esso è distributivo rispetto all'operazione di somma di matrici.

L'operazione di trasposizione di una matrice A verrà indicata apponendo a destra di A il simbolo T ; come è noto, valgono per le operazioni di trasposizione le regole formali espresse dalle formule seguenti:

$$(1.6 \text{ bis}) \quad (A^T)^T = A; (A + B)^T = A^T + B^T; (A B)^T = B^T A^T.$$

Nella ipotesi fondamentale che si abbia:

$$(1.7) \quad |A| \neq 0$$

ha senso considerare la matrice A^{-1} che viene chiamata *inversa* della A e che viene definita dalla relazione:

$$(1.8) \quad |A| A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

I) Le matrici quadrate del secondo ordine, a determinante diverso da zero, costituiscono un gruppo, quando si assuma come operazione di composizione il prodotto sopra ricordato, si assuma come elemento neutro la matrice I e si assuma come elemento inverso di un elemento A la matrice A^{-1} definita dalla (1.8). Tale gruppo sarà indicato col simbolo abituale $GLR(2)$. Esso è un gruppo continuo a 4 parametri.

II) Indicheremo con il simbolo $U(2)$ il gruppo delle matrici quadrate il cui determinante vale $+1$. Pertanto si avrà:

$$(1.9) \quad A \in U(2) \Leftrightarrow |A| = +1.$$

Il gruppo $U(2)$ è continuo a 3 parametri, ed è sottogruppo normale di $GLR(2)$.

III) Indichiamo ora con J la matrice:

$$(1.10) \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poniamo poi:

$$(1.11) \quad A' = A J, A \in U(2),$$

ed indichiamo con il simbolo $U'(2)$ il gruppo che si ottiene ampliando il gruppo $U(2)$ con la matrice J . Tale gruppo ammette $U(2)$ come sottogruppo normale di indice 2. Per i determinanti delle matrici del gruppo $U'(2)$ vale la relazione

$$(1.11 \text{ bis}) \quad A \in U'(2) \Leftrightarrow |A| = \pm 1.$$

IV) Indicheremo con simbolo $Q(2)$ il particolare sottogruppo di $GLR(2)$ costituito dalle matrici del tipo:

$$(1.12) \quad R = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

con la condizione:

$$(1.13) \quad |R| = a^2 + b^2 = 1.$$

Le matrici come R , con la condizione (1.13), vengono chiamate *ortogonali*.

Nel caso di una matrice ortogonale R , si ha che la inversa R^{-1} , data da:

$$(1.14) \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

coincide con la trasposta R^T . Si ha quindi, per una matrice ortogonale R :

$$(1.15) \quad R^{-1} = R^T.$$

Si verifica che il gruppo $Q(2)$ è abeliano (commutativo), continuo, ad un parametro.

V) Poniamo ora:

$$(1.16) \quad R' = R J = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

Tenendo conto delle (1.13) si verifica che si ha:

$$(1.17) \quad R'^2 = J^2 = I,$$

e quindi è anche ovviamente:

$$(1.18) \quad R = R' J^{-1} = R' J.$$

Indicheremo qui con il simbolo $Q'(2)$ il gruppo che si ottiene ampliando il gruppo $Q(2)$ con la matrice J . Anche il gruppo $Q'(2)$ è un gruppo ad un parametro. Si verifica che $Q(2)$ è sottogruppo normale di indice 2 in $Q'(2)$. Si verifica con facili calcoli diretti che il prodotto di due matrici del tipo R' è una matrice di $Q(2)$.

VI) Indicato con m un numero reale positivo, tale cioè che sia:

$$(1.19) \quad 0 < m,$$

indicheremo con il simbolo $\Sigma(2)$ il gruppo costituito dalle matrici quadrate di ordine 2 del tipo:

$$(1.20) \quad S = m A, A \in Q(2).$$

Il gruppo Q è sottogruppo di Σ , perché le matrici del tipo (1.12), con le condizioni (1.13), si ottengono da quelle (1.20) ponendo $m = 1$. Il gruppo è un gruppo continuo a due parametri.

