Carlo Felice Manara

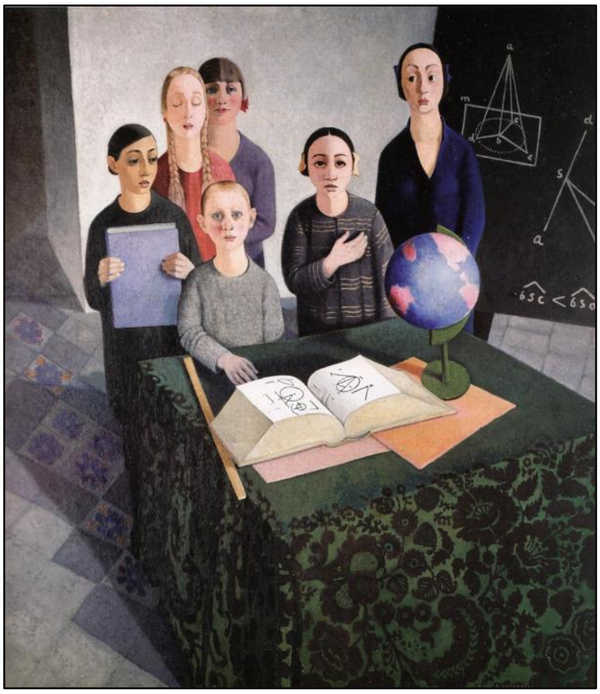
LA MATEMATICA di BASE

PER

INSEGNANTI DI SOSTEGNO

Dispense riviste dall'autore

Milano, 1993
Dispense rieditate maggio 2018



Felice Casorati. (1927). Museo di Arte Moderna di Palermo.

INDICE

INTRODUZIONE

"...sempre m'è spiaciuto così porsi, in una openione, quando le cose non son chiare, che la contraria parte debba biasimarsi, parendomi esser lecito che, ove la ragione non ci sforza, possa ciascuno quella parte tenere che più gli aggrada." [Matteo Maria Bandello. Novelle Italiane. Novella III].

1. Qualcuno può forse pensare che l'insegnamento della matematica elementare sia un compito relativamente semplice e facile; tale era quasi certamente il pensiero di coloro i quali, vari decenni fa, hanno compilato i programmi d'insegnamento per la scuola elementare, seguendo le idee di una filosofia idealistica, che dominava tra i consiglieri del regime allora imperante; filosofia che, per usare un eufemismo, non attribuiva alla matematica molto valore conoscitivo e formativo. In epoca più vicina a noi, un pensiero analogo pare sia stato condiviso da certi contestatori della scuola: infatti, nel libro della "scuola di Barbiana", intitolato "Lettera a una professoressa", si possono leggere, tra le altre, le frasi seguenti:

" *...Per insegnare la matematica alle elementari basta sapere quella delle elementari. Chi ha fatto la III media ne ha 3 anni di troppo. Nel programma delle magistrali si può dunque abolire. Non è vero che occorra la laurea per insegnare matematica alle medie: è una bugia inventata dalla casta che ha i figli laureati. Ha messo la zampa (sic) su 204778 posti di lavoro un po' speciali. La cattedra dove si lavora di meno (16 ore settimanali). E' quella in cui non occorre aggiornarsi. Basta ripetere le stesse cretinate che sa ogni bravo ragazzino della III media. La correzione dei compiti si fa in un quarto d'ora. Quelli che non sono giusti sono sbagliati..."*

Da ciò che avremo occasione di vedere nel seguito apparirà - spero - che il mio pensiero è abbastanza diverso. Credo, infatti, che il compito di insegnare la matematica a tutti i livelli, ma soprattutto a livello elementare, non sia molto facile. I molti problemi che si presentano a chi vuole svolgere un insegnamento valido ed efficace hanno la loro origine nel carattere peculiare della dottrina che si vuole insegnare, e nell'opportunità (per non dire necessità) che tale insegnamento segua le vie più adatte, secondo il punto di vista della psicologia dell'età infantile e preadolescente, e della psicologia dell'apprendimento.

2. Uno degli scopi delle pagine che seguono è quello di presentare i concetti fondamentali della matematica e le caratteristiche che ritengo principali di questa dottrina.

A questo fine la trattazione, che si darà nelle pagine seguenti, non segue l'esposizione degli argomenti che viene data nei programmi ufficiali; al contrario, si cercherà di dare quella che si potrebbe chiamare una "lettura trasversale" dei programmi stessi, per facilitare gli insegnanti che vogliano agire perché i discenti comprendano le idee fondamentali e riescano a raggiungere quella appropriazione dei concetti che sta alla base della comprensione, dell'unità interiore, della organicità delle conoscenze.

Quindi uno degli scopi di quella che ho chiamato lettura trasversale dei programmi è quello di riattaccare l'insegnamento della matematica da una parte all'esperienza elementare dei soggetti, al loro vissuto quotidiano, e dall'altra alla problematica dell'espressione dei concetti, che nasce anche dalle difficoltà che i soggetti incontrano nell'impiego del linguaggio comune.

In altre parole, il mio desiderio è che la matematica nasca, per così dire, dall'utilità, per non dire necessità, di razionalizzazione del comportamento quotidiano; e che le strutture astratte della matematica, e le convenzioni del suo linguaggio, non siano imposte dall'esterno, e consegnate come prefabbricate ai soggetti, ma siano in stretto contatto anche con le strutture della concettualizzazione abituale e del linguaggio comune.

Come conseguenza di questo modo di vedere, nel progetto di svolgimento dei programmi che qui viene dato, il concetto generale di insieme e gli elementi dell'algebra di Boole che vi si riconnettono vengono presentati alla fine, cioè quando si presume che si possa comprendere l'utilità della loro presenza, giustificata dalla potenza unificante del livello di grande astrazione al quale queste strutture si situano.

Penso, infatti, che anche nella matematica si presenti, per esempio, quella problematica di codificazione e decodificazione che i programmi presentano espressamente nell'ambito della cultura linguistica; e anzi, forse, nell'ambito della matematica i problemi relativi alla codificazione ed alla decodificazione sono particolarmente acuti, a causa del carattere marcatamente convenzionale e artificiale del linguaggio matematico.

3. Le difficoltà dell'insegnamento elementare della matematica crescono ovviamente quando i soggetti a cui è diretto l'insegnamento hanno qualche difficoltà di apprendimento, o addirittura qualche minorazione di carattere nervoso o psicologico.

Ritengo che in questo caso sia ancor più utile, per non dire necessario, che un eventuale tentativo d'insegnamento miri direttamente alle idee fondamentali ed essenziali della matematica. Per il momento non è possibile entrare in ulteriori particolari, anche perché i casi di minorazione mentale formano un universo estremamente variegato e complesso; si potrebbe addirittura dire che ogni caso andrebbe studiato a sé, se si vuole ottenere un minimo di efficacia nell'intervento. Ma ciò non impedisce che si possa riflettere sulle idee generali, e sulla struttura fondamentale del pensiero matematico.

4. Non intendo cimentarmi con il difficile compito di definire che cosa sia la matematica. Per i fini che interessano il lavoro che vogliamo qui svolgere, mi interessa mettere in evidenza alcuni aspetti del pensiero matematico: precisamente quelli che più ci interessano per quanto riguarda l'insegnamento a soggetti in difficoltà. Questi aspetti coinvolgono anche la contiguità delle problematiche dell'insegnamento della matematica con quelle dell'insegnamento linguistico.

Si può osservare che i programmi ministeriali dei corsi sono ovviamente ispirati da una certa concezione della matematica, e dei processi di apprendimento; concezione che forse, in modo più o meno conscio, vorrebbe ispirare anche le strategie didattiche. Non penso che sia questo il luogo per analizzare ed eventualmente discutere la concezione della matematica che sta alla base dei programmi; accettiamo quindi questi programmi come punto di partenza e come base di analisi e di eventuale discussione ed approfondimento.

Io credo inoltre che nell'insegnamento della matematica si possano distinguere almeno due livelli: a un primo livello si potrebbe dire che l'insegnamento ha lo scopo di fornire agli scolari certe conoscenze elementari, indispensabili per la vita di relazione nella nostra società.

A un secondo, e superiore, livello, penso che un secondo compito possa essere descritto parlando di formazione mentale e interiore all'autonoma razionalità del comportamento. Questa razionalità potrebbe comprendere la costruzione dei concetti astratti, la deduzione rigorosa, la codificazione dei concetti con i simboli artificiali della matematica, la decodificazione dei simboli e la loro interpretazione.

Ovviamente la distinzione ora avanzata non significa per nulla che i due livelli debbano essere separati nella pratica dell'insegnamento, e meno ancora che debba significare separazione diacronica (temporale), quasi che i livelli ora presentati debbano indicare obiettivi separati, da conseguirsi in sequenza temporale.

5. Nelle pagine che seguono intendo esporre una linea di pensiero secondo lo schema seguente:

I - Alcune caratteristiche del pensiero matematico; conseguenze sulla operazione di matematizzazione della realtà percepita. Astrazione e simbolizzazione; convenzioni di rappresentazione e sintassi. La deduzione formale. La matematica come chiave di lettura della realtà.

II - Le esperienze fondamentali che conducono al concetto di numero naturale. Numeri cardinali e ordinali. Le operazioni sui numeri, e le loro proprietà formali. La rappresentazione grafica del numero naturale; problemi di scrittura e di lettura. Il calcolo come forma di deduzione.

III - La relazione del soggetto con l'ambiente; la manipolazione degli oggetti rigidi e le esperienze fondamentali che conducono ai concetti geometrici. Il concetto di "gruppo di trasformazioni" e la ricerca degli invarianti degli oggetti geometrici. Proprietà elementari di geometria piana e solida.

IV - L'operazione di misura, come codificazione di una certa realtà materiale, immaginata continua, con il linguaggio matematico. Il numero razionale e la sue rappresentazioni (rappresentazione decimale, rappresentazione con frazioni). La lettura della realtà materiale con gli strumenti matematici; sue proprietà e suoi limiti.

V - Il concetto intuitivo di insieme e la codificazione dell'operazione di astrazione; elementi di algebra di Boole. Simbolizzazione convenzionale diretta dei concetti, dei loro rapporti e delle operazioni logiche.

APPENDICE.

NUOVI PROGRAMMI DEI CORSI [D.M. 24 aprile 1986, integrato e modificato dal D.M. 14 giugno 1988].

AREA LOGICO-MATEMATICA
Elementi fondamentali della Matematica.

- logica e teoria degli insiemi (le relazioni, le classificazioni, l'uso dei connettivi e dei quantificatori)
- il numero (concetti di numero nel suo duplice aspetto di ordinale e di cardinale: le operazioni con i numeri, le tecniche)
- la Topologia (le strutture topologiche elementari, le invarianti)
- La Geometria (le trasformazioni geometriche, la geometria proiettiva)
- reticolato o piano cartesiano
- geometria euclidea
- Probabilità e statistica
- Il problema (decodificazione del testo, comprensione logica, diagramma, algoritmo)
- Impiego di mezzi grafici e di materiale strutturato
- Aspetti operativi di pensiero
- Esemplificazione di unità didattiche.

I - ASPETTI DEL PENSIERO MATEMATICO.

Alcune caratteristiche del pensiero matematico. Astrazione e simbolizzazione; convenzioni di rappresentazione e sintassi. La deduzione formale. La matematica come chiave di lettura della realtà.

1 - Accade spesso di ascoltare delle persone che domandano che cosa sia la matematica. Forse queste persone si attendono una risposta analoga a quelle che si danno di solito quando si cerca di definire qualche altra scienza: per esempio si definisce la biologia come la scienza che studia gli esseri viventi; oppure si definisce la mineralogia come la scienza che studia certi corpi inanimati che si trovano in natura ecc. Nei secoli scorsi venivano accettate delle frasi che pretendevano di definire la matematica come la scienza della quantità; e si aggiungeva che questa quantità poteva avere due specificazioni: la quantità discreta, che era pensata come oggetto dell'aritmetica, e la quantità continua, che era pensata come oggetto della geometria.

Queste frasi, e altre analoghe, non sono più considerate soddisfacenti per le esigenze della critica e dell'epistemologia moderne. In altre parole, non si accetta più di definire la matematica partendo dai suoi oggetti, dai suoi contenuti; infatti, oggi siamo consci del fatto che gli oggetti della matematica non sono soltanto i numeri, o le figure geometriche, ma rientrano nell'ambito della matematica anche dei concetti e degli oggetti che non sono rappresentabili con numeri. Si preferisce quindi cercare di descrivere la matematica partendo dalle sue procedure e dai metodi che essa utilizza per costruire e per conoscere i propri oggetti.

2 - Ciò che abbiamo detto poco fa diventerà più chiaro, spero, quando avremo riflettuto su qualche procedimento tipico della matematica, e quando avremo approfondito il significato della conoscenza che la matematica ci fornisce della realtà materiale, la cui percezione ed osservazione costituiscono il punto di partenza della costruzione matematica.

In forma provvisoria e sommaria si potrebbero descrivere le procedure della matematica nel modo seguente: partendo dallo stimolo della percezione sensoriale e dall'osservazione della realtà materiale, la fantasia elabora certe immagini, sulle quali vengono costruiti dei concetti astratti; questi concetti sono a vario livello di generalità, e vengono variamente simbolizzati con strumenti linguistici: parole del linguaggio comune (utilizzate in senso tecnico preciso) oppure con simboli artificiali e convenzionali, di vario tipo.

La costruzione dei simboli artificiali permette di istituire un insieme di procedure, che sfocia nella costruzione di un vero e proprio linguaggio; e con questa espressione intendiamo indicare un insieme di simboli i quali permettono non soltanto di rappresentare i concetti, ma anche di eseguire delle deduzioni, le quali vengono realizzate con l'applicazione delle leggi formali dei simboli adottati.

Per fissare le idee, e per non lasciare nel vago il discorso, consideriamo il caso dell'aritmetica. Il primo momento si realizza con l'osservazione degli insiemi finiti di oggetti distinti tra loro; da queste osservazioni nascono le immagini, che conducono alla costruzione dei numeri cardinali naturali. Questi vengono espressi in vari modi: infatti presso ogni linguaggio esistono delle parole, cioè dei simboli linguistici, orali e scritti, che rappresentano i numeri. Presso i popoli più arretrati esistono delle parole che rappresentano soltanto numeri abbastanza piccoli; presso popoli intellettualmente più avanzati, il sistema di numerazione verbale permette di rappresentare numeri sempre più grandi. facile tuttavia osservare che la possibilità di esistenza di numeri comunque grandi s'impone in modo più o meno cosciente. E il tentativo di risolvere il problema di rappresentare questi numeri viene affrontato in vari modi.

3 - Un atteggiamento abbastanza rudimentale per affrontare il numero grande è quello che conduce a dare un nome ai numeri di impiego frequente, e di comprendere gli altri sotto la denominazione "tanti".

Questo atteggiamento è comodo e pertanto molto comune, e riduce la concettualizzazione alla rappresentazione fantastica di una moltitudine nella quale gli elementi non vengono distinti tra loro, ma che viene percepita come un tutto unico.

Un atteggiamento analogo è quello criticato e superato da Archimede nella sua opera intitolata *L'arenario*. Il grande matematico, nella dedica che egli fa dell'opera al tiranno di Siracusa, afferma che i suoi contemporanei dicono che i granelli di sabbia esistenti al mondo sono in numero infinito; ma che ciò non è vero, perché egli sa contarli. E addirittura sa contare i granelli di sabbia che riempirebbero una sfera avente la Terra come centro e come raggio la distanza tra la Terra ed il Sole.

Ovviamente l'appello all'infinito, fatto dai matematici precedenti Archimede, è un'ammissione della loro incapacità di dominare concettualmente dei numeri molto grandi, e soprattutto di trovare dei simboli adatti a rappresentarli. Invece il grande siracusano inventa un simbolismo capace di rappresentare numeri molto grandi, e dimostra poi che il numero dei granelli di sabbia di cui sta parlando non è neppure il più grande che egli potrebbe rappresentare con i suoi mezzi.

4 - Da ciò che abbiamo detto finora mi pare che si possa dedurre che uno dei punti fondamentali del pensiero matematico è costituito dall'operazione di rappresentazione del numero; questa operazione consegue alla costruzione del concetto, e può essere distinta da quella. E notiamo che l'operazione concettuale della distinzione non necessariamente significa separazione di fatto, nella realtà vissuta. Anzi vorrei dire che la distinzione è tipicamente teorica, perché nella realtà la costruzione del concetto si accompagna di fatto alla simbolizzazione. Quest'ultima permette al soggetto di prendere coscienza del suo stato mentale, ed anche di fissare le proprie idee con simboli esteriori, e di comunicarle agli altri.

Ovviamente la simbolizzazione può manifestarsi in molti modi, e avere di conseguenza vari gradi di efficacia. Possiamo, per esempio, immaginare il pastore illetterato, o analfabeta di ritorno, il quale al mattino mette una pietra in un mucchio quando ciascuna delle pecore gli passa davanti; ed alla sera toglie una pietra dal mucchio quando ciascuna delle pecore rientra. Egli realizza così una simbolizzazione dell'insieme delle pecore, simbolizzazione che gli permette di controllare se delle pecore sono rimaste fuori dell'ovile, ed anche, in modo rudimentale, quante sono. Ai fini che gli interessano, non è necessario che il pastore esprima e ricordi il numero che corrisponde al suo gregge, perché la simbolizzazione che ha adottato gli basta per quello che vuole sapere.

A proposito di mezzi elementari per rappresentare il numero, ricordo un episodio che io ritengo caratteristico, e che è raccontato da Leonard Clark nel suo libro intitolato: "I fiumi scendevano a oriente" [Titolo originale: *The Rivers Ran East*]. Racconta lo scrittore di aver percorso la giungla amazzonica, entrando in contatto con varie popolazioni primitive, le quali usavano indicare i numeri utilizzando le dita delle mani e dei piedi, perché ovviamente non avevano mai bisogno di indicare degli insiemi di più di 20 oggetti. Un giorno l'autore osservò un indigeno che aveva fatto una pesca abbondante e si domandò come sarebbe riuscito a indicare il numero dei pesci pescati. Infatti, l'indigeno, dopo aver esaurito le dita delle mani e dei piedi, ebbe un attimo di esitazione; ma poi fece un segno con il proprio dito sporco sulla parete della capanna, per indicare la prima ventina, e riprese a contare a suo modo i pesci rimanenti.

5 - È noto che noi possediamo degli strumenti concettuali e linguistici molto potenti per risolvere il problema della rappresentazione dei numeri naturali. Ritorneremo in seguito a riflettere a lungo su questo argomento; qui vorrei limitarmi a fare qualche osservazione, ispirata ovviamente dalla mentalità del matematico che analizza certi processi mentali dal proprio punto di vista. Per quanto riguarda l'esempio del pastore analfabeta, vorrei osservare che egli realizza e utilizza un'operazione di importanza fondamentale per la costruzione del concetto di numero naturale; tale operazione logica consiste nel costruire un insieme di oggetti (il mucchio di sassi) che è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle pecore.

Tra i due insiemi così costruiti sussiste una relazione che viene appunto chiamata corrispondenza biunivoca o anche "biiezione". Secondo un certo modo di vedere, questa relazione precede l'identificazione dei singoli numeri naturali. Ma la simbolizzazione che abbiamo ricordato permette al pastore di avere le informazioni che gli sono utili. Per quanto riguarda il secondo esempio, vorrei osservare che abbiamo qui un secondo passo fondamentale per la costruzione di una concettualizzazione e una simbolizzazione del numero naturale; questo passo consiste nel considerare come un tutto unico un determinato insieme (quello dei pesci pescati, o quello delle dita delle mani e dei piedi, che è in corrispondenza biunivoca col primo).

Come ho detto, dovremo ritornare a lungo su questi argomenti; qui mi interessa osservare che, almeno tendenzialmente, la simbolizzazione matematica adottata è inizio e fondamento non soltanto della rappresentazione del concetto matematico, ma anche della deduzione. Infatti, il pastore del primo esempio dal fatto che rimangano delle pietre nel mucchio quando le pecore rientrano deduce che alcune di esse sono rimaste fuori.

6 - L'ultima osservazione fatta ci conduce a riflettere su una importante caratteristica della simbolizzazione matematica; vorrei esprimere questo aspetto del pensiero matematico dicendo che la simbolizzazione, qualunque essa sia (con oggetti, con segni, con figure o con altri mezzi) è tanto più efficace quanto maggiore è la sua possibilità di permettere la deduzione.