VII) Indicheremo con il simbolo $\Sigma'(2)$ il gruppo che si ottiene ampliando il gruppo $\Sigma(2)$ con la matrice J , sopra definita in (1.10). Si verifica che il gruppo $\Sigma(2)$ è sottogruppo normale di $\Sigma'(2)$.

2 - Gruppi di trasformazioni lineari di vettori.

I vettori del tipo:

$$(2.1) \quad \alpha = [x, y]$$

saranno considerati come matrici ad una riga, cioè, come suol dirsi, come "vettori-riga"; i corrispondenti vettori-colonna

verranno indicati apponendo l'operatore di trasposizione; quindi per esempio il simbolo α^T indicherà il vettore con due righe ed una colonna che si ottiene per trasposizione del vettore α .

Le matrici ricordate nel Numero precedente saranno considerate come operatori sui vettori a due componenti. Precisamente, considerata una matrice A qualunque, appartenente ad uno dei gruppi visti nel Numero precedente, e considerato un vettore α a due componenti, la corrispondenza data da:

$$(2.2) \quad \alpha' = \alpha A, \quad a = \alpha' A^{-1}$$

è chiaramente una trasformazione lineare sullo spazio vettoriale dei vettori a due componenti. Considerato uno dei gruppi visti nel Numero precedente, diremo *invariante del gruppo* una funzione delle componenti di uno o più vettori che non cambia di valore quando i vettori stessi siano sottoposti ad una qualunque operazione del gruppo in parola.

È chiaro che, quando si sia costruito un invariante F di un gruppo, ogni funzione di F sarà pure invariante per lo stesso gruppo; e che ogni invariante per un certo gruppo sarà pure invariante per ogni suo sottogruppo. Costruiremo qui alcuni tra gli invarianti dello spazio vettoriale reale a due dimensioni in relazione ai gruppi di matrici considerate nel Numero precedente; sceglieremo quegli invarianti che entrano più frequentemente nelle argomentazioni della geometria elementare e quindi sono considerati più significativi da questo punto di vista.

1. Gruppo $GLR(2)$.

Consideriamo due vettori, $\alpha = [x, y]$ e $\sigma = [u, v]$ dati dalle (2.1); sia D la matrice quadrata di ordine 2 le cui righe sono rispettivamente le componenti di a e di σ ; sia dunque:

$$(2.3) \quad D = \begin{bmatrix} a & b \\ u & v \end{bmatrix}.$$

Indichiamo con D' la matrice che si ottiene dai due vettori α' e σ' ; si ha che vale la:

$$(2.4) \quad |D'| = |D||A|.$$

Pertanto per il gruppo $GLR(2)$ la sola proprietà invariante di una coppia di vettori è espressa quando sia

$$(2.5) \quad |D| = 0.$$

Vedremo nel seguito quale sia il significato geometrico della condizione (2.5).

In relazione alla (2.2) si pone il problema di determinare un eventuale vettore a' che sia multiplo di a secondo un numero reale t . Un vettore cosiffatto viene chiamato abitualmente un *autovettore* (eigenvektor) della trasformazione. Un tale vettore è quindi soluzione della equazione (vettoriale) che si ottiene facendo sistema della (2.2) e della condizione:

$$(2.6) \quad \alpha' = t \alpha$$

essendo, come si è detto, t un numero reale.

Dalle (2.2) e (2.6) si trae la relazione:

$$(2.7) \quad \alpha [tI - A] = 0;$$

l'equazione vettoriale ha ovviamente sempre la soluzione:

$$(2.8) \quad \alpha = 0;$$

dalla teoria dei sistemi di equazioni lineari si ha che condizione necessaria e sufficiente perché l'equazione vettoriale (2.7) abbia come soluzione dei vettori diversi dal vettore nullo è che si abbia:

$$(2.9) \quad |tI - A| = 0.$$

La (2.9) si traduce in un'equazione algebrica di II grado nella incognita t , i cui coefficienti sono funzioni razionali intere degli elementi della matrice A . Tale equazione viene chiamata "equazione caratteristica" della matrice. Per esempio, nel caso della matrice A data dalla (1.2), l'equazione caratteristica (2.9) è data da:

$$(2.10) \quad t^2 - (a + d)t + (a \cdot d - b \cdot c) = 0.$$

Le radici dell'equazione (2.10) vengono chiamate *autovalori* oppure (più raramente) "valori propri" (eigenvalues) della matrice A . La natura e le caratteristiche delle radici dell'equazione (2.10) possono essere determinate con le abituali

procedure di discussione delle equazioni algebriche a coefficienti reali. Ovviamente, nel caso della (2.10), ognuno dei casi classici (radici reali e distinte, radici complesse coniugate, radice doppia) ha un significato geometrico, che richiameremo se ne sarà il caso.

Supponendo che esista una radice reale μ della (2.10), l'equazione vettoriale:

$$(2.11) \quad \alpha [\mu I - A] = 0$$

ammette come soluzione almeno un vettore α diverso dal vettore nullo; e, se esiste un vettore α che è soluzione, tutti i suoi multipli $k\alpha$ sono pure soluzioni della stessa equazione (2.11). In generale, si verifica che, dati due vettori soluzioni della (2.11), ogni loro combinazione lineare è pure soluzione della stessa equazione. La discussione generale dei casi che si possono presentare richiede analisi minute, sulle quali torneremo in seguito.

2. Gruppo $U(2)$.

Dalla (2.4) e dalla ipotesi $|A| = 1$, che caratterizza le matrici del gruppo, si trae che il determinante della matrice D , costruita in relazione alla coppia di vettori α e σ , è un invariante del gruppo; il significato geometrico di tale invariante sarà visto in seguito.

3. Gruppo $U'(2)$.

Dalla (1.11 bis) si trae che in questo caso il quadrato del determinante della matrice D è un invariante del gruppo.

4. Gruppo $Q(2)$.

Dalla (1.6 bis) e dalle proprietà delle matrici del gruppo $Q(2)$ si trae che il numero:

$$(2.12) \quad \alpha \sigma^T = \sigma \alpha^T = u x + v y$$

è un invariante della coppia di vettori α e σ per le matrici del gruppo; tale invariante viene chiamato anche *prodotto scalare* dei due vettori interessati. In particolare se i due vettori coincidono, se per esempio si ha

$$(2.13) \quad \alpha = \sigma,$$

l'invariante che si ottiene è ovviamente non negativo, e nullo soltanto nel caso in cui sia $\alpha = 0$. La radice quadrata di tale numero viene chiamata *norma* o anche *modulo* del vettore α , ed indicata con il simbolo $|\alpha|$, ponendo quindi:

$$(2.14) \quad |\alpha|^2 = \alpha \alpha^T = x^2 + y^2.$$

Ponendo:

$$(2.15) \quad c = (ux + vy)/|\alpha||\sigma|$$

si dimostra che per il numero c valgono le limitazioni:

$$(2.16) \quad -1 \leq c \leq +1;$$

quindi esiste un angolo θ tale che si abbia:

$$(2.17) \quad c = \cos \theta.$$

Tale angolo θ viene detto anche *angolo tra i due vettori*. In particolare se si ha $c = 0$ i due vettori vengono detti *ortogonali* tra loro.

Supponendo che i due vettori α e σ non siano ortogonali fra loro, si verifica che il numero:

$$(2.18) \quad |D|/(ux + vy)$$

[dove $|D|$ è il determinante della matrice definita da (2.3)], è pure un invariante del gruppo $Q(2)$.

Facili calcoli di trigonometria conducono a concludere che l'invariante fornisce un valore della funzione tangente dell'angolo θ definito dalla (2.15). Si osserva inoltre che il numeratore dell'invariante (2.18) ha un segno che dipende dall'ordine nel quali i due vettori α e σ sono considerati.