Per fissare le idee, consideriamo per esempio le due convenzioni abituali che ci vengono insegnate per rappresentare i numeri naturali: quella a suo tempo utilizzata dai Romani, e quella che ci è venuta dagli Indiani, attraverso la cultura araba nel secolo XIII. Vorrei osservare che la fortuna della seconda, che ha soppiantato la prima in tutte le applicazioni scientifiche e nell'uso della tecnica, è dovuta principalmente a due fatti: anzitutto la possibilità di rappresentare in modo comodo, efficace ed uniforme, dei numeri comunque grandi; ed in secondo luogo la possibilità di eseguire operazioni sui numeri in modo rapido e sicuro, applicando certe leggi e certe regole che in ogni paese civile oggi vengono insegnate nella scuola elementare.

Queste regole per l'impiego dei simboli possono essere chiamate *regole di sintassi* del linguaggio matematico; infatti, quando si studia una lingua, le regole di sintassi permettono di esprimersi in modo corretto, coerente ed efficace, e soprattutto permettono di distinguere, tra tutte le possibili successioni di parole di un linguaggio, quelle che hanno un senso e che comunicano un messaggio razionalmente comprensibile. In modo analogo, le regole dell'aritmetica permettono di costruire delle successioni di segni matematici che hanno senso e che quindi comunicano dei messaggi razionali; in più permettono di costruire delle successioni di segni che sono dedotte da certe altre. Nel caso dell'aritmetica abituale, le regole sono quelle di scrittura e di lettura dei numeri mediante le cifre cosiddette arabe; e a queste si accompagnano le procedure per l'esecuzione delle operazioni aritmetiche; procedure che, in quest'ordine di idee, ci si presentano come vere e proprie regole di deduzione.

7 - Abbiamo osservato che le operazioni aritmetiche permettono di eseguire delle deduzioni, operando con le regole di sintassi dei simboli adottati; in altre parole noi, applicando queste regole, siamo in grado di trarre delle conclusioni sicure da certe premesse date, purché beninteso queste possano essere espresse in linguaggio matematico. Questa osservazione giustifica l'opinione che la matematica sia una potente chiave di lettura della realtà che noi percepiamo ed osserviamo. E ciò potrebbe giustificare, a mio parere, l'importanza che ha lo strumento matematico per tutto il pensiero scientifico moderno.

Per esempio, e per fissare le idee, pensiamo alla descrizione degli insiemi che può essere fatta col linguaggio comune: con questi strumenti, è possibile soltanto esprimere poco più del fatto che gli elementi di un insieme sono "tanti" oppure "pochi". Se invece noi diamo il numero degli elementi di un insieme, abbiamo una rappresentazione la quale anzitutto è molto più precisa, e in secondo luogo permette di prevedere con certezza il risultato dell'operazione di riunione di due insiemi che non hanno elementi in comune. Tale risultato si ottiene, come è noto, facendo la somma dei numeri che rappresentano ciascuno degli insiemi considerati; questa operazione sui concetti viene eseguita applicando le regole della sintassi dei simboli utilizzati.

Analoghe considerazioni possono essere svolte quando si opera sulle grandezze; è facile osservare che il concetto di grandezza ha moltissime applicazioni, non soltanto nella scienza e nella tecnica, ma anche nella vita quotidiana: infatti, per esempio lunghezze, aree, volumi, pesi, durate, prezzi sono tutti concetti che possono rientrare nel concetto generale di "grandezza".

Una delle operazioni eseguite più frequentemente sulle grandezze è quella che viene chiamata "misura". Con un'operazione cosiffatta, adottando opportune convenzioni, è possibile rappresentare ogni grandezza con un numero, e quindi avere una rappresentazione della realtà molto più chiara e precisa di quella data dalle parole del linguaggio comune: infatti, per esempio assegnare la lunghezza di un segmento in metri e centimetri è un'informazione molto più precisa di quella che si potrebbe dare dicendo che è "lungo" oppure "corto" oppure "così così". Inoltre la rappresentazione delle grandezze con numeri permette anche di dedurre il risultato di certe operazioni che noi eseguiamo; per esempio, se conosciamo le misure delle lunghezze di due segmenti, possiamo prevedere con certezza quale sarà la misura della lunghezza del segmento che si ottiene mettendoli uno dopo l'altro sulla medesima retta; questa informazione si consegue eseguendo la somma delle due misure; e l'operazione sui simboli, eseguita correttamente, ci permette di concludere con sicurezza quale sarà il risultato dell'operazione.

8 - Come ho ripetuto più volte, ritorneremo in seguito sugli argomenti che abbiamo qui soltanto sfiorato. Mi interessa qui aggiungere, a quanto ho detto finora, che lo sviluppo del pensiero matematico nella nostra mente è strettamente collegato con la simbolizzazione dei concetti; ed in questo ordine di idee le eventuali difficoltà che certi soggetti presentano possono avere varie origini e varie cause: esse infatti possono dipendere da difficoltà nella costruzione dei concetti astratti, oppure nell'impiego dei simboli convenzionali, generalmente ed abitualmente utilizzati per esprimerli, oppure infine dalla convenzionalità (o, per così dire, poca "naturalezza") delle convenzioni universalmente adottate.

Per chiarire meglio l'ultimo pensiero, vorrei osservare che, per esempio, della scrittura romana il numero tre viene rappresentato col simbolo "III", mentre nella scrittura abituale con cifre arabe, viene rappresentato col noto simbolo "3". Mi pare che si possa dire che la prima rappresentazione appare molto più vicina all'intuizione di quanto non sia la seconda, quindi che la prima rappresentazione possa offrire minori difficoltà a chi già fatica nel costruire il concetto. Tuttavia la seconda rappresentazione è universalmente adottata per gli usi civili, e soprattutto è quella che viene adottata quando si insegnano le regole di sintassi dei simboli, cioè (nel caso in esame) le regole delle operazioni aritmetiche.

Mi pare chiaro che l'impiego di un simbolismo più evoluto e potente possa provocare disagio in certi soggetti in difficoltà; ma ritengo anche abbastanza utile il saper distinguere in certi casi ciò che è dovuto a incapacità di costruire i concetti e ciò che invece nasce dalle difficoltà presentate da un insieme di convenzioni; queste sono molto utili e potenti, e sono ormai considerate da noi quasi come naturali, tanto grande è la nostra consuetudine alla loro utilizzazione; ma ciò non toglie che siano sempre delle convenzioni per qualcuno difficili da ricordare e da impiegare.

9 - Uno degli scopi di questa mia fatica è ricercare le *strutture portanti* del pensiero matematico, per identificare, nel modo migliore possibile, l'origine di certe difficoltà degli allievi. Infatti io penso che, per coloro i quali cercano di aiutare chi si trova a disagio nel pensiero e nelle espressioni della matematica, sia importante saper mirare alle cose veramente essenziali di questo pensiero e, genericamente, del comportamento razionale. Infatti, come ho già detto, penso che i tentativi di ricupero nell'ambito dell'insegnamento della matematica possano utilmente accompagnarsi a quelli di aiuto in altri ambiti di pensiero.

Varie esperienze in quest'ordine di idee hanno condotto gli operatori a convincersi che talvolta, per alcuni soggetti, il lavoro nell'ambito della matematica, che appariva quasi completamente privo di risultati, aveva invece indotto una migliore capacità di analisi, un maggiore ordine nell'esposizione, una più grande chiarezza nell'espressione nell'ambito della lingua materna. Pertanto io penso che, operando nell'ambito della matematica, vista come un linguaggio astratto e convenzionale, si possano anche aiutare i soggetti a un maggiore dominio di ogni strumento di espressione e quindi anche a un progresso nel comportamento razionale.

II - LE STRUTTURE FONDAMENTALI DELL'ARITMETICA.

Le esperienze fondamentali che conducono al concetto di numero naturale. Numeri cardinali e ordinali. Le operazioni sui numeri e le loro proprietà formali. La rappresentazione del numero naturale; problemi di scrittura e di lettura. Il calcolo come forma di deduzione.

1 - Abbiamo visto gli aspetti del pensiero matematico che qui ci interessano. Nelle pagine che seguono cercheremo di analizzare e di mettere in evidenza i momenti fondamentali della costruzione del concetto di numero naturale. Come ho già detto, esporrò questa analisi dal punto di vista del matematico, che riflette sulla propria scienza; pertanto l'indagine dei meccanismi psicologici con i quali il concetto di numero naturale viene costruito resta al di fuori delle considerazioni che verranno svolte qui. Ricordo anzitutto che seguirò l'abitudine oggi corrente, chiamando "*numeri naturali*" o anche semplicemente "naturali" (quando non vi sia pericolo di confusione) i numeri della serie:

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6,....

Osservo esplicitamente che dalla serie (1) escludo lo zero; sono infatti convinto che la costruzione del concetto "zero" sia frutto di un'elaborazione che mi sembra appartenere ad un livello psicologico superiore rispetto a quello che conduce ai numeri (1). Tuttavia questo argomento non sarà ignorato; su di esso ritorneremo nel seguito.

2 - Un'osservazione facile ed immediata ci conduce a rilevare un fatto importante relativo al concetto del numero naturale. Infatti, in molte lingue esistono due insiemi di vocaboli relativi alla serie (1): per esempio in italiano si hanno le parole: uno, due, tre, quattro ecc. di un primo insieme, ed anche le parole: primo, secondo, terzo, quarto di un secondo insieme. Già nella scuola primaria si insegna che i vocaboli del primo insieme rappresentano i naturali che vengono chiamati "*cardinali*", ed i vocaboli del secondo insieme rappresentano i naturali chiamati "*ordinali*".

Una riflessione pure abbastanza semplice spiega questi due aspetti come originati da due diverse concettualizzazioni di esperienze elementari del nostro vissuto quotidiano: infatti, si suol dire che il concetto di numero cardinale nasce dalla presa di coscienza dell'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di due insiemi; quello di numero ordinale nasce dalla concettualizzazione dell'esperienza dell'enumerazione degli elementi di un insieme.

Possiamo ora approfondire ciascuno di questi due aspetti, perché la loro chiara distinzione può avere influenza notevole anche sull'opera dell'insegnante.

3 - Consideriamo anzitutto il primo modo di vedere i numeri naturali, cioè quello che li vede nascere dal concetto elementare di corrispondenza biunivoca. Questa relazione tra due insiemi può essere presa come punto di partenza non ulteriormente analizzabile, cioè come uno di quei concetti che vengono indicati come *primitivi.*

Prima di approfondire la nostra analisi osserviamo che, secondo una visione abbastanza sbrigativa ed ingenua, si tenderebbe a classificare un concetto come "primitivo" in forza di una sua qualità che viene chiamata spesso "evidenza". Tuttavia si può osservare che l'evidenza (o la "chiarezza" o altra qualità che si voglia designare con parole analoghe) è una qualità che fa appello a situazioni psicologiche. Se volessimo spiegare ulteriormente la cosa, potremmo dire che "un concetto sarà chiamato evidente quando viene capito immediatamente da tutti"; questa frase, ed altre analoghe, non resistono ad una critica severa: questa infatti porterebbe a domandarsi che cosa avverrebbe se qualcuno dichiarasse di non capire, oppure se, pur dichiarando di aver capito, si comportasse poi in modo non coerente con il concetto, o in altri casi che evitiamo di elencare.

La critica dei fondamenti della matematica induce a rinunciare prudentemente a richiamarsi all'evidenza per classificare un concetto come primitivo; essa si limita a constatare che è necessario stabilire dei punti di partenza, ma che questi non sono sempre imposti in natura da una evidenza che si vuole fare accettare a tutti. I punti di partenza invece possono essere scelti con una certa libertà;

ma la libertà di scelta non dispensa dalla coerenza logica che le trattazioni successive debbono rispettare. Tuttavia ciò che abbiamo detto riguarda la critica logico-filosofica dei fondamenti dell'aritmetica. Dal punto di vista della pratica didattica, possiamo pensare che il problema sia un poco diverso, e consista nello scegliere dei punti di partenza che sono abbastanza vicini al vissuto quotidiano del discente.

In quest'ordine di idee, accetteremo il concetto di corrispondenza biunivoca come primitivo; pertanto ci limiteremo ad indicare degli esempi che sono alla portata dell'esperienza quotidiana comune: nei paragrafi 4 e 5 del Capitolo precedente, abbiamo considerato l'esempio del pastore analfabeta che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le pecore del suo gregge e i sassi di un mucchio. Ancora, potremo osservare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i semi delle carte, i punti cardinali, gli Evangelisti ecc. Si suol dire che da questi esempi elementari si trae, per astrazione, il concetto del numero quattro.

Non approfondiamo per il momento il significato dell'espressione "per astrazione": si tratta di un argomento che da una parte può essere considerato attinente alla psicologia e dall'altra può essere anche giudicato una questione epistemologica o anche filosofica. Limitiamoci ad accettare, molto elementarmente, che il numero quattro è qualche cosa di diverso da ognuna delle quaterne che abbiamo portato come esempi; qualche autore si esprime dicendo che il numero quattro è "ciò che hanno in comune" quelle quaterne e ogni altro insieme di elementi che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con ognuna di esse.

Volendo presentare le cose in modo più formale e rigoroso, e con l'impiego di vocaboli tecnici, si potrebbe dire che la corrispondenza biunivoca stabilisce tra due insiemi una relazione di equivalenza. Indicando, per esempio, gli insiemi con lettere maiuscole, potremo convenire di scrivere:

(2) $$A \approx B$$

se, e soltanto se, tra gli elementi dei due insiemi A e B intercede una corrispondenza biunivoca. Abbiamo così compiuto un passo molto importante nella direzione che porta alla costruzione di una mentalità matematica: abbiamo simbolizzato l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di due insiemi con un simbolo convenzionale ed artificiale; precisamente interponendo il segno " $\approx$ " tra i simboli degli insiemi considerati.

Vale la pena di riflettere ancora che questo modo di esprimere un certo fatto non è per nulla naturale, né obbligatorio; in altre parole, si potrebbero escogitare moltissimi altri modi per esprimere questo stesso fatto. Tuttavia, avendo noi scelto la rappresentazione (2), possiamo anche proseguire, ed esprimere, con gli stessi simboli, anche le proprietà della relazione tra insiemi di cui stiamo parlando.

A tal fine, osserviamo che la formula (2) viene necessariamente letta con una scansione diacronica, e da sinistra a destra, come avviene generalmente per gli scritti. Pertanto, in teoria, si potrebbe anche pensare che i due insiemi considerati stiano fra loro in una relazione non simmetrica. Osserviamo che questo dubbio non nasce, per così dire, dalle cose, ma soltanto ci si presenta in conseguenza del modo che abbiamo scelto per esprimere le cose; modo che, in particolare, prende in considerazione necessariamente l'insieme chiamato col nome A prima di quello chiamato col nome B.

Pertanto, per mettere in evidenza tutte le proprietà della relazione che intercede tra i due insiemi, occorre esprimere in modo esplicito alcune proprietà del modo da noi scelto per rappresentare la relazione. Tali proprietà vengono espresse con gli enunciati ben noti:

(3) se è $A \approx B$, allora è anche $B \approx A$ e viceversa.

Ed inoltre:

(4) se è $A \approx B$ ed anche $B \approx C$, allora si ha anche $A \approx C$.

Sappiamo che abitualmente si dice che la (3) esprime la *proprietà simmetrica* della relazione " $\approx$ ", e la (4) esprime la *proprietà transitiva* della stessa relazione.

Inoltre si suole anche scrivere:

(5) $A \approx A$,

e si suol dire che questa formula esprime la *proprietà riflessiva* della relazione stabilita dalla corrispondenza biunivoca. Si suol dire anche che una relazione che possegga le tre proprietà ora ricordate è una "*relazione equaliforme*" oppure anche che è una "*relazione di equivalenza*".

Nel seguito incontreremo concetti analoghi, ed espressioni analoghe in altri contesti; per il momento vorrei limitarmi ad osservare che la scelta della convenzione (2) per esprimere la relazione che intercede tra i due insiemi A e B, porta con sé anche le proprietà espresse dalle (3) e (4). Queste vengono chiamate spesso *proprietà formali* della relazione; ma, a ben guardare, sono proprietà che conseguono dalle convenzioni da noi scelte per rappresentarla. Inoltre la (5) costituisce un'estensione convenzionale delle proprietà formali espresse dalle (3) e (4); infatti, quando si pensa a una relazione, quasi naturalmente si pensa a una relazione intercedente tra due enti diversi; soltanto una riflessione e un'ulteriore convenzione possono condurci a considerare anche una relazione di un ente con se stesso. Vale la pena di riflettere su queste circostanze, perché spesso delle convenzioni che noi consideriamo quasi naturali presentano delle notevoli difficoltà a chi le incontra per la prima volta; e soprattutto quando sono espresse in forma astratta, simbolica e convenzionale.

Osservo infine che queste formule, e altre che incontreremo nel seguito, sono di solito utilizzate per i calcoli e per le deduzioni; ciò si fa perché si tiene presente il significato della formula, e quindi si ritiene di poter sostituire per esempio la formula $A \approx B$ con la $B \approx A$ quando lo si ritenga necessario, giustificando la procedura col dire che dicono la stessa cosa; cioè facendo riferimento ad una realtà (nel nostro caso quella di insiemi finiti) di cui le formule sono la rappresentazione.

Tuttavia la procedura potrebbe anche essere applicata ed espletata anche senza far riferimento a un significato: per esempio potrebbe essere inserita nella memoria di un elaboratore elettronico; casi analoghi si presentano spesso anche in altre circostanze, e avviene che non soltanto le macchine elettroniche facciano i calcoli senza capirli, ma anche degli essere umani si limitino ad applicare le leggi sintattiche dei simboli senza capirne il significato e la motivazione. Ciò del resto avviene anche quando i ragazzini memorizzano le cosiddette tabelline (o tavola pitagorica che dir si voglia), che vengono fissate nella memoria spesso senza riferimento al significato. Ciò può comportare soltanto fastidio e noia per i normodotati, ma può anche presentare dei notevoli ostacoli per soggetti con difficoltà di apprendimento.

4 - Abbiamo visto un aspetto del numero naturale, e precisamente quello che conduce al concetto di numero cardinale; volendo ulteriormente riflettere sull'argomento, potremmo dire che alla domanda: "Quanti sono gli elementi di un certo insieme?", si risponde abitualmente con un numero cardinale.

Tuttavia esistono anche altre circostanze ed operazioni elementari che danno luogo al concetto di numero naturale, e che permettono di svolgere considerazioni diverse da quelle svolte finora. Osserviamo, infatti, che, quando sia dato un insieme, per esempio fisicamente e materialmente, per assegnare il numero cardinale dei suoi elementi si ricorre a un'operazione che consiste nel far passare uno alla volta gli elementi dell'insieme considerato, pronunciando i nomi dei numeri della serie (1).

Ciò avviene quasi sempre quando il numero degli elementi dell'insieme non sia uno dei primi della serie: infatti è stato osservato [Cfr. Stella Baruk] che i gruppi di due, tre elementi vengono spesso percepiti globalmente, senza che occorra enumerarne gli elementi con la procedura descritta sopra; spesso ciò avviene anche con gruppi poco più numerosi: per esempio quelli dei segni sulle facce del dado, oppure sulle tessere del domino o sulle carte da gioco.

Ma negli altri casi la procedura di enumerazione diventa necessaria, salvo casi che esulano dalla normalità. Uno di questi è esposto da Oliver Sacks nel suo libro intitolato *L'uomo che scambiò sua moglie per un cappello* [titolo originale dell'opera *The man who mistook his wife for a hat*]; l'Autore espone il caso di due gemelli mentalmente ritardati, i quali tuttavia dimostravano sorprendenti capacità aritmetiche.

Per esempio, l'Autore cita il caso di una scatola di fiammiferi, il cui contenuto era stato rovesciato per terra; i due gemelli diedero il numero esatto dei fiammiferi della scatola (più di un centinaio) prima che questi fossero tutti caduti, eseguendo evidentemente il conteggio mentre i fiammiferi cadevano dal tavolo a terra. Questi risultarono essere in numero di 111, ed i due gemelli diedero anche immediatamente la decomposizione del numero stesso in due fattori primi: 3×37. Gli stessi soggetti dimostrarono di avere altre straordinarie capacità di calcolo, come per esempio quella che esplicarono dando lunghi elenchi di numeri primi di quattro e più cifre. Ciò conferma una circostanza del resto già ben nota: che cioè certe straordinarie abilità di calcolo aritmetico non necessariamente si accompagnano a intelligenze superiori, ma anzi possono esistere anche in menti per il resto ritardate.

Possiamo osservare che il conteggio degli elementi di un insieme introduce un elemento concettuale diverso da quelli che contribuiscono alla costruzione del concetto di numero cardinale: infatti il conteggio avviene nel tempo, e quindi di fatto richiede che tra gli elementi dell'insieme considerato sia stabilito un o*rdinamento*.