Gli invarianti ora messi in evidenza forniscono anche una interpretazione geometrica degli elementi di una matrice del gruppo $Q(2)$; a tal fine scegliamo il vettore α in modo che abbia modulo 1, e poniamo nella (2.15)

$$(2.19) \quad \sigma = \alpha A;$$

allora dalle (2.15) e (2.17) si ottiene:

$$(2.20) \quad a = \cos \theta.$$

Allora dalla (1.13) si ha:

$$(2.21) \quad b = \sin \theta.$$

Si verifica poi che il valore dell'invariante dato dalla (2.18), quando si mettano le componenti del vettore σ alla prima riga della matrice D , è:

$$(2.22) \quad b/a = \tan \theta.$$

Si verifica che, nel caso della matrice A data dalla (1.12), con le condizioni (1.13) (matrice ortogonale), l'equazione caratteristica (2.10) si riduce a:

$$(2.23) \quad t^2 + 1 = 0.$$

Non esistono quindi autovalori reali ed autovettori reali. Il che conferma l'interpretazione geometrica della trasformazione vettoriale, che in questo caso ha significato di rotazione dell'angolo θ , definito dalla (2.20).

5. Gruppo $Q'(2)$.

Gli invarianti del gruppo $Q'(2)$ sono quelli del gruppo $Q(2)$, con l'eccezione dell'invariante definito dalla (2.18). Infatti la matrice J , definita dalla (1.10), cambia il segno del numeratore dell'invariante (2.18). Pertanto, per il gruppo $Q'(2)$, è invariante soltanto il quadrato del numero dato dalla (2.18).

Si verifica che, nel caso della matrice A' , definita dalla (1.16), l'equazione caratteristica diventa:

$$(2.24) \quad t^2 - 1 = 0;$$

si hanno quindi due autovalori reali, cioè ± 1 ; all'autovalore $+1$ corrisponde l'insieme di autovettori $k [b, 1-a]$; all'autovalore -1 corrisponde l'insieme di autovettori $k [-b, 1+a]$.

Precisamente, ponendo:

$$(2.25) \quad \hat{u} = [b, 1 - a],$$

si ha:

$$(2.26) \quad \hat{u} = \hat{u} A',$$

e ponendo:

$$(2.27) \quad \hat{o} = [-b, 1+a]$$

si ha:

$$(2.28) \quad \hat{o} = -\hat{o} A'.$$

Si verifica che si ha:

$$(2.29) \quad \hat{u} \hat{o}^T = \hat{o} \hat{u}^T = 0;$$

cioè i due autovettori della matrice A' sono ortogonali tra loro.

6. Gruppo $\Sigma(2)$.

Un vettore singolo non ha invarianti rispetto alle operazioni di questo gruppo. Dati due vettori, α e σ , sono invarianti per il gruppo: il rapporto dei moduli, dato da:

$$(2.30) \quad |\alpha|/|\sigma|,$$

e gli invarianti definiti dalla (2.15) e (2.18).

7. Gruppo $\Sigma'(2)$.

Gli invarianti del gruppo $\Sigma'(2)$ sono quelli del gruppo $\Sigma(2)$, con la sola eccezione dell'invariante definito dalla (2.18). Infatti la matrice J , definita dalla (1.10), cambia il segno del numeratore dell'invariante definito dalla espressione in parola. Quindi per il gruppo $\Sigma'(2)$ risulta invariante soltanto il quadrato dell'espressione stessa.

3 - I gruppi delle trasformazioni del piano. Affinità ed isometrie.

Indichiamo con β un vettore a due componenti, ponendo:

$$(3.1) \quad \beta = [h, k];$$

indichiamo con il simbolo 0^T il vettore-colonna zero a due componenti, e con A una matrice quadrata di ordine 2 a determinante non nullo; costruiamo una matrice M quadrata di ordine 3, nella forma seguente:

$$(3.2) \quad M = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0^T & A \end{bmatrix}.$$

Diremo che la matrice M è stata ottenuta "accostando" delle sottomatrici quadrate e dei vettori. Sia anche:

$$(3.3) \quad M' = \begin{bmatrix} 1 & \beta' \\ 0^T & A_1 \end{bmatrix};$$

si ha:

$$(3.4) \quad M M' = \begin{bmatrix} 1 & \beta' + \beta A_1' \\ 0^T & A A_1 \end{bmatrix}.$$

Si trae di qui, con immediati passaggi, che le matrici quadrate del tipo della M , data dalla (3.2), formano un gruppo; in questo l'elemento neutro è dato dalla (3.2), in cui si ponga $A = I$, $\beta = 0$, e l'inversa M^{-1} della M si ottiene dalla (3.2) sostituendo A con A^{-1} e β con $-\beta \cdot A^{-1}$.