A causa di questa circostanza, nuova ed aggiuntiva, il concetto di numero naturale che scaturisce dall'esperienza elementare del conteggio viene considerato di altra specie rispetto al concetto che nasce dalla biiezione tra insiemi; e l'esistenza (già ricordata), presso molte lingue, di due serie di vocaboli, gli uni per indicare i numeri cardinali e gli altri per indicare i numeri ordinali, può essere considerata come una prova del fatto che questa differenza è stata da tempo rilevata e percepita presso moltissime comunità umane.

Esiste tuttavia uno stretto collegamento tra i due aspetti, cardinale e ordinale, dei numeri naturali: infatti, nella collezione di tutti gli insiemi finiti si può introdurre un ordinamento, che si ottiene mettendo, per così dire, in fila gli insiemi, e ponendo al primo posto l'insieme che contiene un solo elemento, al secondo quello che ne contiene due ecc.. Viceversa, appare chiaro che, quando si enumerano gli elementi di un insieme, il nome che si dà a un determinato elemento può essere considerato da due diversi punti di vista: il primo conduce a considerare il vocabolo come il nome del posto del numero nella successione (1); il secondo punto di vista conduce a considerare il vocabolo come indicante il numero cardinale degli elementi che sono già stati fatti passare, sono già stati considerati.

5 - È noto che nella pratica didattica si avviano i soggetti a memorizzare i nomi degli elementi della successione (1); e ciò conduce spesso alla memorizzazione di cantilene; si potrebbe dire che l'inizio di una cosiffatta pratica didattica è difficile da stabilire, se già S. Agostino, nelle *Confessioni*, ricordava la noia dei cori cantilenanti le operazioni fondamentali dell'aritmetica. Scrive infatti il Santo da Ippona: " Infatti "uno più uno fa due, due più due fanno quattro" era per me una odiosa canzone..." [Jam vero unum et unum duo, duo et duo quatuor odiosa mihi cantio erat. Agostino. Confessioni. Lib. I, Cap.13].

È noto inoltre che presso certe nazioni la memorizzazione viene cercata anche facendo cantare agli scolari le frasi da memorizzare. Tralasciamo per il momento di prendere in considerazione i vari espedienti didattici con i quali si cerca di ottenere la memorizzazione di certi strumenti verbali atti a indicare i concetti aritmetici fondamentali; vorrei tuttavia osservare che un certo bagaglio di questi strumenti, una scorta, per così dire, di parole elementari è molto utile, per non dire addirittura necessaria, non soltanto per la comunicazione dei concetti, ma anche per la loro costruzione. Non penso che sia questo il luogo per approfondire ulteriormente il difficilissimo esame del collegamento tra la costruzione del concetto, la sua simbolizzazione e la sua espressione; mi limito a fare l'osservazione elementare dell'esistenza di questo collegamento.

E ciò fonda l'opinione che ho espressa nel capitolo precedente, dicendo che la matematica ha anche l'aspetto di un linguaggio; osservo inoltre che, se si accetta questo punto di vista, l'eventuale aiuto e ricupero dei soggetti in difficoltà guadagnerebbe in validità ed efficacia se l'intervento di ausilio nell'ambito della matematica fosse svolto in stretto contatto con l'intervento in altri ambiti espressivi, in particolare in quello linguistico. Io credo, infatti, che non si debba confinare la matematica in un ghetto, come avviene spesso anche presso persone dotate di sensibilità e cultura, ma si debba considerare questa materia come costituente fondamentale della formazione dei soggetti a una razionalità globale, che coinvolge tutto l'individuo.

In questo ordine di idee, mi pare di dover sottolineare la necessità di curare che l'espressione linguistica abbia sempre un contenuto semantico, cioè sia, in altre parole, espressione di qualche cosa; accade infatti spesso nella matematica (ma non soltanto in questa materia) che i soggetti rifiutino la fatica di decodificare il simbolismo, o anche trovino particolare difficoltà nel farlo; di conseguenza può avvenire che qualche soggetto si limiti a memorizzare certe parole, rinunciando ad assegnare loro un qualunque significato; per esempio può avvenire che un soggetto memorizzi la successione di molti interi, ripetendola come una cantilena, ma sia incapace di assegnare un significato alle parole che pronuncia, almeno a partire da un certo punto in poi. Mi pare ovvio che l'insegnamento della matematica come un avvio alla formazione di una razionalità globale possa aiutare a evitare questi inconvenienti.

6 - Proseguendo nell'analisi della procedura di numerazione, si presentano alla nostra mente immediatamente due argomenti importanti: il primo si potrebbe esporre dicendo che, quando si esegua la numerazione di insiemi di oggetti, ogni individuo, presto o tardi, in modo più o meno esplicito, prende coscienza del fatto che non esiste un numero più grande di tutti gli altri; perché ognuno ha coscienza del fatto che, dato un insieme qualunque di oggetti, il numero di questi può essere accresciuto aggiungendo un altro oggetto all'insieme. Il secondo argomento è strettamente collegato con il primo, e potrebbe essere esposto dicendo che, stante l'osservazione precedente, si pone il problema di escogitare il modo di rappresentare numeri comunque grandi.

Abbiamo sfiorato questo argomento nei paragrafi 4, 5, 6 del precedente Capitolo; ritorniamo qui a riflettere sulla questione, ricordando ciò che abbiamo detto nei luoghi ivi citati. Infatti, abbiamo affermato che la soluzione che è stata data di questo problema, e che ancora oggi noi adottiamo, è quella di considerare e rappresentare un raggruppamento di oggetti come un tutto unico.

A questa tecnica si ricorre, per esempio, per la numerazione romana: in essa infatti i numeri corrispondenti ai gruppi di 5, 10, 50, 100, 500, 1000 elementi hanno dei simboli speciali, che, come è noto, sono rispettivamente: $V,\ X,\ L,\ C,\ D,\ M$. Ma questa procedura si dimostra ben presto insufficiente per le necessità della tecnica e della scienza.

Sappiamo che il modo di risolvere il problema consiste nel considerare non soltanto i gruppi di oggetti, ma anche i gruppi di gruppi, i gruppi di gruppi di gruppi e così via. Si comprende immediatamente che l'operazione può essere indefinitamente ripetuta, e conduce a numeri sempre più grandi; e d'altra parte essa si basa su un'operazione mentale che abbiamo accettato come elementare e primitiva: costruire, fisicamente o mentalmente, dei gruppi di oggetti e considerare ciascuno di essi come un tutto unico.

Ritorneremo in seguito ripetutamente su quest'operazione mentale, la quale viene anche presentata come la costruzione del concetto astratto di *insieme*; a questo proposito capita spesso di leggere o di ascoltare delle frasi come la seguente: "Insieme è una collezione di oggetti presa come un tutto unico". Questa frase vorrebbe forse essere la parafrasi di ciò che è stato scritto dal grande matematico tedesco Georg Cantor all'inizio di una sua celebre memoria, nella quale costruiva il concetto di numero transfinito. La frase nella lingua originale suona: "Unter eine "Menge" verstehen wir jede Zusammenhang M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganze." {G. Cantor. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* }. La frase del grande matematico tedesco potrebbe essere liberamente tradotta nel modo seguente:

"Col termine "insieme" [tedesco "Menge"] intendiamo indicare un qualunque raggruppamento [tedesco "Zusammenhang"] M, preso come un tutto, di certi oggetti m della nostra intuizione o della nostra mente, oggetti che siano determinati e ben distinti tra loro, e che saranno chiamati "elementi" di M".

Penso sia chiaro che le espressioni di Cantor non vogliano essere una definizione rigorosa del concetto di insieme, ma vogliano piuttosto dare una descrizione e presentare una convenzione di linguaggio. Infatti, se si cercasse nella frase una definizione rigorosa, occorrerebbe dire esplicitamente che si ritiene noto e primitivo il significato del termine "collezione" (in tedesco "Zusammenhang"); e rinascerebbe in qualcuno la velleità di definire che cosa si intende per "collezione". Penso quindi che non sia opportuno prendere la frase di Cantor come la definizione del concetto generale di "insieme", o, peggio, di farla memorizzare e ripetere come tale.

Tuttavia la costruzione di un insieme di simboli che permettano la rappresentazione di numeri comunque grandi richiede che si faccia l'analisi di un altro aspetto della nostra costruzione dei concetti matematici. Precisamente occorre analizzare la concettualizzazione di una fondamentale operazione sugli insiemi finiti che viene abitualmente chiamata "unione", alla quale dedicheremo i prossimi paragrafi.

7 - Anche l'operazione di *unione di due insiemi* non sarà qui definita rigorosamente; infatti anche in questo caso ci limiteremo a presentare qualche esempio, tratto dall'esperienza comune e relativo al caso particolare di insiemi che non abbiano elementi in comune (*insiemi disgiunti*). Per esempio, se il Direttore di una scuola elementare ordina che gli alunni di due classi vadano nell'aula magna dell'Istituto, si suol dire che l'insieme di alunni che si ottiene nasce dall'unione dei due insiemi costituiti dagli alunni delle classi considerate.

Ora abbiamo osservato che a ognuno di questi due insiemi corrisponde un numero cardinale; all'insieme ottenuto mediante l'operazione concreta di unione corrisponde ancora una volta un numero cardinale, che viene chiamato "somma" dei due numeri corrispondenti ai due insiemi prima dell'unione.

Si ha quindi un'operazione concreta (l'unione di due insiemi, privi di elementi comuni (insiemi disgiunti), materialmente dati, oppure anche soltanto pensati), alla quale corrisponde un'operazione sui concetti (numeri cardinali) i quali, a certi fini, rappresentano i due insiemi. L'operazione sui concetti viene abitualmente chiamata "addizione", ed il suo risultato, come si è detto, viene chiamato "somma" dei due numeri; e possiamo subito osservare che l'operazione sui concetti ci fornisce informazioni certe sul risultato dell'operazione concreta: per esempio, ci permette di determinare quanti saranno gli alunni che si ritroveranno nell'aula magna, prima ancora di eseguire il conteggio. Prima di proseguire, vorrei fare qualche osservazione, che sarà utile per comprendere il significato dell'impiego della matematica nella conoscenza della realtà.

Anzitutto vorrei osservare che, nelle righe precedenti, abbiamo distinto accuratamente l'operazione concreta, eseguita sugli insiemi, da quella eseguita sui numeri che li rappresentano. Questa distinzione mi pare fondamentale per la comprensione sicura dei concetti matematici, e non sempre viene fatta in modo chiaro. Ricordo per esempio di aver letto personalmente su un sussidiario per le scuole elementari la frase seguente: “Addizione è l'operazione che permette di riunire due numeri per formarne un terzo”. È una frase particolarmente infelice per varie ragioni, ma in particolare perché in essa si confondono le due operazioni (quella sugli insiemi e quella sui numeri).

Ricordo inoltre che la frase era stampata in carattere grassetto; ciò m'induce a pensare che l'’autore avesse voluto metterla in risalto per essere memorizzata. E a me sembra particolarmente importante osservare qui l'inopportunità di costringere i soggetti a memorizzare delle frasi che hanno l'apparenza di definizioni di concetti, ma che servono a ben poco, nella pratica, e che invece ribadiscono nei soggetti un'abitudine al vacuo verbalismo che mi pare poco formativa per l'intelligenza.

Inoltre ho fatto distinzione tra l'operazione sui numeri (che ho chiamato "addizione") ed il suo risultato (che ho chiamato "somma"). Osservo tuttavia che non sempre questa distinzione viene fatta nella pratica: infatti capita spesso di ascoltare frasi come la seguente: “ Fa' la somma di due più tre”. Quest'abitudine è anche comune a molti Autori autorevoli, pertanto a volte non conviene insistere nel pretendere dagli allievi delle distinzioni che essi vedono come inutili pignolerie. Infatti, la distinzione veramente importante mi sembra quella tra l'operazione sugli insiemi e quella sui numeri che li rappresentano.

8 - Nel seguito, nel corso di un apposito Capitolo, dedicheremo la nostra attenzione alla simbolizzazione dell'operazione di unione di due insiemi, intesa come operazione logica. Qui accettiamo provvisoriamente di conoscere il significato del termine, che appartiene al linguaggio comune quotidiano. Rifletteremo invece sulla simbolizzazione dell'operazione di somma di due numeri. È noto che l'operazione che si esegue sui numeri viene simbolizzata interponendo il segno convenzionale " + " tra i simboli dei due numeri che si addizionano. Quindi, per esempio, dati due insiemi A e B, ed indicati i numeri cardinali corrispondenti con a e b, il simbolo :

(6) $$a + b$$

indica il numero somma dei due, numero che si ottiene eseguendo l'operazione di addizione, come si è detto. È noto che i numeri sui quali si opera vengono chiamati abitualmente *addendi*; inoltre gli storici dicono che il simbolo " $+$ " proviene dalla deformazione della lettera corsiva "p", che a sua volta stava ad indicare la parola latina "plus" (che significa appunto "più").

Il simbolo (6) è oggi universalmente adottato per indicare la somma di due numeri; esso a noi appare oggi del tutto naturale, ma conviene ricordare anche qui che questa simbolizzazione è convenzionale e quindi anche artificiale. Infatti, per esempio nella numerazione romana, la somma di due numeri uguali a dieci si indica con XX; in altre parole, per i Romani il semplice accostamento di due simboli X voleva indicare il numero 20, che è la somma dei numeri indicati da ognuno di essi.

Occorre evitare di dire che questa convenzione è errata, perché la scelta di ogni convenzione è libera, e sottoposta al solo legame di non contraddire altre scelte fatte precedentemente. Tuttavia si può dire che la scelta fatta dai Romani male si adatta a rappresentare le operazioni aritmetiche in modo comodo e sicuro. Ma sono stati osservati dei casi in cui dei soggetti leggevano le rappresentazioni dei numeri con le ordinarie cifre arabe utilizzando le abitudini dei Romani. Si trattava ovviamente di un errore; ma conviene forse osservare che le convenzioni da noi oggi adottate per rappresentare i numeri naturali possono apparire complicate: infatti, alcuni soggetti trovano forse più naturale utilizzare le procedure dei Romani; il che può servirci per comprendere che non tutti gli errori sono uguali, e che può accadere che certi comportamenti sbrigativamente classificati come errati non sono sempre prove d'incapacità di concettualizzare e di astrarre, ma sono forse dovuti a rigetto di convenzioni che, come abbiamo già detto, a noi appaiono semplici e naturali, ma che forse tali non sono per tutti.

Anche nel caso del simbolo (6) si può osservare che esso viene letto in forma diacronica, procedendo nel tempo, da sinistra a destra, come avviene per gli scritti: occorre quindi mettere esplicitamente in evidenza certe proprietà dell'operazione che non appaiono immediatamente nell'espressione che noi utilizziamo. Tali proprietà conseguono dalle proprietà della riunione di due insiemi.

La prima di queste proprietà viene chiamata *proprietà commutativa* della somma, e viene espressa dalla formula:

(7) $$a + b = b + a.$$

In questa formula figura il simbolo " $=$ ", il quale qui significa che i due simboli, quello alla sua destra e quello alla sua sinistra, indicano lo stesso numero. Di solito, a giustificazione della (7), viene osservato che l'insieme che risulta dall'unione di due insiemi non dipende dall'ordine in cui di questi ultimi sono considerati. Così, nell'esempio fatto sopra nel paragrafo 7, l'insieme degli alunni che si ritroveranno nell'aula magna dell'istituto non dipende dall'ordine in cui le due classi vi si trasferiscono.

Pertanto si suole presentare la (7) come una formula che esprime, come si è detto, una proprietà dell'operazione di addizione, cioè una proprietà fondamentale del nostro modo di operare; infatti essa dice, ripetiamo, che il risultato dell'operazione di unione di due insiemi non dipende dall'ordine con il quale abbiamo operato sugli insiemi stessi.

9 - Per analizzare ulteriori proprietà dell'operazione di unione di insiemi disgiunti, e quindi dell'operazione di somma di numeri, che le corrisponde, occorre ampliare l'ambito delle nostre considerazioni, e precisamente considerare la possibilità di eseguire l'operazione di unione su tre o più insiemi. Rifletteremo sul caso di tre insiemi, perché gli altri si riducono facilmente a questo. Consideriamo dunque tre insiemi, ai quali daremo i nomi A, B, C. Accettiamo dall'esperienza comune che si possa eseguire l'unione di tutti e tre, e che così si ottenga un insieme; tuttavia si può osservare che questa operazione si può effettuare in più di un modo: infatti noi sappiamo finora che cosa si intende per unione di due insiemi. Pertanto, se vogliamo costruire l'insieme riunione di tre non resta che sceglierne due, per esempio A e B, considerare l'insieme unione, e riunire quest'ultimo con l'insieme rimasto, che in questo caso è C. Tuttavia si osserva subito che la prima operazione non è univocamente determinata dai tre insiemi dati: possiamo, infatti, per esempio, incominciare con il costruire l'unione dei due B e C, e poi eseguire l'unione dell'insieme così ottenuto col rimanente, che, in questo caso, è A. Come abbiamo già fatto in altri casi, accettiamo dall'esperienza elementare comune che con le due procedure diverse si ottiene sempre lo stesso insieme, che viene chiamato unione dei tre insiemi dati; e così pure accettiamo che una proprietà analoga valga anche per la somma dei tre numeri naturali, che rappresentano i tre insiemi.

Ora si tratta di esprimere queste proprietà, che noi accettiamo come valide, con i simboli che abbiamo adottato per rappresentare le operazioni sui numeri. La soluzione di questo problema rende necessaria l'introduzione di ulteriori convenzioni e di altri simboli, oltre a quelli già introdotti. Nella pratica comune della matematica elementare, la proprietà che abbiamo accettata come valida per la riunione di tre insiemi trova una sua corrispondente proprietà nella somma di tre numeri, che viene espressa con la formula seguente: indicando rispettivamente con a, b, c i numeri degli elementi degli insiemi $A,\ B,\ C$ considerati, si scrive:

(8) $$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Osserviamo che in questa formula ci sono due simboli del linguaggio comune che non abbiamo ancora incontrato prima d'ora in espressioni di matematica: sono le due parentesi "(", ")", rispettivamente aperta e chiusa. Osserviamo inoltre che la lettura della formula (8), cioè la comprensione del suo significato, richiede che si stabiliscano certe convenzioni. Queste sono molto analoghe, anche se non del tutto identiche, alle convenzioni che regolano l'impiego corretto delle parentesi nel linguaggio scritto. Si potrebbero esporre queste ultime dicendo che anzitutto le parentesi debbono sempre essere scritte a coppie, e che la parentesi aperta deve sempre precedere quella chiusa; in secondo luogo che, se in un periodo viene inserita una coppia di parentesi, il periodo stesso deve poter conservare una struttura sintatticamente corretta anche se le due parentesi fossero soppresse, insieme con tutte le parole comprese tra esse.

Abbiamo detto che le regole convenzionali che valgono per la lettura delle formule matematiche contenenti parentesi sono analoghe a quelle or ora esposte; infatti, la prima è sempre valida, ma occorre osservare che nelle formule matematiche possono essere presenti coppie di parentesi interne ad altre coppie. Per quanto riguarda la seconda regola, si suol dire che l'espressione contenuta in una coppia di parentesi [la prima delle quali aperta e la seconda chiusa, senza che esistano in mezzo altre parentesi] deve essere considerata come *un tutto unico*. Poiché di solito tra le due parentesi esiste un'espressione con le indicazioni di certe operazioni da eseguirsi su certi numeri indicati, la regola porta come conseguenza che, nell'eseguire i calcoli, le operazioni indicate tra parentesi debbono essere eseguite prima delle altre, indicate fuori delle parentesi. E se vi sono più coppie di parentesi, le une interne alle altre, debbono essere eseguite prima le operazioni indicate nelle coppie di parentesi più interne.

Applicando queste regole alla formula (8) si ha che a sinistra del segno " $=$ " sono indicate due addizioni, e che quella indicata tra parentesi si intende da eseguirsi prima di quella indicata fuori; quest'ultima quindi va intesa come l'addizione del numero c con il risultato dell'addizione, già eseguita, dei due a e b. In modo analogo, ma ovviamente diverso, si intende l'indicazione che sta alla destra del segno " $=$ "; quest'ultimo poi sta ad indicare che i due simboli, quello che sta alla sua sinistra e quello che sta alla sua destra, indicano lo stesso numero.

Come è già stato fatto, si interpreta la (8) come esprimente una proprietà dell'operazione di addizione; proprietà che, come è noto, viene chiamata *associativa*. Il nome ha un'ovvia spiegazione, perché richiama la possibilità di "associare" appunto due addendi, per sostituirli con la loro somma. Osserviamo qui che il sussistere della proprietà associativa dell'operazione permette di indicare, senza timore di ambiguità, la somma di tre numeri con il semplice simbolo:

(9) $$a + b + c,$$

senza dover indicare in quale ordine debbano essere eseguite le operazioni parziali.

Ribadisco tuttavia ancora una volta che queste indicazioni, pur essendo universalmente adottate, sono pur sempre convenzionali; quindi esse potrebbero essere sostituite con altre convenzioni, che ovviamente avranno altre regole di lettura e di scrittura. Per la matematica si potrebbe pensare difficile che ciò possa avvenire, data la diffusione grandissima dei modi tradizionali di scrittura e di lettura delle formule; ma nella logica simbolica sono state proposte diverse convenzioni di scrittura e di lettura, ed alcune di queste non utilizzano parentesi, ed evitano ambiguità e contraddizioni con opportune regole di lettura delle espressioni.

Dico questo per ribadire ancora una volta il fatto che certe convenzioni possono presentare delle difficoltà a certe menti, senza che ciò possa essere diagnosticato come sintomo di difficoltà, o peggio di incapacità di astrazione e di costruzione di concetti. Forse, se si tenessero presenti queste osservazioni, talvolta il giudizio perentorio su certi soggetti, espresso in termini drastici come “Non sa ragionare”, oppure in termini equivalenti, anche se attenuati, dovrebbe essere cambiato in “Non sa utilizzare speditamente le convenzioni del linguaggio matematico“; e ciò potrebbe forse anche suggerire diverse strategie di intervento, e comunque aiuterebbe a localizzare ai giusti livelli le eventuali deficienze di certi soggetti.

10 - Ciò che abbiamo visto finora a proposito delle operazioni sui naturali ci permette ora di affrontare il problema della rappresentazione dei naturali stessi con le convenzioni universalmente adottate da tutti i paesi civili, per le operazioni commerciali, per la tecnica e per la scienza.

Queste convenzioni, come tutti sappiamo, sono diverse da quelle utilizzate dai Romani, e utilizzano dieci simboli convenzionali che vengono chiamati, come è noto, cifre arabe. Infatti, queste convenzioni sono state inventate dagli indiani, ma sono venute a noi attraverso la civiltà araba, e sono state diffuse nell’Occidente medievale per opera del matematico Leonardo Pisano detto il Fibonacci, nel secolo XIII. Tutti abbiamo imparato a usare queste convenzioni fin dalla scuola elementare, perciò non mi soffermerò a descriverle, preferendo invece riflettere sulle operazioni logiche sottostanti, e quindi sulle eventuali difficoltà che questi sistemi di scrittura, che a noi appaiono naturali a causa della lunga abitudine, possono presentare per alcune menti.

Ho detto poco sopra che queste convenzioni di scrittura utilizzano dieci cifre. Nove tra queste indicano dei numeri naturali; la decima è chiamata "zero" ed ha un significato del tutto singolare. Chi volesse dire che essa rappresenta un numero dovrebbe aggiungere che si tratta del numero degli elementi di un insieme che non ha elementi.

L’abitudine ci fa trascurare talvolta l’arditezza di questa convenzione; ma la difficoltà che essa presenta per alcune menti ci mostra tuttavia che la sua accettazione costringe la nostra mente a fare, per così dire, un salto nel vuoto: infatti, secondo la concezione abituale, e primitiva, il numero dovrebbe servire a contare gli elementi di un insieme; e si potrebbe obbiettare che, se tali elementi non esistono, non ha alcun senso il contarli, perché questa operazione cessa di avere una motivazione.

È questa una posizione che è legata all’intuizione, e che è stata seguita da molti popoli che avevano del resto una matematica logicamente molto progredita, per esempio dai Greci; e del resto abbiamo ricordato la numerazione romana, nella quale non esiste un simbolo analogo al nostro zero. Non dobbiamo quindi stupirci per il fatto che questa operazione di creazione di un simbolo artificiale per indicare un numero che, per così dire, non esiste, offra spesso delle difficoltà a certe menti.

11 - L’utilizzazione di simboli particolari per indicare certi numeri non è la sola convenzione che caratterizza la nostra numerazione: abbiamo visto infatti (nel paragrafo 6) che anche la numerazione con le convenzioni romane utilizza dei simboli appositi per certi numeri determinati.

Un altro momento fondamentale per la costruzione di un sistema di convenzioni è l’operazione di conteggio per gruppi. Nelle nostre convenzioni, il gruppo fondamentale è costituito da dieci elementi; ed è chiaro che, una volta imboccata questa strada, è possibile pensare a gruppi di gruppi, a gruppi di gruppi di gruppi eccetera. Come abbiamo detto, questa procedura permette di rappresentare numeri comunque grandi, e quindi conduce a costruire un sistema di simboli che permette di raggiungere questo scopo.

Possiamo osservare che il momento fondamentale in questa procedura è la costruzione del gruppo di elementi, e non il numero di quelli che lo costituiscono, purché, ovviamente, tale numero sia maggiore di uno. Così si può contare per coppie, per terne, per cinquine, per dozzine; quest’ultima pratica è ancora oggi utilizzata in certi rami del commercio. Questa osservazione fonda certi esercizi sul "calcolo multibase" che riempiono molte pagine di certi manuali; l'idea non è nuova, perché già il grande matematico e filosofo G. Leibniz del secolo XVIII aveva osservato che la numerazione in base due è in molti casi più semplice e più immediata e comoda di quella in base dieci; e le applicazioni che di queste idee si fanno nelle macchine calcolatrici elettroniche dimostrano la loro validità.

Tuttavia occorrerebbe osservare che esistono delle menti che già si trovano a disagio nelle convenzioni abitualmente utilizzate, e che il numero eccessivo di esercizi di cambiamento di base può confondere le idee in certe teste, invece di chiarirle. Per la pratica quotidiana del commercio, della tecnica e della scienza, la scelta del dieci come base della numerazione è un fatto che condiziona moltissima parte della nostra attività e del nostro sistema di rappresentazione e di comunicazione delle idee. Pertanto la didattica dell'aritmetica elementare si è sempre sforzata di aiutare gli alunni alla procedura di conteggio per decine, centinaia, migliaia, ecc.

Non mi pare questo il luogo per suggerire gli espedienti didattici spiccioli, ma voglio ricordare che il vecchio pallottoliere mi sembra uno strumento molto efficace per aiutare gli alunni nell'assimilazione delle procedure di conteggio e di rappresentazione in base dieci; e del resto è noto che in certi Paesi dell'Oriente il pallottoliere è uno strumento di uso quotidiano per i calcoli aritmetici nelle operazioni commerciali.

Voglio tuttavia ricordare che nei programmi ministeriali di aritmetica per le scuole elementari del 1945 si leggono le seguenti frasi:

"*Per gli esercizi di numerazione e di calcolo intuitivo delle prime classi il buon senso (!) ha ormai condannato il vecchio pallottoliere, come tipica espressione dei sussidi didattici preformati e usati fino alla noia, con scadimento di qualsiasi interesse. Il vario, il nuovo, l'occasionale e tutti i mezzi didattici che rispondono a questi requisiti saranno meglio indicati per i predetti esercizi, che possono pure giovarsi dei giochi, del disegno e del lavoro*".

Io non vedo come il buon senso possa condannare un sussidio didattico che mi pare semplice e chiaro; tuttavia sono disposto ad accettare ogni innovazione purché non sia dettata dalla ricerca del nuovo a qualunque costo.

12 - Abbiamo visto due delle convenzioni della nostra numerazione: la scelta di simboli particolari (cifre) per certi numeri determinati, e la scelta del numero dieci per costituire i raggruppamenti fondamentali degli oggetti.

Esiste poi una terza convenzione, la quale viene abitualmente richiamata parlando di "valore posizionale delle cifre". In conseguenza di questa convenzione, per esempio scrivendo "237" si suole indicare, per accostamento delle cifre, una somma: ma non, si badi, la somma di $2 + 3 + 7$, come avverrebbe secondo le convenzioni romane, ma, come è noto, la somma di 7 unità, 3 decine, 2 centinaia. Quindi, come suol dirsi, ogni cifra indica un numero che dipende dalla posizione che la cifra stessa ha nella scrittura. Qui entra in modo fondamentale il simbolo zero, che dimostra la sua utilità nella scrittura dei numeri secondo queste convenzioni.

Consideriamo il caso del numero trecentodue; con le convenzioni romane esso verrebbe scritto "CCCII", accostando semplicemente tre simboli di cento a due stanghette; la somma, come abbiamo detto, è indicata dall'accostamento. Invece, nella convenzione usuale, occorre scrivere "302"; questo simbolo indica che un qualunque insieme il cui numero cardinale è trecentodue può essere descritto come la riunione di un insieme di due elementi con tre insiemi di gruppi di dieci gruppi di dieci; e nessun insieme di dieci elementi. Nella numerazione romana non è necessario sottolineare esplicitamente questa assenza; mentre nella numerazione arabo-indiana occorre scrivere necessariamente zero al secondo posto da destra.

Mi pare che questo esempio sia sufficiente per mostrare che le convenzioni abituali sono in certo senso più complicate ed esigenti di quelle romane, che si presentano, per così dire, più naturali. Ovviamente queste osservazioni non hanno lo scopo di rinunciare alla numerazione arabo-indiana, che è ormai di uso comune quotidiano, e la cui conoscenza è quindi condizione quasi necessaria per evitare un'emarginazione pesante dalla vita sociale. Soltanto ho voluto mettere in evidenza alcune difficoltà che nascono dalle convenzioni adottate universalmente; ciò può portare alla comprensione del comportamento di alcuni soggetti, ed alla ricerca di strategie didattiche adatte a far superare difficoltà che - a mio parere - non si situano al livello della costruzione dei concetti, e dell'astrazione e della deduzione logica, ma al livello dell'utilizzazione dei mezzi di espressione e di comunicazione.

Mi pare che il distacco, per così dire lo scollamento, tra il simbolo e il significato sia una delle ragioni di grandi difficoltà di apprendimento; infatti ciò induce molti soggetti alla memorizzazione delle parole rinunciando alla comprensione, quindi rinunciando a quell'autonomia di comportamento che è uno degli scopi dell'educazione. Ne consegue anche una sensazione di frustrazione e di emarginazione, e quindi un distacco sempre meno colmabile tra la società e i soggetti in difficoltà.

13 - È noto che l'addizione non è la sola delle operazioni che vengono insegnate dall'aritmetica elementare. In certe strutturazioni abituali l'addizione viene seguita immediatamente dalla moltiplicazione, la quale viene presentata come *addizione ripetuta*: per esempio si suole dire e far scrivere:

(10) $$5 \times 3 = 5 + 5 + 5.$$

Tracce della schematizzazione della moltiplicazione come abbreviazione di addizioni ripetute restano nel modo di leggere i simboli: per esempio la (10) viene letta con la frase " cinque per tre", che potrebbe essere considerata come un relitto di una frase completa del tipo: "cinque (sommato) per tre (volte)"; questa ipotesi potrebbe essere confermata dal modo di leggere la moltiplicazione che si pratica in altre lingue: per esempio in francese la (10) viene spesso letta: cinq fois [volte] trois", ed in inglese: "five times [volte] three".

È anche noto che nelle scuole primarie si avviano gli scolari alla memorizzazione dei risultati di certe operazioni elementari di moltiplicazione tra numeri che, con le abituali convenzioni arabe, sono rappresentati da una sola cifra: una volta l'insieme di questi risultati era chiamato "tavola pitagorica"; oggi si preferisce parlare di "tabelline", ma la pratica rimane la stessa, e richiede una memorizzazione, la quale può risultare notevolmente difficile per soggetti che, per varie ragioni, non seguono bene il discorso aritmetico. E del resto, come abbiamo visto sopra, nel paragrafo 5, anche un soggetto di alta intelligenza come è Agostino può trovare deprimente la memorizzazione, o forse si trova a disagio di fronte agli espedienti didattici che vorrebbero imporla e addirittura (chissà?) facilitarla.

Si direbbe che la tradizione didattica e l'abitudine rendano assolutamente necessario il passaggio attraverso questo faticoso apprendimento, per chi vuole manovrare le operazioni abituali; ma io penso che si potrebbe forse in alcuni casi scindere la difficoltà di memorizzazione dell'operazione da quella concettuale dell'apprendimento del suo significato e della sua portata; forse occorrerebbe pensare seriamente ad una utilizzazione metodica ed intelligente delle macchinette calcolatrici tascabili, che oggi sono alla portata di tutti, e che potrebbero essere utilizzate (ripeto in modo intelligente e prudente) per superare almeno in parte certi scogli altrimenti molto insidiosi.

E del resto, al paragrafo 4, abbiamo visto che una grandissima abilità di calcolo può accompagnarsi con deficienze mentali, anche gravi; pertanto penso che sia possibile distinguere le difficoltà del calcolo e quelle del pensiero logico, e mirare anzitutto a far superare queste ultime, sfruttando per i calcoli anche i sussidi materiali.

Possiamo osservare infine che, anche per la moltiplicazione di due numeri è possibile fare la distinzione tra l'operazione che si esegue ed il suo risultato: così si può chiamare *prodotto* di due numeri il risultato della operazione della loro moltiplicazione. Ma anche in questo caso le abitudini diffuse portano a trascurare questa distinzione: si sente dire, e si legge frequentemente, la frase "eseguire il prodotto" di due numeri laddove sarebbe forse meglio parlare di moltiplicazione.

Infine ricordiamo che, quando si esegue la moltiplicazione di due numeri, questi vengono anche chiamati abitualmente *fattori* del prodotto.

Ricordiamo anche che un numero c, che si ottiene come risultato della moltiplicazione di due numeri a e b, viene anche detto "multiplo" dell'uno e dell'altro fattore.

14 - L'operazione di moltiplicazione possiede proprietà formali che hanno nomi ben noti; tali proprietà sono espresse dalle formule:

(11) $a \times b = b \times a$ (proprietà *commutativa*);

(12) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ (proprietà *associativa*);

(13) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (proprietà *distributiva* del prodotto rispetto alla somma).

Nelle formule (12) e (13) compaiono delle parentesi, con significato che abbiamo già commentato sopra, nel paragrafo 9.

In particolare si noti che alla destra del segno " $=$ " nella (13) sono indicate tre operazioni: due moltiplicazioni e un’addizione; occorre qui ricordare che una convenzione fondamentale della matematica impone che le moltiplicazioni siano eseguite prima delle addizioni.

Ciò porta ulteriori difficoltà a certi soggetti, che sono portati in modo naturale ad eseguire le operazioni nell’ordine nel quale esse sono indicate: quindi per esempio, secondo queste convenzioni matematiche si ha:

(14) $$3 + 4 \times 5 = 23,$$

mentre molti soggetti tenderebbero a trovare 35, come si otterrebbe eseguendo prima l’operazione di addizione (che è indicata per prima) ed ottenendo 7, e poi l’operazione di moltiplicazione; se si volesse avere questo risultato occorrerebbe scrivere:

(15) $$(3 + 4) \times 5 = 35.$$

15 - La presentazione della moltiplicazione come "addizione ripetuta" non è il solo espediente usato nella didattica; infatti la moltiplicazione potrebbe essere presentata come operazione sui numeri che consegue alla costruzione dell’insieme che viene chiamato *prodotto cartesiano* di due insiemi dati. Per esempio, se fosse da eseguire l’operazione che si indica con 3×2, si potrebbe immaginare la coppia di insiemi: $\{a, b, c\}$ di tre elementi, e $\{u, v\}$ di due e si potrebbe proporsi di costruire l’insieme P i cui elementi sono tutte le possibili coppie ordinate, costituite da un elemento di uno degli insiemi e da un elemento dell’altro: si avrebbero così le 6 coppie:

(16) $$(a, u) \quad (b, u) \quad (c, u) \quad (a, v) \quad (b, v) \quad (c, v).$$

Questo modo di presentare la moltiplicazione può forse essere considerato più complicato del precedente; ma esso offre il vantaggio di rendere quasi immediatamente sperimentabili e, per così dire, visibili due proprietà formali dell’operazione di moltiplicazione, precisamente la proprietà commutativa e la distributiva .

È noto che le procedure abitualmente insegnate per eseguire la moltiplicazione di due numeri si fondano sulle proprietà formali che abbiamo richiamato poco sopra. Tuttavia la grande maggioranza di coloro che eseguono queste operazioni applica la regole ma non saprebbe forse immediatamente giustificarle. Pertanto vorrei richiamare qui ciò che ho detto alla fine del paragrafo 13, osservando che occorrerebbe forse meditare su un intelligente impiego dei mezzi di calcolo (che oggi sono alla portata di tutti) e concentrare gli sforzi sull’insegnamento delle procedure logiche fondamentali. Infatti l’esperienza quotidiana mostra che anche i piccoli commercianti e gli operatori economici di tutti i livelli utilizzano i calcolatori tascabili; ciò prova, a mio parere, che la parte puramente meccanica ed addestrativa del calcolo numerico può essere utilmente messa in secondo piano, purché rimanga chiaro il significato dell'operazione che si compie.

Ricordiamo inoltre che l'operazione di moltiplicazione tra numeri viene indicata spesso anche con simboli diversi da quello utilizzato nella (10) e nelle altre formule successive: così per esempio si suole indicare la moltiplicazione nei modi seguenti:

(17) $$5 \cdot 3, \quad \text{oppure} \quad 5 * 3;$$

ciò provoca a volte qualche difficoltà e qualche incertezza di lettura e di interpretazione delle formule; ma riesce spesso difficile convincere le persone a cambiare abitudini e consuetudini acquisite da lungo tempo.

16 - Finora abbiamo preso in considerazione due operazioni aritmetiche: la somma ed il prodotto tra numeri. Ed abbiamo cercato di ricordare le esperienze elementari che più frequentemente portano ad operare in questo modo sui numeri naturali che rappresentano, a certi fini, le realtà concreta che viene da noi manipolata. Esistono tuttavia anche altri problemi pratici che danno luogo a operazioni aritmetiche: tali problemi vengono spesso classificati come *problemi inversi* e le operazioni corrispondenti vengono anche classificate come *operazioni inverse*.

Anche queste denominazioni sono in larga misura tradizionali, ed hanno una loro giustificazione, anche se possono generare talvolta qualche perplessità. Tali operazioni sono, come è noto, la sottrazione e la divisione; cercheremo qui di richiamare alcune operazioni concrete sugli insiemi finiti che danno origine a queste operazioni ed analizzeremo le corrispondenti operazioni sui numeri naturali.

Per quanto riguarda la sottrazione, supponiamo per il momento di conoscere il significato dell'espressione "*sottoinsieme* di un dato insieme". Sia per esempio A un insieme e B un suo sottoinsieme; allora la presentazione intuitiva dell'operazione sui numeri viene fatta con riferimento all'operazione che si potrebbe chiamare di "scorporo" dell'insieme B dall'insieme dato A. Accettiamo che come risultato di questa operazione si ottenga un insieme. Allora ha senso considerare un numero c corrispondente all'insieme C che rimane dopo lo scorporo di B da A; usando, come al solito, la convenzione di indicare con lettere minuscole i numeri corrispondenti agli insiemi, si suole indicare il numero c con la formula ben nota:

(18) $$c = a - b.$$

Come è noto, si suole chiamare *sottrazione* l'operazione indicata con la (18), ed il risultato della operazione viene chiamato "*differenza* tra i numeri a e b". La genesi del nome potrebbe essere ricondotta a un'altra interpretazione dell'operazione, che vedremo tra breve.

Anche nel caso della sottrazione appare immediata l'estensione al caso in cui l'insieme B coincida con A; in tal caso, si usa dire che si ottiene come risultato dello scorporo un insieme che non ha elementi, e si assegna come risultato della sottrazione lo zero. Ci siamo già soffermati su questo concetto nel paragrafo 10, e ritorneremmo sulla questione nel capitolo 5; infatti queste convenzioni, e le relative regole di calcolo sui simboli, possono offrire delle difficoltà di comprensione .

17 - Come abbiamo detto poco sopra, l'operazione di sottrazione si presenta anche in relazione ad un'altra situazione concreta, la quale viene simbolizzata nello stesso modo dell'operazione di scorporo, ma presenta qualche difficoltà concettuale a diversi soggetti. Vorrei presentare tale situazione facendo riferimento a un problema elementare, tipico in queste questioni: si tratta di determinare "quanti elementi mancano all'insieme B per averne tanti quanti ne ha l'insieme A".

Ho detto che un problema come questo può presentare qualche difficoltà a diversi soggetti; un primo rudimentale tentativo di spiegazione di tali difficoltà potrebbe far riferimento a una difficoltà generale che certi soggetti hanno nel rappresentarsi mentalmente "come le cose dovrebbero essere " o anche, in altra forma, "come saranno o appariranno quando sarà eseguita una certa operazione". Forse il tentativo di ricercare la radice di certe difficoltà potrebbe anche aiutare gli operatori nel lavoro di ricupero, lavoro che spesso si presenta come abbastanza difficile e deludente. Non mi pare qui il luogo per proseguire in questa direzione; mi limito a osservare che spesso certi problemi si risolvono aritmeticamente con le medesime operazioni, ma offrono difficoltà diverse a certe menti che devono passare dall'enunciato, o dalla situazione concreta, alla trascrizione simbolica e al calcolo.