Si consideri ora un piano dello spazio, e si scelga su di esso un verso di rotazione, che verrà chiamato convenzionalmente positivo. Per esempio possiamo scegliere l'ordinario verso di rotazione antiorario, rispetto ad un osservatore che guarda la faccia positiva del piano. Supponiamo fissato nel piano un riferimento cartesiano ortogonale monometrico, e siano x ed y le coordinate di un punto P del piano rispetto a tale riferimento.

Assoceremo convenzionalmente ai punti del piano dei vettori a tre componenti, del tipo:

$$(3.5) \quad p = [1, x, y], p' = [1, x', y'].$$

Ricordando le notazioni (2.1), tali vettori verranno anche scritti nelle forme:

$$(3.6) \quad p = [1 | \alpha], p' = [1 | \alpha'];$$

ed anche dei vettori p e p' si dirà che sono stati ottenuti "per accostamento".

Con queste notazioni si verifica che ponendo:

$$(3.7) \quad p' = p M$$

si ottiene tra i punti del piano una corrispondenza, che può essere chiamata "trasformazione" del piano. Tale trasformazione fornisce le coordinate del punto p' come funzioni lineari delle coordinate del punto p . Pertanto essa può essere chiamata trasformazione lineare. Ovviamente si avrà un gruppo di trasformazioni quando le matrici del tipo della M costituiscono un gruppo; se le matrici A che compaiono nella (3.2) appartengono ad un gruppo di matrici quadrate di ordine 2, il gruppo delle matrici M costruite secondo la (3.2) è omomorfo al gruppo a cui appartengono le matrici A ; ciò si deduce facilmente dalla (3.4).

Pertanto analizzeremo qui i gruppi di trasformazioni lineari del piano seguendo la classificazione dei gruppi di matrici quadrate di ordine 2, data nei Numeri precedenti. A tal fine associamo convenzionalmente un vettore a due componenti ad un vettore a tre componenti, avente la prima componente uguale a 0. Così il vettore avente le due componenti x, y sarà associato al vettore a tre componenti:

$$(3.8) \quad [0 | \alpha].$$

Con queste convenzioni si ha anche che un vettore a due componenti può essere identificato dalla differenza di due vettori a tre componenti rappresentanti due punti, del tipo:

$$(3.9) \quad p' - p = [0 | \alpha' - \alpha].$$

OSSERVAZIONE 1. Questa scelta di rappresentare un vettore come "differenza di due punti" è consona alle proposte fatte già da G. Peano, ed alle convenzioni adottate da molti autorevoli rappresentanti della scuola italiana di Meccanica

Razionale.

I) Gruppo delle affinità del piano.

Quando le matrici A delle espressioni (3.2) appartengono al gruppo $GLR(2)$ le trasformazioni del gruppo (3.7) vengono chiamate *affinità* del piano. Si osserva che la (3.7) si traduce nella

$$(3.10) \quad \alpha' = \alpha A + \beta,$$

che fornisce esplicitamente il legame tra le coordinate cartesiane di due punti corrispondenti nella trasformazione affine. Nella forma (3.10) è facile risolvere il problema della ricerca di eventuali punti coincidenti con i propri corrispondenti; è noto che, nella nomenclatura abituale, un punto cosiffatto viene chiamato punto *unito* della trasformazione. La ricerca di questi punti si fa ponendo nella (3.10):

$$(3.11) \quad \alpha' = \alpha,$$

ottenendo così l'equazione:

$$(3.12) \quad \alpha (I - A) = \beta.$$

Nell'ipotesi che si abbia:

$$(3.13) \quad |I - A| \neq 0$$

la (3.12) fornisce le coordinate di un unico punto unito nella forma:

$$(3.14) \quad \alpha = \beta [I - A]^{-1}.$$

La discussione completa dei casi in cui la condizione (3.13) non è soddisfatta si può fare molto più chiaramente operando nell'ambiente della geometria proiettiva, e pertanto la rimandiamo al seguito. Ci limitiamo qui a prendere in considerazione il caso in cui la (3.13) non è soddisfatta perché si ha:

$$(3.15) \quad A = I.$$

In questo caso infatti, dalla (3.4) si ottiene un gruppo T di trasformazioni del piano che è sottogruppo normale del gruppo delle affinità e che viene chiamato gruppo delle *traslazioni* del piano su se stesso. Ancora dalla (3.4) si ha che il gruppo T è abeliano. Tenendo presenti le convenzioni (3.8) e (3.9) si ha che il gruppo T agisce sui vettori del piano come l'identità.

Traducendo le formule (3.7) con le abituali convenzioni della geometria analitica si verifica che, dati due vettori α e σ , il determinante della matrice D , data dalla (2.3), è la misura dell'area del parallelogrammo che ha come lati non paralleli i due vettori in parola. Quindi la condizione (2.5) esprime il fatto che i due vettori suddetti sono paralleli tra loro.

II) Gruppo caratterizzato dalla condizione $A \in U(2)$.

In base a ciò che è stato detto poco sopra a proposito del significato del determinante della matrice D , ed in seguito alla (2.4), si ha che il gruppo di trasformazioni piane in cui $A \in U(2)$ è il sottogruppo delle affinità piane che conservano le aree dei parallelogrammi, e quindi di ogni figura piana la cui area possa essere determinata come somma (o come limite di somme) di aree di parallelogrammi.

È noto che, fissando nel piano un verso di rotazione, ovvero una pagina positiva del piano stesso, è possibile prendere in considerazione un segno per l'area di una figura piana a contorno regolare e non intrecciato; in particolare quindi è possibile assegnare un segno all'area di un parallelogrammo; qualora quest'ultimo sia assegnato mediante i due vettori determinati dai lati non paralleli, è possibile collegare il segno dell'area all'ordine in cui i vettori stessi sono enunciati, come abbiamo già detto.

Ancora ricordando la (2.4), si ha che la condizione $|A| = 1$ caratterizza quindi il gruppo delle affinità piane che conservano le aree delle figure, anche in segno.

III) Gruppo caratterizzato dalla condizione $A \in U'(2)$.

In base a ciò che è stato detto poco sopra a proposito del gruppo precedente, si ha che il gruppo delle trasformazioni piane in cui $A \in U'(2)$ è caratterizzato dal fatto di conservare i quadrati delle aree delle figure piane. Infatti, sempre in base alla

(2.4), esistono nel gruppo delle trasformazioni che cambiano il segno delle aree. Si verifica poi, con facili calcoli, che il prodotto di due trasformazioni di questo gruppo è una trasformazione del gruppo precedente.

IV) Gruppo caratterizzato dalla condizione $A \in Q(2)$.

Il significato geometrico dell'invariante $|a|$ è ovviamente quello di lunghezza del segmento che dà l'immagine geometrica del vettore a ; quando il vettore sia dato come differenza di due punti p' e p , come nella (3.9), l'invariante corrispondente è ovviamente la distanza dei due punti. Il significato geometrico degli altri invarianti è già stato dato nel Numero precedente in corrispondenza dell'analisi del gruppo $Q(2)$. Pertanto il gruppo che stiamo considerando è il gruppo dei movimenti rigidi del piano; movimenti che si possono eseguire senza far uscire il piano da se stesso e pertanto conservano il verso degli angoli.

La ricerca degli elementi uniti conduce a risolvere anche in questo caso il sistema costituito dalle (3.10) e (3.11). La condizione (3.13) è soddisfatta, con la sola eccezione del caso (3.14), cioè del caso delle traslazioni. In questo caso non esiste elemento unito, mentre in ogni altro caso esso è dato dalla (3.14). Ricordando le analisi svolte nel Numero precedente, ed in particolare le (2.21) e (2.22), si può concludere che ogni movimento rigido del piano su se stesso è una rotazione oppure una traslazione; e si verifica che le traslazioni formano un sottogruppo normale dei movimenti rigidi del piano.