Infine osservo che anche l'esecuzione dell'operazione di sottrazione viene insegnata con riferimento alla rappresentazione abituale dei numeri con cifre arabe; ciò può dar luogo ad ulteriori inciampi nella manipolazione del simbolismo e delle sue convenzioni; ma vorrei ricordare ciò che ho detto ripetutamente sopra, nei paragrafi 13 e 15, a proposito della distinzione tra significato delle operazioni e la loro esecuzione concreta, che può essere ottenuta anche facendo ricorso a strumenti, evitando di sovraccaricare la mente di regole da memorizzare, e delle quali spesso riesce difficile ricordare la motivazione.

L'operazione di sottrazione viene spesso presentata come "operazione inversa" dell'addizione. Questa denominazione viene giustificata in termini intuitivi con le operazioni tra insiemi finiti: accettiamo infatti che se si scorpora da un insieme A un suo sottoinsieme B, e poi lo si unisce all'insieme rimanente, si riottiene A; lo stesso si può dire se si unisce un insieme B ad A (supponendo che non abbiano elementi comuni) e poi dall'insieme unione si scorpora B o un insieme che sia in corrispondenza biunivoca con B. Queste osservazioni intuitive si traducono con le formule:

(19) $$(a-b)+\ b\ =\ (a\ +\ b)\ -\ b\ =a.$$

18 - L'operazione di sottrazione conduce in modo quasi naturale alla considerazione della relazione d'ordine, che sussiste tra i numeri naturali; è infatti immediato comprendere che si può scorporare un insieme da un altro soltanto se questo secondo è, in qualche modo, "più grosso" del primo. Nasce così la necessità di introdurre una relazione che è già stata adombrata nella stessa tecnica di memorizzazione della successione dei numeri (1). Ma occorre osservare in più che nella cantilena di enunciazione dei naturali l'ordine è quello che nasce semplicemente dalla successione temporale, mentre il confronto tra numeri naturali introduce in modo quasi necessario l'aspetto cardinale del numero naturale. In questo atteggiamento, un insieme finito di oggetti ha come immediato successivo un insieme che ha un elemento "in più". È noto che si suole scrivere:

(20) $$a\ <\ b$$

per indicare che il numero a è minore del numero b; e si suole scrivere anche:

(21) $$b\ >\ a$$

per indicare in altro modo la stessa relazione indicata con la (20). Sappiamo anche che la relazione indicata con le (20) e (21) ha la proprietà che viene chiamata *transitiva*:

(22) se è $a\ <\ b$ ed anche $b\ <\ c$, allora è anche $a\ <\ c$.

Infine si ha che, dati due numeri, o essi sono uguali, oppure uno dei due è minore dell'altro; e ciò si esprime dicendo che la relazione indicata stabilisce un *ordinamento totale* dell'insieme dei naturali.

È noto che alcuni autorevoli psicologi, nella scia di Jean Piaget, considerano l'acquisizione di una proprietà formale, ad esempio la transitiva espressa dalla (21), come un momento fondamentale della formazione di strutture logiche nella mente infantile.

Mi sembra di poter dire che certamente l'acquisizione di una proprietà formale significa il possesso di uno strumento logico, cioè di uno strumento che permette di dedurre, di prevedere ciò che avverrà indipendentemente da ogni esperimento concreto, con una certezza che viene percepita come valida per ogni possibile esperimento.

19 - Una seconda operazione che viene qualificata come "operazione inversa" è la divisione; questa presenta spesso una grave difficoltà di comprensione, difficoltà talvolta accresciuta da un vocabolario tecnico (che annovera parole come "quoziente", "quoto", "resto") che disorienta chi ha già difficoltà di comprensione dei concetti e delle operazioni. Le immagini tratte dalla manipolazione degli insiemi concreti forniscono spesso i punti di partenza per la considerazione dell'operazione di divisione; così, facendo riferimento all'immagine della moltiplicazione come addizione ripetuta, si può immaginare un insieme C che si ottiene come unione di tante copie dell'insieme A; allora si può immaginare di eseguire l'operazione inversa, cioè di ridistribuire gli elementi di C (l'insieme grande), in tanti insiemi che sono copie di A; in formule, se si ha un numero c multiplo di a, che cioè può essere scritto nella forma:

(23) $$c\ =\ a\ \times\ b,$$

allora si suole anche scrivere:

(24) $$c:b\ =\ a\ ,$$

leggendo "c diviso per b è uguale ad a". Il simbolo ":" sta ad indicare l'operazione aritmetica che corrisponde all'operazione di *distribuzione* degli elementi di C di cui abbiamo detto.

L'operazione indicata con la (24) viene chiamata "divisione di c per b" e, come è noto, il numero c viene chiamato "*dividendo*", il numero b viene chiamato "*divisore*" ed il numero a viene chiamato "*quoto*".

Ricordiamo qui che i programmi d'insegnamento dell'aritmetica nelle scuole elementari editi nel 1924 (i programmi della cosiddetta Riforma Gentile), suggerivano che la formula (23), che indica l'operazione di divisione, nelle prime classi potesse anche essere letta con la frase: "c distribuito a b". Credo che si possa pensare che il legislatore avesse in mente un'immagine dell'operazione del tipo di quella che abbiamo richiamato sopra.

Osserviamo che dalle (23) e (24) si trae facilmente la ragione che fonda il nome, che viene dato alla divisione, di "operazione inversa della moltiplicazione"; infatti si ha:

(25) $$(a \times b) : b = a$$

ed anche:

(26) $$(c : b) \times b = c.$$

Ricordiamo anche che l'operazione di divisione viene indicata in modi diversi da quello dato sopra nella (24): infatti si suole anche scrivere:

(27) $$c \,/\, b = c : b = a,$$

e spesso, invece della sbarretta inclinata "/" si suole anche scrivere una sbarretta orizzontale, sopra la quale si scrive c e sotto la quale si scrive b: $\dfrac{c}{b}$.

Questi modi di scrittura sono frutto di tradizioni e di abitudini delle varie scuole, dei vari Paesi e spesso anche dei singoli Autori. Spesso queste diversità generano confusioni ed equivoci, ma ricordiamo ancora una volta che non è possibile dire che una convenzione diversa dalla nostra è errata; occorre sopportare le scomodità e cercare di superare le confusioni e gli equivoci.

20 - L'operazione di divisione che abbiamo considerato finora si fonda sull'ipotesi che, nella (24), il numero c sia multiplo di b; sappiamo tuttavia che è possibile considerare un'operazione che si esegue anche se questa ipotesi non vale; l'operazione viene chiamata in molti testi "*divisione con resto*". Secondo l'immagine concreta che abbiamo considerato nel paragrafo 19, si potrebbero presentare le cose nel modo seguente: siano gli oggetti dell'insieme C da distribuire tra b soggetti; possiamo immaginare di distribuire un oggetto alla volta per ogni soggetto, e può avvenire che, dopo un certo numero a di distribuzioni (di giri, di turni) restino degli oggetti in numero minore di b, di modo che non sia più possibile dare un oggetto a ciascuno; rimane quindi un insieme R, che ha un numero r di oggetti minore di b. Questo numero r viene chiamato, come è noto, *resto* della divisione di c per b, ed il numero a delle distribuzioni che sono state possibili viene chiamato "*quoziente*" della divisione di c per b. Si ha quindi la formula:

(28) $$c = a \times b + r, \text{ con } r < b.$$

Come è noto, nella pratica dei calcoli si cerca il massimo multiplo di b che sia minore di c; sia $a \times b$ questo multiplo. Allora il resto r della divisione viene calcolato come differenza tra c e $a \times b$.

È facile osservare che questa presentazione dell'operazione di divisione presenta a certi soggetti della difficoltà del tipo di quelle che abbiamo già rilevato sopra, al paragrafo 17. D'altra parte in questo caso i piccoli calcolatori tascabili debbono essere utilizzati con una certa precauzione, perché danno i risultati di questa operazione sotto forma di frazione decimale (numero con virgola); e questo simbolismo può presentare ulteriori inciampi per certe menti.

21 - A titolo di conclusione, almeno provvisoria, di questo capitolo vorrei osservare ancora una volta l'opportunità di distinguere tra le difficoltà concettuali che si presentano ad alcuni soggetti in relazione alle strutture fondamentali dell'aritmetica, le ulteriori difficoltà offerte dalle convenzioni di rappresentazione dei numeri, e le complicazioni che nascono dalle tecniche abitualmente insegnate per eseguire le operazioni, utilizzando le convenzioni di cui si diceva.

Pertanto ritengo che il lavoro di aiuto e di ricupero eventuale debba essere svolto tenendo presenti queste distinzioni; abbiamo infatti riflettuto sugli scopi dell'insegnamento, mettendo in evidenza da una parte l'opportunità di fornire ai soggetti gli strumenti di comunicazione e di inserimento nella vita sociale, e da un'altra parte l'opportunità di aiutare i soggetti a sviluppare una propria razionalità autonoma, che li renda, nei limiti del possibile, indipendenti dall'addestramento alla esecuzione di operazioni che rimangono per loro non fondate e rette da regole non motivate.

La ricerca di un equilibrio soddisfacente è un'impresa spesso difficile; ed è pure difficile dettare delle regole di comportamento che siano valide e di garantita efficacia in ogni caso. Pertanto ritengo che sia utile meditare sulle colonne portanti del pensiero matematico, per poter scegliere, nei limiti del possibile, le strategie didattiche più efficaci ad una crescita interiore dei soggetti che ci sono affidati.

III - LA RELAZIONE CON L'AMBIENTE E LA GEOMETRIA.

La relazione del soggetto con l'ambiente; la manipolazione degli oggetti rigidi e le esperienze fondamentali che conducono ai concetti geometrici. Il concetto di "gruppo di trasformazioni" e la ricerca degli invarianti degli oggetti geometrici. Proprietà elementari di geometria piana e solida.

1 - L’esperienza comune quotidiana ci mette continuamente in relazione con un mondo esterno, che è presente alle nostre sensazioni fino dalla nascita, probabilmente anche prima. Queste sensazioni sono dovute a vari sensi: soprattutto vista, tatto, sensazioni muscolari, propriocezione in genere. Inoltre ricordiamo che, fin dalla nascita, siamo immersi in un campo di forze, precisamente il campo gravitazionale terrestre, il quale ci fornisce un riferimento, per così dire naturale, fondando le nozioni di "alto" e "basso".

Inoltre le sensazioni muscolari fondano, da un’età molto remota per ognuno di noi, le sensazioni che conducono al concetto di *corpo rigido*; tutti crediamo di sapere che cosa si indichi con questa espressione, anche se la precisazione del concetto riesce difficile; infatti la descrizione di un corpo cosiffatto dovrebbe incominciare con il precisare che cosa si intende per "duro", e poi che cosa si intende per "indeformabile", e così via.

Tutte queste esperienze, che si accumulano fino a diventare per noi in certo senso naturali ed essenziali, fondano, a mio parere, il sistema di immagini sulle quali si costruisce il primo nucleo di quella dottrina che viene abitualmente chiamata "geometria".

2 - L’insieme delle esperienze che noi abbiamo nell’ambiente, in particolare con gli oggetti rigidi e con i fenomeni naturali di trasporto dell’energia (raggi di luce) sono stati oggetto di conoscenza razionale e coerente fin dai tempi più antichi; la geometria è quindi stata chiamata da qualche autorevole Autore "il primo capitolo della fisica". In essa infatti si può ravvisare il primo tentativo fatto dall’uomo per porre se stesso in modo razionale nel complesso degli oggetti che lo circondano e dei campi di forza nei quali è immerso.

Vale quindi la pena di analizzare, anche solo in modo superficiale, quali siano le caratteristiche di questa costruzione razionale che dà inizio a un capitolo importantissimo della matematica. Penso di poter fare queste osservazioni perché ritengo che la geometria sia frutto di una convergenza di facoltà mentali che concorrono alla sua costruzione: l’osservazione degli oggetti, l’elaborazione fantastica che ne costruisce un’immagine per così dire scheletrica e scarnita, un insieme di ragionamenti che conducono a prevedere ciò che non si vede ancora, a mettere in luce la necessità delle conclusioni di certi ragionamenti, a dedurre con rigore.

Insieme con queste operazioni mentali, la geometria richiede anche l’apprendimento e l’utilizzazione di vocaboli tecnici precisi, aventi significato univoco; ed anche questo costituisce un aspetto formativo della materia e una certa difficoltà per alcuni soggetti.

3 - È noto che la geometria costituisce il principale e prevalente contenuto del primo trattato scientifico che la nostra Storia conosca: il trattato degli *Elementi* di Euclide.

Questa testimonianza storica mi conferma nell’opinione che i contenuti e i metodi della geometria abbiano una particolare immediatezza e una chiara evidenza; il che è del resto anche confermato dall’evoluzione del pensiero matematico. Questo infatti giunse alla costruzione e all’utilizzazione dei simbolismi attualmente in uso soltanto dopo secoli, durante i quali la geometria è stata considerata come quasi l’unico contenuto della matematica.

Nelle trattazioni recenti dei fondamenti della matematica e della sua didattica è stato di moda considerare la geometria come un ramo superato della matematica, e quindi anche privo di valore cognitivo e formativo delle menti degli scolari. La mia opinione è del tutto diversa, come cercherò di far vedere. Anticipo qui che io credo che proprio la geometria, intesa nel senso che ho cercato di adombrare e che cercherò di approfondire nel seguito, possa essere di grande aiuto per quel ricupero della razionalità globale che dovrebbe accompagnare il lavoro di aiuto e di ricupero nell’area della matematica, accomunandolo a quello che si fa nell’ambito delle altre discipline. A questo scopo cercherò di analizzare la struttura della dottrina, così come la si concepisce oggi, tralasciando di soffermarmi sui particolari dei contenuti, che si possono conoscere dalla consultazione della trattatistica e della manualistica abituale.

4 - Un primo momento dello sviluppo della geometria è quello in cui si costruiscono mentalmente gli enti idealizzati che saranno poi oggetto dello studio e della deduzione.

Ho ricordato sopra l'apporto che la fantasia può dare nella costruzione di questi enti: infatti, parlando in modo approssimato, si potrebbe dire che la nostra fantasia costruisce questi enti dall'esperienza e dall'osservazione, tenendo conto soltanto della *forma* e della *posizione* degli oggetti materiali, trascurando la loro costituzione chimica e le loro proprietà fisiche.

Le ricerche teoriche sui fondamenti di geometria hanno messo in luce la possibilità di scegliere vari cammini per la costruzione degli enti elementari di questa dottrina: infatti, mentre per il concetto di *punto* i vari Autori non si discostano molto l'uno dall'altro, per quanto riguarda la *retta* già si hanno delle differenze: alcuni Autori preferiscono dare questa figura "in toto", come un insieme illimitato di punti (la retta infinita), che viene presentato nel suo complesso come un tutto unico. Altri Autori invece preferiscono presentare inizialmente il segmento rettilineo, partendo dal quale essi costruiscono la retta con procedure di prolungamento. Questo atteggiamento è tenuto per esempio da Euclide nei suoi *Elementi,* ed in epoca a noi più vicina dal matematico italiano G. Peano e dagli Autori della sua scuola.

Analoghe osservazioni potrebbero essere formulate a proposito del concetto di *piano*. Per quanto riguarda poi il termine *spazio*, che appartiene al linguaggio comune ed è ivi utilizzato in vari sensi, è noto che alcuni Autori ne vorrebbero addirittura fare l'oggetto della geometria, che è stata talvolta definita come "la scienza dello spazio". A questo proposito è interessante osservare che un noto vocabolario della nostra lingua [Fernando Palazzi. *Novissimo dizionario della lingua italiana*], in corrispondenza al termine "spazio" scrive:

"*L'estensione non terminata e non circoscritta che ha una indeterminata capacità di contenere i corpi"*. Ed enumera moltissimi sinonimi tra i quali mi limito a riportare qui i seguenti: *"ambito, area, aria, buco, campo, capacità , circuito, estensione, distanza, distesa, intermezzo, interstizio, intervallo, largo, largura, margine, piazza, posto, spiazzo, striscia, superficie, tratto, zona..."*

Come si vede, il termine "spazio" è impiegato nel nostro linguaggio comune in moltissime occasioni, e non sempre nello stesso senso.

Personalmente preferisco non utilizzarlo in senso tecnico; in particolare preferisco non richiamare questo vocabolo quando si cerca di precisare il significato del termine "geometria"; preferisco invece parlare di oggetti materiali o di fenomeni energetici (come i raggi di luce) che noi osserviamo e sui quali possiamo eventualmente operare. Su queste basi cercherò di analizzare le nostre esperienze più semplici, che conducono alla costruzione dei concetti elementari della geometria. Naturalmente la trattazione che darò farà largo appello all'esperienza, e non ha quindi la pretesa di essere rigorosa, secondo i canoni della critica matematica recente. Io penso infatti che gli studenti nell'età preadolescente non siano in grado di apprezzare completamente l'eleganza ed il rigore di una costruzione rigorosa e completa della geometria, come quella data dalla critica moderna dei fondamenti, anche se sono eventualmente in grado di memorizzare la trattazione.

Tuttavia penso che sia possibile costruire delle dimostrazioni rigorose, partendo da ipotesi ammesse anche provvisoriamente, in base ad esperienze idealizzate da sedicenti "intuizioni". In tal modo penso che sia possibile utilizzare le possibilità formative della geometria evitando di pretendere dagli alunni degli sforzi mentali che li allontanerebbero dallo spirito della materia, invece di formarli al ragionamento astratto e rigoroso.

Ovviamente ciò che ho detto degli alunni in età preadolescente si applica a maggior ragione ai soggetti con difficoltà di apprendimento. Ma sono convinto che i contenuti geometrici, presentati con gradualità, possano invece giovare a quella costruzione di una razionalità globale ed indipendenza ed autonomia di comportamento che, a mio parere, dovrebbe essere uno degli scopi dell'azione di aiuto e di ricupero.

5 - Per rimanere il più possibile aderente all'esperienza, ritengo che si possa dare per nota l'immagine del corpo rigido e delle manipolazioni che noi eseguiamo su di esso. In questo ordine di idee il primo passo che si potrebbe fare per instaurare una conoscenza rigorosa dell'ambiente potrebbe essere quello di stabilire la relazione di *uguaglianza* di segmenti, mediante il trasporto rigido di modelli concreti (asticciole e simili). In tal modo l'operazione di trasporto permette di constatare la sovrapponibilità, e quindi di fondare la relazione astratta di uguaglianza geometrica; se si vuole si può anche chiamare "congruenza" tale relazione; ma è forse bene non moltiplicare le denominazioni tecniche, il cui impiego corretto richiede distinzioni che non sempre vengono fatte con facilità e sicurezza. L'esperienza concreta permetterà anche di mettere in evidenza le proprietà formali della relazione di uguaglianza geometrica, proprietà che sono analoghe a quelle valide per la relazione di uguaglianza tra numeri che abbiamo visto nel Cap. II.

Su queste esperienze si può iniziare la costruzione di quella che viene indicata nei programmi come "geometria delle trasformazioni". Per il momento non diamo la definizione esplicita e formale del concetto di *trasformazione*; ci limitiamo per ora a elencare alcuni termini che abitualmente vengono considerati come sinonimi: corrispondenza biunivoca, biiezione, rappresentazione, funzione, mappa ecc.

Preferiamo riflettere qui su alcune perplessità che vengono provocate talvolta dall'impiego del termine "trasformazione" in geometria. Infatti, nel linguaggio comune, l'impiego di questo termine induce generalmente a immaginare dei cambiamenti, anche di forma esteriore, degli oggetti che si considerano: la crisalide che si trasforma in insetto, il volto di una persona che invecchia, l'albero che cresce, il pulcino che diventa galletto ecc. ecc.

Invece, nel caso delle figure geometriche, si parla di trasformazione anche in relazione ai movimenti rigidi, i quali non cambiano la forma esteriore di una figura spostata. In questo caso si direbbe quindi che l'operazione chiamata "trasformazione" non trasformi nulla. Si potrebbe riflettere che, a ben guardare, anche queste trasformazioni, che sembrano non trasformare nulla, nella realtà non lasciano proprio invariata ogni cosa: infatti, quando un qualunque oggetto rigido viene spostato, si può osservare che l'oggetto in sé non appare esteriormente come invariato, ma che è certamente cambiato l'insieme costituito dall'oggetto considerato e dagli altri oggetti che lo circondano, i quali costituiscono il riferimento rispetto a cui viene precisata la posizione dell'oggetto che è stato spostato. Quindi viene trasformato l'insieme delle relazioni dell'oggetto con l'ambiente, anche se l'oggetto può presentarsi singolarmente come invariato.

In quest'ordine di idee, l'insieme dei trasporti rigidi di un modello materiale di segmento può avviare alla introduzione del concetto di "gruppo di trasformazioni". Come è noto, nella matematica recente viene chiamato in questo modo un insieme di operazioni che posseggano le proprietà seguenti:

1- All'insieme appartenga la trasformazione identica, cioè quella trasformazione che non muove nulla.

[OSSERVAZIONE - Anche la considerazione di una "operazione che non opera" può essere giudicata come un'inutile ed astratta acrobazia intellettuale. Si può tuttavia osservare che una circostanza analoga si verifica in aritmetica con l'introduzione del concetto e del simbolo "0" (zero), oppure, in teoria degli insiemi, con l'introduzione del concetto di "insieme vuoto", indicato abitualmente con il simbolo "$\emptyset$". Tutte queste operazioni logiche possono essere giudicate, a rigore, come non necessarie: per esempio nell'aritmetica dei Greci e dei Romani non esisteva il simbolo "0".

Tuttavia con queste estensioni dei concetti abituali si consegue una notevole semplificazione delle formule e dei calcoli. Pertanto queste introduzioni di nuovi concetti, e dei corrispondenti simboli, non sono inutili o cervellotiche, perché non contraddicono nulla che sia stato stabilito prima, e permettono di conseguire notevoli vantaggi nelle trattazioni teoriche.]

2- Se poi l'insieme contiene più di una trasformazione, si definisce la trasformazione che viene chiamata "prodotto di due"; essa si ottiene applicando la seconda trasformazione al risultato della prima. Perché l'insieme considerato sia un gruppo, si richiede che la trasformazione che è prodotto di due quali si vogliano trasformazioni dell'insieme appartenga ancora all'insieme. Si suole esprimere questo fatto dicendo che il prodotto di trasformazioni è una *legge di composizione interna* del gruppo. Quando si introduce un simbolismo, il prodotto qui definito viene indicato in vari modi convenzionali, che non riportiamo qui, per evitare di sovraccaricare il discorso.

3- Se all'insieme appartiene una data trasformazione, ad esso deve appartenere anche la trasformazione che, applicata al risultato della prima, produce l'identità. Questa trasformazione viene chiamata abitualmente "*inversa*" della prima.

4- Il prodotto di trasformazioni deve avere la proprietà associativa; questa si esprime con i simboli in modo analogo a quello valido per le proprietà dello stesso nome che valgono per le operazioni sui numeri.

Si noti che l'esistenza di una trasformazione identica richiede l'accettazione di una convenzione analoga a quella che porta all'accettazione dello zero come un numero e che porta anche all'accettazione dell'insieme vuoto quando si lavora con l'algebra di Boole. Questa introduzione, puramente convenzionale, di una "trasformazione che non trasforma nulla" può suscitare perplessità e può presentare qualche difficoltà a certe menti, che mal sopportano le astrazioni e le convenzioni, le quali hanno la loro giustificazione nella comodità dei calcoli e nella eleganza del formalismo.

Osserviamo inoltre che non è detto che il "prodotto" di due operazioni di un gruppo abbia la proprietà commutativa. Tuttavia esistono dei gruppi particolari, nei quali il prodotto di due trasformazioni quali si vogliano ha la proprietà commutativa; tali gruppi vengono chiamati *commutativi* o anche *abeliani* (dal nome del grande matematico Niels Henrik Abel [1802-1829] che li studiò in modo particolare).

6 - Il concetto di *gruppo* può essere utilizzato per rendere esplicita e formale un'osservazione che fonda gli sviluppi della geometria: si tratta della presunzione che le manipolazioni da noi eseguite sugli oggetti non cambiano certe proprietà, che ci interessano, degli oggetti su cui operiamo. In altre parole, la geometria ricerca e studia le proprietà che rimangono inalterate quando noi operiamo sugli oggetti delle operazioni del gruppo che stiamo considerando. Tali proprietà vengono designate col termine di *invarianti* degli oggetti (in matematica si suol dare al termine il genere maschile, e quindi si suol dire che si studiano "gli invarianti" delle figure geometriche; tuttavia si può pensare anche al termine come ad un aggettivo sostantivizzato, al quale competerebbe quindi il genere femminile, come al termine "proprietà").

Così, per tornare all'esempio con il quale abbiamo iniziato il paragrafo precedente, si può verificare che le operazioni di trasporto rigido costituiscono un gruppo, a norma delle proprietà esposte; beninteso quando si accetti di considerare anche come una "trasformazione particolare" l'operazione che consiste nel non operare. Allora pare chiaro che esista una certa proprietà comune a tutti i segmenti che si possono portare l'uno sull'altro con un trasporto rigido: tale proprietà potrebbe per esempio essere chiamata "lunghezza" di un segmento; accettiamo come intuitivo che essa sia comune a tutti i segmenti considerati, e quindi che non cambi per qualunque operazione del gruppo dei trasporti rigidi.

7 - Dopo il segmento, un'altra figura che viene abitualmente considerata dalla geometria elementare è quella chiamata "angolo". Anche qui si tratta di un termine appartenente al linguaggio comune, e che in questo linguaggio può assumere vari significati. Consultando ancora una volta un dizionario della nostra lingua (l'opera del Palazzi citata sopra, al paragrafo 4), alla voce "angolo" si legge, tra l'altro:

"inclinazione di due rette poste nello stesso piano che si incontrano in un punto; spazio compreso tra queste due rette...".

La prima parte di questa frase riproduce una frase di Euclide, il quale presenta l'angolo come "mutua inclinazione di due rette tra loro". La seconda parte descrive una parte di piano (ovviamente infinita), che è limitata da due rette che si incontrano e che oggi viene frequentemente indicata con la frase "*regione angolare*". I due concetti non coincidono, e ovviamente le frasi riportate non esauriscono tutti i possibili significati del termine "angolo". Si potrebbe infatti chiamare angolo la coppia di semirette che hanno un'origine comune; questa viene chiamata "vertice" dell'angolo, e le semirette vengono chiamate "lati" dell'angolo; è questo l'atteggiamento assunto da David Hilbert [1862-1943], nella sua opera intitolata *Fondamenti di geometria* [Titolo originale dell'opera: *Grundlagen der Geometrie*], e che assumeremo anche noi, salvo esplicito avviso contrario, da darsi di volta in volta.

Osserviamo tuttavia che è facile costruire un modello materiale del segmento (stecco, asticciola di legno, chiodo ecc.), perché nel suo stesso concetto entra il fatto che tutti i suoi punti si trovano a distanza finita. Invece, quando si voglia manipolare un modello materiale di angolo, nel senso da noi dato a questo termine, occorre sempre riferirsi a un oggetto finito: in altre parole, non si può costruire un modello materiale di angolo, perché l'angolo è una figura infinita, costituita da due semirette; quindi occorre sempre riferirsi, come modello, ad un oggetto finito, per esempio ad un compasso, il cui perno rappresenta il vertice dell'angolo e le cui gambe rappresentano una parte delle semirette che sono i lati dell'angolo; ciò può costituire un inciampo per qualche soggetto, che incontra difficoltà più o meno gravi nell'immaginarsi le figure geometriche.

Inoltre l'angolo presenta, rispetto al segmento, delle difficoltà che, anche in questo caso, hanno la loro origine in certe convenzioni che ne estendono il concetto, ma che costituiscono talvolta degli inciampi per certi alunni che già apprendono con una certa fatica gli altri concetti. Tra le difficoltà cui accennavamo sopra ci sono la distinzione tra angolo convesso ed angolo concavo, e l'esistenza dell'angolo piatto e dell'angolo giro.

Anche per l'angolo si può immaginare un trasporto rigido, quindi si può costruire una relazione di uguaglianza (o congruenza) che ha proprietà analoghe a quella dell'uguaglianza tra segmenti, proprietà che non ripetiamo qui, rimandando al paragrafo 5, ed al Cap. II, dove abbiamo trattato della relazione di uguaglianza tra numeri.

8 - Si possono prendere in considerazione operazioni sulle figure geometriche elementari, che hanno il loro riscontro in operazioni concrete su oggetti materiali, e che la geometria studia nelle loro proprietà. Tra le più semplici è da ricordare la somma di segmenti e la somma di angoli. Nel caso dei segmenti l'operazione ha un immediato riferimento all'operazione concreta che consiste nel porre due segmenti (che vengono chiamati, anche in questo caso, *addendi*) sulla stessa retta, in modo che abbiano un estremo in comune e che i segmenti stiano da parti opposte rispetto a questo estremo.

Per queste operazioni si impiega, come si è visto, un nome (somma) che è già stato impiegato per un'operazione su numeri naturali. Inoltre per indicare l'operazione geometrica si suole utilizzare anche un simbolismo che è analogo a quello utilizzato per i numeri: precisamente, indicando con a e b due segmenti, il segmento somma dei due viene spesso indicato con il simbolo:

$$a + b. \tag{1}$$

È ovvio che in questo caso il segno " $+$ " non ha il significato che possiede nel caso della somma tra numeri, ma indica un'operazione ben precisa, eseguita sui segmenti, che abbiamo descritto poco fa. Questo comportamento potrebbe causare degli equivoci e quindi delle incertezze; ma la sua giustificazione sta nel fatto che per i segmenti l'operazione possiede le stesse proprietà formali (commutativa ed associativa) che sono possedute dalla omonima operazione che si esegue sui numeri.

Nel caso di due angoli, l'operazione di somma viene materialmente eseguita portando a coincidere i vertici, e sovrapponendo un lato di un angolo a quello di un altro, in modo che gli altri lati siano da parti opposte rispetto alla retta sulla quale giacciono i lati che sono stati fatti sovrapporre. L'operazione potrebbe tuttavia condurre a costruire un angolo piatto, e quindi potrebbe condurre a certe perplessità, secondo quanto abbiamo osservato sopra, nel N.7.

9 - Sappiamo che, a partire dalle figure elementari, si possono definire e costruire certe figure piane, di cui la geometria studia le proprietà. La manualistica corrente presenta i vari contenuti, che, a livello elementare, potrebbero essere riassunti, come segue: relazione di parallelismo tra rette complanari e di perpendicolarità; figure piane a contorno poligonale, e relativa nomenclatura; figure rotonde (circonferenza e cerchio), e relativa nomenclatura .

In generale, insieme con queste relazioni e figure elementari, nella didattica dell'ordine primario si suole presentare anche il concetto di *area* di una figura piana, e si suole dare anche un insieme di procedure e di formule per la determinazione delle misure delle aree delle principali figure piane. Quest'abitudine didattica può anche essere utile per raccordare le nozioni astratte con i problemi della pratica. Ciò può servire per quella costruzione della razionalità globale di cui ho detto tante volte; penso tuttavia che occorra evitare che la presentazione di queste procedure si riduca a un'operazione di addestramento, e quindi di applicazione di comportamenti non completamente motivati.

Il calcolo delle aree di certe figure piane è il caso particolare di un'operazione di misura delle grandezze; questa operazione viene eseguita quotidianamente anche per le necessità della vita civile, e può essere provvisoriamente considerata come nota. Ritorneremo su di essa nel prossimo capitolo, espressamente dedicato al concetto di grandezza e all'operazione di misura.

Qui mi limito a osservare che l'operazione di misura è un caso particolare di codificazione della realtà, cioè dell'operazione che consiste nel rappresentare la realtà mediante strumenti del linguaggio matematico; il che permette di rappresentare la realtà con precisione molto maggiore di quella permessa dal linguaggio comune, e di conoscere le proprietà della realtà mediante la deduzione, eseguita con il calcolo.

È interessante osservare che l'operazione di misura e la rappresentazione della realtà mediante strumenti del linguaggio matematico richiedono che si stabiliscano certe opportune convenzioni; queste debbono ovviamente essere conosciute anche quando si voglia decodificare la rappresentazione convenzionale, cioè si voglia determinare il significato della rappresentazione che viene data col linguaggio matematico.

In questa sede è opportuno e utile osservare che l'operazione di misura è solo il primo passo nell'impiego degli strumenti convenzionali per rappresentare gli enti della geometria. Un ulteriore passo può essere compiuto con l'impiego delle convenzioni che hanno la loro origine nelle idee del grande matematico e filosofo René Descartes [1596-1650; il nome viene abitualmente italianizzato in "Cartesio"]. A questo matematico viene attribuito l'insieme di convenzioni che conducono alla costruzione di quelle che vengono abitualmente chiamate *coordinate cartesiane*. L'utilizzazione di queste convenzioni è ormai diffusissima, nella matematica, nella tecnica e nella stampa divulgativa e periodica. Gli elementi di queste convenzioni sono ben noti; quindi noi ci limiteremo qui a riflettere sul significato e sulle conseguenze dell'impiego di questi strumenti concettuali.

Ricordiamo che si suole costruire un sistema di coordinate cartesiane nel modo seguente: si fissano in un piano due rette, non parallele; tali rette vengono chiamate *assi coordinati cartesiani* e di solito si scelgono perpendicolari tra loro; questa circostanza non è necessaria per la validità e la utilità della procedura, anche se spesso tale scelta rende più spediti e comodi i ragionamenti ed i calcoli. Sulle rette si fissano di solito dei versi positivi, in modo che le misure dei segmenti che verranno date nel seguito saranno dei numeri dotati di segno.

Quando si siano fissate le rette, si suol dire che si è scelto un *sistema di riferimento cartesiano ortogonale*, e il punto O d'intersezione delle due rette viene chiamato *origine del riferimento*.

Quando sia comodo immaginare l'esistenza di un osservatore o di un lettore, di solito i due assi cartesiani vengono situati in modo che l'osservatore vede uno dei due assi come orizzontale (rispetto a se stesso), e l'altro ovviamente verticale; quello orizzontale viene chiamato *asse delle ascisse* ed orientato positivamente da sinistra a destra; quello verticale viene chiamato *asse delle ordinate* ed orientato positivamente dal basso all'alto.

Anche queste scelte non sono per nulla obbligatorie, e vengono fatte in seguito ad un'abitudine radicata, che spesso viene confusa con la necessità logica.

Si consideri ora un punto P del piano, si mandino da P le perpendicolari ai due assi e siano X ed Y i piedi di tali perpendicolari, rispettivamente sui due assi delle ascisse e delle ordinate. Con questa procedura, il punto P determina quindi due punti su due rette; e viceversa, dati i due punti X ed Y il punto P risulta determinato univocamente, come intersezione di due rette: la perpendicolare all'asse delle ascisse, passante per X, e la perpendicolare all'asse delle ordinate, passante per Y.

Quando si stabiliscano delle unità di misura su ciascuno dei due assi, i segmenti OX ed OY possono essere determinati mediante due numeri, x ed y che sono le loro misure nelle unità di misura scelte; e quindi i due numeri determinano, insieme con le posizioni dei punti X ed Y sui due assi, anche la posizione del punto P nel piano. I due numeri x ed y vengono chiamati, come è noto, le coordinate del punto P nel piano, rispettivamente l'*ascissa* e l'*ordinata*.

Osserviamo qui che non è affatto necessario che le due unità di misura dei segmenti, sui due assi coordinati, siano tra loro uguali. Anzi molto spesso, quando le convenzioni qui esposte sono utilizzate per rappresentare graficamente certi fenomeni della realtà, esse sono scelte disuguali. La cosa veramente importante è data dal fatto che con queste procedure si ottiene di rappresentare i punti con numeri; cioè si rappresentano degli enti della geometria con enti di un'altra branca della matematica; viceversa, questi ultimi possono avere una rappresentazione geometrica, che fa appello all'immaginazione ed al complesso di sensazioni legate alla visione ed ai campi sensoriali che danno origine alla geometria. Come conseguenza di questi fatti si ha che gli enti e le figure della geometria (punti, rette ecc.) sono rappresentati con strumenti numerici; e quindi i problemi relativi a questi enti geometrici vengono tradotti in problemi relativi ai numeri che li rappresentano, e vengono risolti con gli strumenti che servono per risolvere i problemi relativi ai numeri.

Questo insieme di convenzioni ha provocato un progresso importantissimo nella matematica; infatti gli strumenti dell'algebra sono stati, per così dire, messi al servizio della geometria; inoltre il procedimento di soluzione dei problemi, che la geometria classica aveva chiamato procedimento di "analisi" (del quale diremo in un prossimo capitolo) viene tradotto in calcoli riguardanti i numeri, che traducono gli enti della geometria e le loro relazioni. Si intravvede qui la ragione per la quale questo insieme di metodi è chiamato abitualmente *geometria analitica*; non si tratta quindi di un insieme di proposizioni che enunciano o dimostrino nuove proprietà degli enti della vecchia geometria, bensì di un insieme di metodi per rappresentare gli enti della geometria con numeri e quindi di applicare alla geometria gli strumenti validi in altri campi della matematica.

Naturalmente l'applicazione di questi metodi richiede, da parte di un soggetto, un ulteriore lavoro di codificazione e di decodificazione: la codificazione deve essere messa in opera quando si rappresentano con le coordinate gli enti della geometria, e si traducono le loro relazioni in relazioni numeriche; la decodificazione viene messa in opera quando si tratta di interpretare i numeri che si ottengono dalle procedure dell'algebra, e di riconoscere il loro significato geometrico.

Queste procedure, che qui vediamo applicate alla geometria, sono del resto comuni a tutte le scienze che utilizzano il linguaggio matematico: la meccanica razionale, la fisica, e moltissimi rami della tecnologia. Del resto la procedura che porta a rappresentare enti geometrici con numeri non è tipica delle convenzioni che abbiamo presentato qui: già l'astronomia greca eseguiva dei calcoli sulla posizione degli astri, e la geografia utilizza abitualmente le coordinate geografiche (longitudine e latitudine) per identificare i punti sulla superficie terrestre.

10 - Quando sia stato fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane, si dice che è stato costruito un *piano cartesiano*. Questo pertanto non è un oggetto in sé nuovo, ma è semplicemente una rappresentazione convenzionale di un oggetto già noto. Con questa rappresentazione, come abbiamo già detto, invece di un punto si ha una coppia (x, y) di numeri, che sono le coordinate del punto; si suol dire che la coppia (x, y) di numeri è detta *ordinata*, per significare che in essa si può distinguere un primo e un secondo numero.

Il fatto che, nel piano cartesiano, ogni punto del piano è rappresentato da una coppia ordinata di numeri, ognuno dei quali ha un significato, giustifica il nome che si dà all'insieme costituito dalle coppie degli elementi di due insiemi dati; abbiamo già incontrato un ente di questo tipo nel paragrafo 15 del Cap. II, in occasione di una certa interpretazione della moltiplicazione di due numeri naturali. Lo incontreremo nel Cap. V, a un altro livello di generalità; qui ci basta osservare che il nome dato a questo ente trae la sua origine e la sua motivazione dai metodi della geometria analitica.

11 - Nei paragrafi precedenti abbiamo parlato a lungo dei movimenti rigidi e delle procedure materiali che danno origine alla geometria nel senso abituale di questo termine. Ciò che è stato detto può essere visto da un punto di vista più generale, che conduce a una visione più ampia della geometria e del nostro comportamento nei riguardi degli oggetti che osserviamo e che manipoliamo. A questo scopo, faremo riferimento al concetto di "gruppo di trasformazioni" che abbiamo illustrato nel paragrafo 5, ed al concetto di "invariante per un gruppo di trasformazioni", di cui abbiamo parlato al paragrafo 6.

Si osserva infatti che le operazioni di cui abbiamo parlato, cioè i trasporti rigidi, non sono le sole che si possono immaginare: infatti la geometria del secolo XIX ha visto spuntare dei nuovi rami, sul tronco della geometria tradizionale, vecchio di secoli, proprio in seguito all'introduzione di nuovi gruppi di trasformazioni.

Il primo episodio che ha provocato l'ampliamento dell'orizzonte della geometria classica è stato dato dalla costruzione della *geometria proiettiva*; in questa si immagina di poter trasformare una figura non soltanto con movimenti rigidi, ma anche con proiezioni. Nasce così una dottrina la quale studia certi invarianti delle figure che non erano espressamente presi in considerazione dalla geometria euclidea classica. Le procedure che studiano queste proprietà relativamente nuove hanno la loro origine negli studi dei pittori del Rinascimento italiano, (tra i quali è generalmente ricordato Paolo Uccello [Paolo di Dono, detto Paolo Uccello. 1397-1475]) che avevano studiato le leggi della prospettiva. E infatti è facile osservare che la corrispondenza tra una figura oggettiva (per esempio un paesaggio visto dall'interno di una camera e inquadrato da una finestra) e l'immagine che se ne dà in un quadro dipinto è una proiezione. In modo analogo le curve che si ottengono secando con un piano la superficie di un cono rotondo si possono anche considerare come le proiezioni di una circonferenza dal vertice del cono; e come tali possono essere studiate dalla geometria proiettiva.