V) Gruppo caratterizzato dalla condizione $A \in Q'(2)$.

Poiché $Q(2)$ è sottogruppo di $Q'(2)$, i nuovi invarianti che interessano qui sono quelli che si hanno quando la sottomatrice A della M sia del tipo (1.16).

La ricerca degli eventuali punti uniti in questo caso conduce alla soluzione dell'equazione, analoga alla (3.10):

$$(3.16) \quad \alpha = \alpha A' + \beta.$$

Di qui, tenendo presente la (1.17) ed operando su entrambi i membri con A' , si ottiene:

$$(3.17) \quad \alpha A' = \alpha + \beta A',$$

e dalle (3.16) e (3.17) si ottiene:

$$(3.18) \quad \beta [I + A'] = 0.$$

Pertanto, ricordando (2.25) e (2.27) si ha che, se esiste un punto unito per la trasformazione, in questa si deve avere necessariamente:

$$(3.19) \quad \beta = t \hat{\delta} = t [-b, 1 + a].$$

Inoltre dalla (2.26) si ha che, se esiste una soluzione α della (3.17), allora anche tutti i vettori:

$$(3.20) \quad \alpha + t \hat{u} = \alpha + t [b, 1 - a],$$

t essendo un numero reale qualunque, sono pure soluzioni della (3.17).

Il significato geometrico di questa proposizione può essere esposto dicendo che, se in una trasformazione del gruppo $Q'(2)$ esiste un punto unito, esiste una intera retta di punti uniti, che è perpendicolare al vettore $\hat{\delta}$. Pertanto in questo caso la trasformazione realizza il ribaltamento dell'intero piano, attorno alla retta in parola; questa viene spesso chiamata *asse* del ribaltamento.

Dalle proprietà che abbiamo messo in evidenza nel N. 1, ed in particolare dalla (1.17), si ha che il prodotto di due ribaltamenti ad assi paralleli è una traslazione del piano, nella direzione perpendicolare a quella degli assi nominati; ed il prodotto di due ribaltamenti ad assi concorrenti è una rotazione attorno al punto di incontro degli assi.

Si conclude pertanto che le operazioni del gruppo $Q'(2)$, con i loro prodotti, generano tutte le isometrie del piano su se stesso.

Note.

1. Il tema delle Trasformazioni geometriche si trova in molti interventi di CFM.

In particolare, un riassunto della presente trattazione si trova nelle note per una conferenza alla Mathesis, Milano, 13 marzo 1996. Conferenza su: [Trasformazioni geometriche e problemi](#). Il testo della [Conferenza](#). Una testimonianza del pubblico: [Testimonianza su Trasformazioni geometriche e problemi](#).

Si può vedere inoltre

[Movimenti rigidi polari nello spazio euclideo](#). (1995)

2. (*) Sulle simmetrie, in un ordine di idee legato anche ai gruppi di trasformazioni, si può vedere l'intervento di Renato Betti, nel Dossier Simmetria e matematica | *MatePristem*

<http://matematica.unibocconi.it/dossier/simmetria-e-matematica>

Dal Dossier riportiamo la bibliografia.



**Simmetria:
una scoperta matematica**

a
cura di R. Betti, E. Marchetti, Luisa Rossi Costa

Polipress
2007 Politecnico di Milano, Milano

pag.83

[1] Armstrong M.A., Groups and Symmetry, Springer, 1988

[2] Caglioti G., Simmetrie infrante, nella scienza e nell'arte, Clup, Milano 1983

[3] Dedò M., Forme. Simmetria e topologia, Zanichelli, Bologna 1999

[4] Jablan S.V, Teory of Symmetry and Ornaments, Beograd Mat. Institut n. 17, 1995 (reperibile in <http://www-sbras.nsc.ru/EMIS/monographs/jablan/>)

[5] Lockwood E.H., Macmillan, R.H., Geometric Symmetry, Cambridge University Press, 1978

[6] Martin G.E., Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry, Springer, 1982

[7] Weyl H., La simmetria, Feltrinelli, 1962

[8] www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/sym.html