Altri problemi dello stesso tipo s'incontrano quando si vogliano rappresentare in modo grafico (cioè con disegni) le proprietà delle figure dello spazio; una branca della geometria, che viene chiamata *geometria descrittiva*, studia appunto le procedure ed i metodi per queste rappresentazioni; queste teorie hanno molte applicazioni, anche pratiche, e tra queste ricordo la costruzione di carte topografiche e di altre rappresentazioni della realtà.

12 - Il campo dei gruppi di trasformazioni delle figure può essere ulteriormente ampliato; si giunge così alla costruzione di una branca della geometria che oggi viene abitualmente chiamata *topologia*.

Questo vocabolo oggi viene utilizzato in certe opere di pedagogia e di didattica per indicare l'insieme dei concetti che mirano a descrivere la posizione di un soggetto rispetto all'ambiente che lo circonda: tali sono per esempio le indicazioni di "alto" e "basso", "destra" e "sinistra" ecc. Lo stesso termine "topologia" era tuttavia già stato impiegato in geometria per designare una branca di questa scienza, che può essere qualificata in base ad un certo gruppo di trasformazioni delle figure; e in questo senso noi utilizzeremo qui il vocabolo.

Per dare un esempio delle proprietà delle figure che sono oggetto di studio da parte della topologia, consideriamo un poliedro, e supponiamo che sia convesso. Ciò significa che, considerato il piano contenente una faccia qualunque, tutto il resto del poliedro sta da una stessa parte rispetto a quel piano; quindi, per esempio, si può immaginare il poliedro posato su un piano orizzontale (rispetto ad un osservatore), in modo che esso rimanga tutto al disopra del piano stesso. Indichiamo con F il numero delle facce, con S il numero degli spigoli, con V il numero dei vertici del poliedro in parola. Qualunque sia il poliedro, tra questi numeri vale la relazione fondamentale:

(2) $$F + V = S + 2.$$

La proprietà espressa da questa relazione è stata dimostrata dal grande matematico svizzero Leonhard Euler [1707-1783; il nome viene abitualmente italianizzato in "Eulero"] e viene di solito citata come "teorema di Eulero".

È facile immaginare che, qualora si trasformi di poco il poliedro, anche con una trasformazione che non sia un movimento rigido, la proprietà espressa dalla (2) rimane valida, pur di definire in modo opportuno le "facce", gli "spigoli" ed i "vertici" della nuova figura che si ottiene.

Si consideri per esempio il pallone che si usa per il gioco del calcio; esso è costituito da 20 pezzi di forma approssimativamente esagonale (di solito di colore bianco) e da 12 pezzi di forma approssimativamente pentagonale (di colore nero). Il pallone può essere immaginato come ottenuto dalla deformazione di un poliedro a facce piane, per esempio immaginandolo costituito di gomma e gonfiandolo fino a fargli ottenere la forma sferica; il poliedro considerato ha 32 facce, 90 spigoli e 60 vertici; è facile immaginare che le facce piane del poliedro originario, dopo la gonfiatura, diventano i pezzi che costituiscono il pallone, gli spigoli del poliedro originario, dopo l'operazione di gonfiamento, diventano le linee di saldatura tra due facce contigue, i vertici del poliedro originario diventano i punti di confluenza di due diverse linee di saldatura. Possiamo convenire di chiamarli ancora con i nomi originari di facce, spigoli e vertici della figura ottenuta; ed è chiaro che con la deformazione eseguita i loro numeri non sono cambiati, e quindi vale ancora la (2).

Questo esempio può servire per comprendere il significato della topologia, che viene spesso definita come lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti per trasformazioni biunivoche e continue; un esempio di una trasformazione cosiffatta può essere dato dall'operazione di gonfiatura che abbiamo immaginato per il poliedro considerato poco sopra.

I concetti esposti trovano applicazione anche in moltissime altre occasioni: un esempio tipico è fornito dallo studio degli annodamenti reciproci di due linee nello spazio tridimensionale, e in generale da quelle figure che vengono abitualmente chiamate "nodi". È stato osservato che in queste questioni, e in altre moltissime analoghe, le proprietà che si debbono mettere in luce e studiare non riguardano le misure di lunghezze, aree, volumi ed angoli, come nella geometria classicamente intesa; ma le proprietà che interessano in questi casi non variano quando le figure considerate siano sottoposte a cambiamenti eseguiti con continuità. Esse rientrano quindi nell'ambito della geometria, intesa come studio delle proprietà invarianti rispetto a certi gruppi di trasformazioni; ma i gruppi relativi sono molto più generali dei gruppi considerati dalla geometria classica.

IV - GRANDEZZE E MISURE.

L'operazione di misura, come codificazione di una certa realtà materiale (immaginata come continua) con il linguaggio matematico. Il numero razionale e le sue rappresentazioni (rappresentazione decimale, rappresentazione con frazioni). La lettura della realtà materiale con gli strumenti matematici; sue proprietà e suoi limiti.

1 - Nel Cap. II abbiamo visto che il numero naturale permette di rappresentare gli insiemi finiti di oggetti, e che certe operazioni, che noi eseguiamo sugli insiemi, vengono rappresentate da operazioni che si eseguono sui numeri corrispondenti.

Tuttavia gli insiemi finiti di oggetti distinti non sono i soli argomenti ai quali si può applicare il ragionamento e il simbolismo matematico; infatti nella vita quotidiana noi dobbiamo conoscere e manipolare tanti oggetti che non sono rappresentabili completamente come insiemi finiti. Questi oggetti vengono abitualmente classificati sotto la categoria generica di *grandezze*; abitualmente facciamo rientrare in questa categoria per esempio le lunghezze dei segmenti, le aree delle figure piane, i volumi delle figure solide, i pesi dei corpi, le capacità dei recipienti, i prezzi delle merci, le somme di denaro, le velocità dei corpi che si muovono, le intensità delle forze, il lavoro di queste ecc. ecc.

Una riflessione su questi enti ci porterà a meditare sulle operazioni che noi eseguiamo su questi enti, e sui simboli matematici che sono stati costruiti per conoscere, rappresentare e dominare queste realtà che noi incontriamo quotidianamente.

2 - Nel seguito useremo la espressione *classe di grandezze omogenee*; intendiamo indicare così un insieme di enti tra i quali si può istituire una relazione di "*uguaglianza* (di cui diremo subito) e sui quali si possono eseguire certe operazioni (di somma e di moltiplicazione per certi numeri, opportunamente definiti).

Così gli elementi di ognuna delle classi che abbiamo nominato nel precedente paragrafo (lunghezze di segmenti, aree di figure piane ecc.) costituiscono delle classi di grandezze tra loro omogenee.

Tra le grandezze che appartengono a una medesima classe di grandezze omogenee si può istituire una relazione che si suole chiamare "uguaglianza", e che permette di costruire delle classi di equivalenza; in questo ordine di idee la teoria che stiamo svolgendo mostra molte analogie con quella delle trasformazioni che abbiamo visto nel Cap. precedente.

Le procedure concrete con le quali viene verificata materialmente l’esistenza della relazione di uguaglianza tra due grandezze che appartengono alla medesima classe di grandezze omogenee possono essere molto diverse da classe a classe. Così, per esempio, se si tratta di segmenti, essi sono giudicati uguali (o congruenti) se possono essere portati l’uno sull’altro con un movimento rigido. Pertanto si suol dire in questo caso che i due segmenti "hanno la stessa lunghezza". Se si tratta di figure piane a contorno poligonale, esse sono giudicate "di uguale area" se sono decomponibili ciascuna in un numero finito di parti poligonali, in modo tale che ogni parte di una figura sia sovrapponibile con un movimento rigido a una parte dell’altra.

Oppure, se si tratta di pesi, il sussistere della relazione di uguaglianza viene verificato con l’impiego di un certo strumento che viene chiamato abitualmente "bilancia". In generale si potrebbe dire che, per ogni classe di grandezze omogenee, esiste una tecnica ben determinata, con la quale si verifica il sussistere di quella relazione di uguaglianza che è tipica della classe stessa. Questa relazione permette di costituire, nell’interno della classe di grandezze considerata, delle classi di equivalenza, rispetto alla relazione. La relazione conduce pertanto alla costruzione un concetto astratto, che corrisponde alla classe di equivalenza, e che è lo stesso per ogni elemento della classe stessa. Così per esempio abbiamo visto che, quando due segmenti sono sovrapponibili l’uno all’altro con un movimento rigido, si dice che essi "hanno la stessa lunghezza"; quindi, per esempio, tra i segmenti, e rispetto alla relazione che nasce con il trasporto rigido, la lunghezza è la stessa per tutti gli elementi della classe di equivalenza; e un segmento qualsiasi della classe di equivalenza rappresenta tutti gli altri, ai fini della determinazione della lunghezza. Analogamente, quando due corpi, messi sui due piatti di una bilancia, la tengono in equilibrio, si suol dire che essi "hanno lo stesso peso".

Possiamo convenire di indicare le grandezze appartenenti a una determinata classe di grandezze omogenee con lettere maiuscole dell'alfabeto latino, come $A, B, C, \ldots X, Y, Z, \ldots$.

Con questi simboli, il sussistere della relazione di equivalenza tra due grandezze omogenee A e B viene indicato con la formula convenzionale:

(1) $$A = B.$$

Si osserva che il simbolo "=" è già stato utilizzato prima d'ora, per esempio per indicare la relazione di uguaglianza tra numeri naturali. Il fatto che venga utilizzato anche per indicare una certa relazione tra grandezze omogenee è giustificato dall'osservazione che la relazione tra grandezze omogenee, indicata con la (1), ha le stesse proprietà formali (riflessiva, simmetrica e transitiva) che valgono per la relazione di uguaglianza tra numeri naturali.

3 - Data una classe di grandezze omogenee, è possibile definire nella classe una operazione di composizione interna, che associa ad ogni coppia di grandezze della classe una terza grandezza ben determinata, che viene chiamata la loro "*somma*". Anche in questo caso, come abbiamo già rilevato nel Cap. precedente, si utilizzano dei simboli analoghi a quelli introdotti nel caso dei numeri naturali. Con questi simboli, si suol scrivere:

(2) $$A + B = C$$

per indicare che la grandezza C è stata ottenuta come somma delle due grandezze A e B.

L'impiego del termine "somma" per indicare l'operazione di composizione di due grandezze omogenee è giustificato dall'osservazione che per l'operazione stessa valgono le proprietà formali (commutativa ed associativa) che sono valide per i numeri naturali.

Vale inoltre la proprietà espressa dalla proposizione seguente:

(2)bis se è $A = A'$ ed anche $B = B'$, allora è $A + B = A' + B'$.

L'operazione di somma di due grandezze omogenee viene compiuta con procedure e con tecniche diverse a seconda della classe di grandezze che si considera; così, per esempio, nel caso di due segmenti l'operazione di somma delle loro lunghezze viene eseguita costruendo il segmento somma dei due, nel modo che è stato descritto nel paragrafo 8 del Capitolo precedente. Questo segmento somma ha una lunghezza che viene considerata la somma delle lunghezze dei due segmenti sui quali abbiamo operato.

Il caso delle figure piane a contorno poligonale dà luogo a operazioni più complesse: infatti la definizione della classe di grandezze omogenee, e la costruzione del concetto di area di una figura cosiffatta, viene data considerando la possibilità di dividere una figura in parti; ed in relazione a questa operazione la somma di due figure viene realizzata costruendo una terza figura con l'*accostamento* delle due, in modo che abbiano un tratto di contorno in comune, ed in modo che le due figure stiano da parti opposte rispetto alla retta a cui il tratto comune appartiene. È chiaro che questa operazione non è univocamente determinata, e può quindi condurre a figure di forme diverse tra loro; tuttavia esse hanno tutte la stessa area, secondo la definizione che abbiamo dato sopra di questo concetto.

Analoghe considerazioni si possono svolgere a proposito della somma dei volumi di due solidi; infine, in relazione a grandezze che si manovrano nella vita quotidiana (pesi, capacità di recipienti, somme di denaro ecc.), l'operazione di somma viene definita di volta in volta con procedure che sono ben note e che non ripetiamo qui.

4 - Come abbiamo detto poco fa, per l'operazione di somma di grandezze valgono le proprietà formali che abbiamo illustrato nel caso della somma di due numeri; proprietà a cui vengono attribuiti gli stessi nomi (commutativa ed associativa) che abbiamo adoperato nel caso della somma di numeri. Anche le formule, che esprimono con simboli convenzionali queste proprietà, sono del tutto analoghe a quelle che esprimono le proprietà formali dell'operazione di somma tra numeri. Nel caso delle grandezze si definisce un'ulteriore operazione che ha una grande importanza, come vedremo; precisamente, indicando con n un numero naturale, e considerata una grandezza A

appartenente ad una determinata classe, si definisce "multiplo di A secondo il numero n" la grandezza che si ottiene come somma di n grandezze tutte uguali ad A.

Tale grandezza viene indicata simbolicamente nA, leggendo "n volte A", oppure anche semplicemente "n per A".

Definiremo quindi:

(4) $$n\,A \;=\; A \,+\, A + \ldots\ldots + A \quad n \text{ volte.}$$

Con questa definizione veniamo a dare al numero naturale n un significato nuovo, che tuttavia non contrasta con il vecchio significato, ma lo amplia: precisamente veniamo a presentare il numero naturale come un "operatore tra grandezze"; infatti la (4) potrebbe essere letta come indicazione di una certa operazione la quale, eseguita sulla grandezza A, conduce al suo multiplo $n \times A$.

Quest'operazione è talmente elementare e comune che nelle lingue più diffuse esistono dei vocaboli appositi per indicare i multipli secondo i numeri naturali più piccoli: così in italiano si parla di "doppio", "triplo", "quadruplo", ..."decuplo" di una certa grandezza per indicare i suoi multipli secondo gli interi 2, 3, 4, …. 10, rispettivamente.

Per estensione del concetto, si conviene anche di porre:

(5) $$1\,A \;=\; A.$$

Ed anche si conviene di considerare il simbolo $A\,n$ come equivalente al simbolo spiegato in (4). L'operazione che conduce da una grandezza A al suo multiplo secondo un numero naturale n viene anche indicata frequentemente come "moltiplicazione di una grandezza per un numero"; si tratta anche in questo caso di una estensione del concetto di moltiplicazione e della relativa nomenclatura. Per questa operazione valgono certe proprietà importanti, espresse dalle formule seguenti: indicati con n, m dei numeri naturali, ed indicate con A e B due grandezze quali si vogliano di una determinata classe di grandezze omogenee, si ha:

(6) $$n\,(A\,+B) \;=\; n\,A \,+\, nB$$

(7) $$(n\,+m)\,A \;=\; n\,A \,+\, m\,A.$$

Le proprietà espresse da queste formule vengono chiamate *proprietà distributive* dell'operazione di prodotto di un numero naturale rispetto alla somma (di numeri e di grandezze). In particolare si noti che nella (7) il simbolo di somma " $+$ " ha due diversi significati: infatti nel membro a sinistra del segno " $=$ " esso ha significato di somma di due numeri; nel membro a destra ha significato di somma di due grandezze. Ricordiamo infine che il multiplo, secondo un numero naturale m, di un multiplo di una grandezza A secondo un numero naturale n, risulta essere il multiplo di A secondo il numero naturale $m \times n$; in formule si ha:

(7)bis $$m\,(n\,A) \;=\; (m \times n)\,A.$$

5 - Con un'operazione di estensione del concetto di grandezza, si suole anche definire, per ogni classe di grandezze, una "grandezza nulla"; la indicheremo convenzionalmente con il simbolo O, ed ad essa attribuiremo le seguenti proprietà formali:

(8) $$A\,+O \;=\; O + A \;=\; A;$$
$$n\,O \;=\; O.$$

Correlativamente, in relazione al numero zero accetteremo che valga la seguente proprietà:

(9) $$0\,A \;=\; O.$$

A proposito dell'introduzione della grandezza nulla e della (9) si possono svolgere delle considerazioni analoghe a quelle che abbiamo presentato nel Cap. II a proposito del numero zero. Non le ripeteremo qui, ricordando soltanto che questa costruzione di enti in certo modo artificiali non è necessaria, in linea di massima; tuttavia essa non è contraddittoria con ciò che è stato detto prima, e non è cervellotica e inutile; anzi permette di fare una notevole economia di pensiero negli sviluppi formali dei calcoli; sviluppi che, come abbiamo detto ripetutamente (in particolare nel Cap.I), rivestono una grande importanza nella matematica, e ne costituiscono uno degli aspetti più caratteristici.

In relazione alla grandezza nulla si possono ammettere certe proprietà che sono suggerite dalla manipolazione abituale che noi facciamo delle grandezze nella vita quotidiana; precisamente si ammette che la somma di due grandezze possa dare la grandezza nulla solo se entrambe sono nulle; quindi si ammette la validità della seguente proposizione:

(10) se $A + B = O$, allora è $A = B = O$.

6 - L'operazione di somma, e le proprietà finora presentate, permettono di definire una relazione tra grandezze di una medesima classe, che stabilisce nella classe stessa un ordinamento; precisamente, date due grandezze omogenee A e B, scriveremo:

(11) $A \leq B$

leggendo "A è minore o uguale a B", se esiste nella classe una grandezza X tale che si abbia:

(12) $B = A + X$.

Se poi è anche:

(13) $X \neq O$

scriveremo:

(14) $A < B$,

leggendo "A è strettamente minore di B", o anche semplicemente: "A è minore di B".

Le relazioni (12) e (14) saranno considerate equivalenti alle seguenti:

(11)' $B \geq A$, $B > A$

che saranno lette rispettivamente: "B è maggiore o uguale ad A", e "B è strettamente maggiore di A". Per la relazione indicata con il simbolo "$\leq$ " ora introdotta valgono varie proprietà, tra le quali ricordiamo le seguenti:

(15) Se è $A \leq B$ ed anche $B \leq A$ allora è $A = B$ (*proprietà antisimmetrica*)

(16) Se è $A \leq B$ ed anche $B \leq C$, allora è anche $A \leq C$;
Se è $A < B$ ed anche $B \leq C$, allora è anche $A < C$
Se è $A \leq B$ ed anche $B < C$, allora è anche $A < C$
Se è $A < B$ ed anche $B < C$, allora è anche $A < C$.

Le proprietà espresse dalle (16) vengono chiamate "*proprietà transitive*" delle relazioni tra grandezze indicate con i simboli "$\leq$" e "$<$".

Si ha inoltre:

(17) Se è $A = A'$ ed anche $B \leq B'$, allora è $A + B \leq A' + B'$;
Se è $A = A'$ ed anche $B < B'$, allora è $A + B < A' + B'$.

Infine, date due grandezze omogenee A e B, sussiste tra loro una e una sola delle tre relazioni seguenti:

(18) $A = B$, oppure $A < B$, oppure $B < A$.

Si suole esprimere questa proprietà dicendo che due grandezze omogenee sono sempre *confrontabili* rispetto alle relazioni di uguaglianza oppure a quella espressa dal simbolo " $<$ "; la stessa cosa viene espressa in altro modo dicendo che la relazione indicata col simbolo " $\leq$ " induce nella classe di grandezze considerate un "*ordinamento totale*" (o anche "*completo*"), e quindi la classe stessa, con l'introduzione della relazione, risulta "*totalmente (o completamente) ordinata*". Infine si ha che, in conseguenza delle definizioni che abbiamo dato e delle convenzioni che abbiamo adottato, la grandezza nulla O risulta la prima nell'ordinamento totale stabilito; si ha cioè che, considerata una qualunque grandezza A, vale sempre la:

(19) $O \leq A$.

Abbiamo visto che le modalità concrete con le quali si verifica il sussistere della relazione di uguaglianza tra due grandezze omogenee dipendono dalla classe; e che si può pensare a varie procedure, ed all'impiego di vari strumenti; cose analoghe si possono ripetere per quanto riguarda il sussistere della relazione indicata con il simbolo "$<$". Nel comune modo di esprimersi, la verifica del fatto che tra due grandezze omogenee sussiste l'una o l'altra delle relazioni ricordate viene presentata dicendo che si esegue un'operazione chiamata *confronto*.

Osserviamo infine qui che le operazioni e le relazioni che abbiamo introdotto finora sono suggerite dalla pratica quotidiana della manipolazione della realtà materiale, a livello macroscopico. Pertanto mi sono limitato a enunciare le proprietà, confidando nella loro conferma che ci è data dall'esperienza; ricordo tuttavia che questo atteggiamento non è completamente rigoroso in teoria, e che si può dare una trattazione matematicamente rigorosa del concetto di grandezza, trattazione in cui certe proprietà sono assunte come punti di partenza ed altre sono rigorosamente dimostrate. Non ho scelto di svolgere l’argomento secondo queste linee perché in questa sede ci interessa piuttosto prendere coscienza delle procedure elementari della matematica, precisamente di quelle con cui questa scienza rappresenta simbolicamente una realtà esteriore a noi, e sulla quale intendiamo operare razionalmente.

6 - Abbiamo stabilito che, se esiste una grandezza X tale che si abbia:

(12) $$B = A + X,$$

converremo di scrivere :

(20) $$A \leq B.$$

Abitualmente si dice che la grandezza X, che compare nella (12), è la *differenza* tra la B e la A, e si suole scrivere:

(21) $$X = B - A,$$

leggendo "X è uguale a B meno A".

Nell’esperienza comune si suole dire che la X " è la differenza tra B ed A", o anche che X indica "quanto cresce" oppure "quanto di più" vi sia nella B al confronto con la A. Tuttavia si suole anche considerare la X come il risultato di un’operazione, che si realizza "togliendo" dalla grandezza B una grandezza uguale alla A; e correlativamente la X viene considerata come "ciò che si deve aggiungere" alla A per ottenere la B. Questi due modi di considerare la (21) sono spesso considerati come del tutto equivalenti; ma il secondo può presentare qualche difficoltà a chi non si muove molto facilmente nell’ambito matematico; e la soluzione dei problemi relativi può costituire una pietra di inciampo per qualche soggetto.

L’operazione di cui abbiamo detto poco sopra viene spesso anche presentata come *inversa* della somma; infatti, in forza della (21) e delle proprietà della somma, si può scrivere la (12) nella forma:

(22) $$B = A + (B - A).$$

7 - Oltre alle proprietà che abbiamo considerato finora, in base all’esperienza quotidiana si ammettono per il concetto di grandezza certe altre proprietà, le quali trovano il loro fondamento su una qualità, che noi ammettiamo per le grandezze, e che viene comunemente chiamata *continuità*. Anche questa qualità può essere enunciata in forma rigorosa in termini matematici; ma preferisco fare appello all’esperienza quotidiana, per ragioni che ho esposto alla fine del paragrafo precedente.

Si può dimostrare che una delle conseguenze delle proprietà di continuità delle grandezze è la possibilità di dividere una grandezza qualunque in un numero qualsivoglia di parti uguali. Così ammetteremo che sia valida la seguente proposizione:

Data una grandezza qualunque A, ed un numero naturale n, esiste una grandezza X, omogenea con la A, per la quale vale la relazione:

(23) $$n\,X = A.$$

La grandezza X che compare nella (23) viene chiamata "n-esima parte della A", o anche "un ennesimo" della A, o anche "*sottomultiplo di A secondo il numero* n", e viene indicata in vari modi, per esempio con:

(24) $$X = (1/n)\,A \text{ , oppure } \quad X = A/n.$$

È noto che nelle varie lingue esistono delle parole per indicare la grandezza X, nei casi in cui il numero naturale n abbia valori abbastanza piccoli; così, per $n = 2$, X viene chiamata "la metà", per $n = 3$ viene chiamata "un terzo" o anche "la terza parte", "un quarto", "un quinto", "un sesto" ecc. e così via; per $n = 10$ la grandezza X viene chiamata "un decimo" o anche "la decima parte" della A. Queste denominazioni fanno ovviamente riferimento a pratiche tradizionali ed a secolari strutture sociali. Per esempio è noto che all’espressione "la decima" è stato tradizionalmente dato il significato di "imposta". È facile immaginare, in una società contadina, il raccolto diviso in dieci parti uguali tra loro, messe in fila sull’aia, e il rappresentante del potere che ne prende una, per esempio l’ultima della fila, la decima appunto [è da osservarsi che il fisco di oggi prende molto di più].

Dalla considerazione della parte n-esima di una grandezza A, ricordando ciò che è stato detto sopra, nel paragrafo 4, si passa immediatamente alla considerazione di una grandezza Y, che è il multiplo, secondo un numero naturale m, del sottomultiplo della stessa A secondo n; tale grandezza viene indicata in vari modi, per esempio con

(25) $\qquad Y = m\,X = (m\,/\,n)\,A.$

Il simbolo "m/n" viene letto "m n-ennesimi" e viene chiamato di solito "*frazione*"; anche in questo caso nel linguaggio comune esistono parole ben note che esprimono questo simbolo: per esempio "tre quarti, oppure due terzi, sette decimi" ecc.

In corrispondenza a questi termini esiste anche una nomenclatura tradizionale, secondo la quale il numero m viene chiamato *numeratore* della frazione ed il numero n riceve il nome di *denominatore* della frazione. Entrambi i numeri, numeratore e denominatore, vengono poi chiamati genericamente *termini* della frazione. Questa viene anche tradizionalmente indicata con una linea orizzontale, sopra la quale si scrive il numeratore e sotto la quale si scrive il denominatore; la linea orizzontale viene anche chiamata "linea (o segno) di frazione".

Questo modo di rappresentare la frazione era molto impiegato nel passato, ma non ha nulla di obbligatorio: oggi va sempre più diffondendosi la rappresentazione del tipo "m/n" che offre vari vantaggi grafici. Ma neppure questa è obbligatoria, e quindi ripeto ancora una volta che non si deve considerare come un errore semplicemente il fatto dell’impiego di simboli diversi da quelli che per noi sono abituali. La cosa veramente importante è far conoscere chiaramente quali sono le nostre convenzioni, e soprattutto essere coerenti con le regole, una volta che siano state enunciate.

[AVVERTENZA. Nel simbolo convenzionale "m/n" che abbiamo scritto nella (25), m ed n indicano due numeri naturali; qui ed in tutto il seguito, fino ad esplicita avvertenza che sarà data a suo tempo, i due numeri naturali m ed n saranno supposti entrambi diversi da zero. In relazione alle frazioni viene anche usata una nomenclatura, non sempre utile, che distingue le frazioni stesse in tre specie: proprie, improprie ed apparenti. Secondo questa nomenclatura, vengono chiamate proprie le frazioni in cui il numeratore è minore del denominatore, improprie quelle in cui il numeratore è maggiore del denominatore; infine vengono chiamate "frazioni apparenti" quelle in cui il numeratore è multiplo del denominatore].

Dalla (25) si trae che la frazione m/n può essere vista come il simbolo di un operatore, il quale, applicato a una grandezza, ne produce un’altra. In quest’ordine di idee la frazione ci si presenta come una generalizzazione del concetto di numero naturale; infatti abbiamo visto sopra, nel paragrafo 4, che il numero naturale può essere visto come un operatore tra grandezze, cioè il simbolo di un’operazione che, applicata ad una grandezza, ne produce un’altra ben determinata. Come vedremo, le frazioni, viste come operatori tra grandezze, hanno molte proprietà che le accomunano ai numeri naturali: per queste ragioni saremo autorizzati a considerare le frazioni, con certe avvertenze, e con certe convenzioni, come dei *numeri*; nella pratica infatti si costruisce una nuova specie di numeri, che vengono chiamati *numeri razionali*, per ragioni che vedremo (paragrafo 13). Per costruire questi numeri di nuova specie facciamo qui un’osservazione, che trova la sua giustificazione nell’esperienza abituale, e che ci condurrà a una proprietà fondamentale delle frazioni.

Consideriamo un numero naturale qualunque k, diverso dallo zero; accettiamo dall’esperienza che, data una grandezza qualunque A, il prendere m n-esimi di A dia lo stesso risultato che prendere $k \times m$ parti di A, quando questa grandezza venga divisa in $k \times n$ parti uguali.

Ciò si esprime in formule scrivendo:

(26) $\qquad (m/n)\,A = [(k \times m)/(k \times n)]\,A.$

Si suole esprimere lo stesso fatto dicendo che le due frazioni m/n e $(k \times m)/(k \times n)$ sono *equivalenti*. Infatti le due frazioni, considerate come operatori su una medesima grandezza, producono come risultato sempre una stessa ben determinata grandezza. Queste cose vengono anche espresse in vari altri modi: per esempio si trova scritto spesso che "*moltiplicando o dividendo per un medesimo numero entrambi i termini di una frazione, questa non cambia*", oppure anche "si ottiene una frazione equivalente".

Sulla base di ciò che precede chiameremo "numero razionale" la classe di equivalenza delle (infinite) frazioni, che si ottengono l’una dall’altra moltiplicando o dividendo (quando ciò sia possibile) entrambi i termini di una frazione per un medesimo numero naturale .

Quindi una data frazione è un rappresentante (per così dire) di un numero razionale, il quale può essere rappresentato da un'altra qualunque delle infinite frazioni equivalenti alla prima: così per esempio le frazioni:

(27) $$2/3,\ 4/6,\ 6/9,\ 8/12,\ 10/15,\ 12/18,\ldots.$$

sono tutte equivalenti tra loro, e rappresentano un unico numero razionale.

Tutte le infinite frazioni equivalenti che rappresentano il medesimo numero razionale si possono ottenere da una sola tra esse: quella che ha il numeratore e il denominatore primi tra loro (quindi privi di divisori comuni). Tali termini sono quindi i più piccoli possibili tra i termini di una frazione che possa rappresentare il dato numero razionale; con espressione ben comprensibile e naturale, si suol dire che la frazione corrispondente è *ridotta ai minimi termini*. Così per esempio la frazione $58/87$, ridotta ai minimi termini dà $2/3$, perché entrambi i suoi termini sono divisibili per 29.

In particolare, se il numeratore è multiplo del denominatore, cioè la frazione è "apparente" (secondo una nomenclatura talvolta usata), la frazione, ridotta ai minimi termini, ha come denominatore l'unità: per esempio la frazione $87/29$, ridotta ai minimi termini dà $3/1$. In questi casi si suole identificare la frazione con denominatore 1 al suo numeratore; tale identificazione può essere accettata, per comodità di espressione e sulla base della osservazione che molte proprietà formali delle operazioni sui numeri razionali sono analoghe a quelle delle operazioni sui numeri naturali. In quest'ordine di idee si usa dire che i numeri naturali sono "casi particolari di frazioni"; anche questa espressione viene tollerata in forza delle ragioni che abbiamo esposto poco sopra.

8 - Abbiamo chiamato "numeri razionali" le classi di equivalenza delle frazioni, sulle quali conveniamo di operare con certe leggi; le operazioni sui numeri razionali vengono chiamate con gli stessi nomi che si danno alle operazioni sui numeri naturali. Indichiamo con m, n, h, k, p, q …. dei numeri naturali; consideriamo i due numeri razionali, rappresentati dalle frazioni m/n e p/q. Si definisce "prodotto" dei due razionali il numero rappresentato dalla frazione $(m \times p)/(n \times q)$; si pone quindi:

(28) $$(m/n) \times (p/q) = (m \times p)/(n \times q).$$

Quest'operazione ha le stesse proprietà del prodotto tra numeri naturali: commutativa e associativa. Inoltre si ha:

(29) $$(k/k) \times (m/n) = (k \times m) / (k \times n) = m/n;$$

quindi il numero razionale rappresentato dalla frazione k/k, nell'operazione di prodotto, si comporta come il numero 1 nel prodotto tra numeri naturali; si suole esprimere questo fatto scrivendo:

(30) $$k / k = 1;$$

questa formula può essere accettata con le stesse precauzioni e con convenzioni analoghe a quelle che abbiamo formulato sopra.

Si ha inoltre:

(31) $$(m/n) \times (n/m) = (m \times n)/(n \times m) = 1.$$

Si definisce "numero (razionale) *reciproco* del numero m/n il numero n/m". Con questa definizione si giunge a definire un'operazione di "*divisione*" tra numeri razionali, nel modo seguente:

(32) $$(m/n)/(p/q) = (m/n) \times (q/p).$$

AVVERTENZA. Nella (32) abbiamo indicato l'operazione di divisione di un numero razionale per un altro interponendo il segno " $/$ " tra i simboli delle due frazioni che rappresentano i due numeri razionali in parola; spesso si indica la stessa operazione interponendo il segno ":".

Ricordiamo infine che l'operazione di divisione viene anche spesso indicata tracciando una linea orizzontale e scrivendo i due numeri razionali uno sopra e l'altro sotto la linea stessa che, come abbiamo già detto, viene chiamata "linea (o segno) di frazione".

9 - Per i numeri razionali si definisce anche un'operazione di somma, nel modo seguente: siano dati due numeri razionali, rappresentati da due frazioni h/n e k/n aventi denominatori uguali; allora si definisce somma dei due numeri razionali quel numero rappresentato dalla frazione:

(33) $$\frac{h+k}{n} = \left(\frac{h}{n}\right) + \left(\frac{k}{n}\right),$$
che ha lo stesso denominatore dei due addendi, ed ha come numeratore la somma dei numeratori. Se i due numeri razionali dati non fossero rappresentati da frazioni aventi denominatori uguali, occorre scegliere due frazioni aventi denominatori uguali, tra le infinite frazioni che rappresentano l'uno e l'altro dei due numeri. Ciò è sempre possibile, per esempio moltiplicando entrambi i termini di ciascuna delle frazioni per il denominatore dell'altra. Così si avrà in generale:

(34) $$(m/n) + (p/q) = (q \times m + p \times n)/(n \times q).$$

Si usa dire che le due frazioni sono state *ridotte allo stesso denominatore*; nel caso considerato sopra tale denominatore è ovviamente il prodotto dei due, ma potrebbe darsi il caso in cui i due termini della frazione che nella (34) è alla destra del segno " = " possano essere divisi per un eventuale fattore comune. Nell'aritmetica pratica si insegna a trovare il minimo tra i denominatori possibili, ed a chiamarlo ovviamente "*minimo comun denominatore*". La sua ricerca non è sempre necessaria, perché la cosa veramente importante è che le due frazioni su cui si opera abbiano lo stesso denominatore; il fatto che questo sia il minimo possibile ha come solo risultato quello di rendere talvolta più comodi i calcoli, ma non ha alcuna importanza concettuale.

Con riferimento all'Avvertenza che abbiamo enunciato nel paragrafo 7, possiamo ora estendere il concetto di numero razionale, definendo il numero razionale zero (rappresentato anche qui con il simbolo "0"); converremo che esso sia rappresentato da una qualunque frazione del tipo:

(35) $$0/k$$

essendo k un numero naturale diverso da zero. Non daremo alcun significato a simboli frazionari nei quali il denominatore è nullo, oppure entrambi i termini sono zero.

Il numero razionale 0 si comporta nelle operazioni che abbiamo definito, come lo zero dei numeri naturali. In base a ciò che abbiamo detto poco fa, non ha significato l'operazione di divisione di un numero razionale qualsivoglia per lo zero.

10 - Nell'insieme dei numeri razionali può essere definita una relazione, che sarà indicata con il simbolo " $\leq$ ", e che ha proprietà analoghe a quelle possedute dalla relazione tra grandezze indicata con lo stesso simbolo. Precisamente, dati due numeri razionali, rappresentati rispettivamente da due frazioni m/n e p/q, scriveremo:

(36) $$m/n \leq p/q$$

se, quando le due frazioni siano ricondotte ad avere lo stesso denominatore (se ciò già non avviene), il numeratore della prima sta nella relazione " $\leq$ " con il numeratore della seconda.

Qualora due numeri razionali stiano nella relazione espressa dalla (36), si definisce un'operazione di "sottrazione", ponendo:

(37) $$(p/q) - (m/n) = (p \times n - q \times m)/(q \times n).$$

11 - Le operazioni sui numeri razionali, rappresentati da classi di frazioni equivalenti, hanno certe proprietà formali alle quali vengono date certe denominazioni convenzionali; per esprimere tali proprietà, qui e nel seguito, converremo di indicare un numero razionale con una sola lettera minuscola dell'alfabeto latino, come $a, b, c, d, \ldots. x, y, z$, ... S'intende che ognuno di questi simboli rappresenterà una frazione della classe di equivalenza di frazioni che costituisce il numero razionale, e che le operazioni indicate debbono essere eseguite secondo le definizioni e le regole che abbiamo esposto fin qui.

Prima di esprimere con formule le proprietà formali delle operazioni sui numeri razionali osserviamo che finora noi abbiamo indicato le operazioni su questi enti identificando i singoli elementi con parentesi. Ciò abbiamo fatto per conseguire la maggiore chiarezza possibile; tuttavia questa pratica porterebbe a formule molto complicate qualora si dovessero indicare molte operazioni diverse tra loro. Ciò avviene per esempio quando si scrivano quelle successioni di simboli che vengono chiamate abitualmente "*espressioni*". È noto che si suole chiamare "espressione" (aritmetica o algebrica) un simbolo composto da altri simboli i quali indicano numeri (precisati oppure soltanto indicati genericamente con simboli letterali), oppure indicano operazioni da eseguirsi sui numeri suddetti. Per esempio si può chiamare espressione la successione di simboli:

(38) $$(a + b \times c)/d,$$
nella quale le lettere a, b, c, d indicano dei numeri generici; qualora al posto di queste di sostituissero per esempio i numeri 1, 2, 3, 4, si otterrebbe l'espressione numerica:

(39) $$(1 + 2 \times 3)/4.$$

L'espressione (39) indica un numero che si ottiene facendo certe determinate operazioni sui numeri indicati; secondo una convenzione fondamentale, nel determinare il numero indicato dalla (39), le operazioni vanno eseguite rispettando le regole seguenti:

I) le operazioni di moltiplicazione e di divisione vanno eseguite prima di quelle di somma e sottrazione;

II) un'espressione posta tra parentesi deve essere considerata come un tutto unico; e quindi le operazioni ivi indicate debbono essere eseguite prima delle altre; qualora esistano più coppie di parentesi, i calcoli vanno eseguiti iniziando dalle espressioni contenute nelle coppie di parentesi più interne.

Quindi, per esempio, nel determinare il numero indicato dalla (37), occorre prima determinare il valore dell'espressione
$$1 + 2 \times 3,$$
(regola II), e questo si fa calcolando il prodotto 2×3 prima della somma. Pertanto, senza possibilità di equivoci, la (39) indica il numero razionale $7/4$.

Con queste convenzioni, le proprietà formali delle operazioni sui numeri razionali sono espresse dalle formule seguenti:

(40) $a + b = b + a$ (*proprietà commutativa della somma*)

$a + (b + c) = (a + b) + c$ (*proprietà associativa della somma*).

$a \times b = b \times a$ (*proprietà commutativa del prodotto*)

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ (*proprietà associativa del prodotto*).

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (*proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma*).

$0 + a = a \ ; \ 0 \times a = 0.$

Si hanno poi le proprietà della relazione "$\leq$", che sono espresse dalle formule seguenti:

(41) se è $a \leq b$ ed anche $b \leq c$, allora è $a \leq c$.

Converremo di considerare l'espressione $b \geq a$ come equivalente della $a \leq b$; inoltre se è $a \leq b$ ed i due numeri a e b non sono uguali, scriveremo:

$a < b$, oppure $b > a$.

Con queste convenzioni, possiamo scrivere, accanto alla (41), le relazioni seguenti:

(42) se è $a \leq b$ ed anche $b < c$, allora è $a < c$;
se è $a < b$ ed anche $b \leq c$, allora è $a < c$;
se è $a < b$ ed anche $b < c$, allora è $a < c$.

Osserviamo infine che, in forza della definizione che abbiamo dato della relazione "$\leq$", sussiste tra due razionali dati una ed una sola delle relazioni espresse dai simboli "$<$", oppure "$=$", oppure "$>$".

12 - Nel paragrafo 7 abbiamo presentato il numero razionale sotto l'aspetto di operatore tra grandezze; precisamente tale numero è stato visto come indicante un'operazione che, eseguita su una grandezza qualunque, ne dà un'altra ben determinata. Dopo di aver presentato le operazioni tra numeri razionali possiamo fare un passo ulteriore, e precisare l'operazione sulle grandezze di cui sopra: ciò si ottiene definendo il significato della (25) come "prodotto di un numero razionale per una grandezza A".

Quest'operazione estende quindi il significato dell'operazione di "prodotto", ed il nome che le si dà è giustificato dal fatto che per essa valgono proprietà formali, analoghe a quelle già valide per l'operazione di prodotto già considerata tra enti noti.

Per esprimere tali proprietà formali indicheremo anche qui con lettere maiuscole dell'alfabeto latino (come $A, B, C, \ldots, X, Y, Z \ldots$.) delle grandezze, e con lettere minuscole (come $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$) dei numeri razionali. Il prodotto di un numero razionale a per una grandezza A sarà indicato col simbolo:

(43) $a\,A,$

e per esso valgono le proprietà espresse dalle formule seguenti:

(44)
$$(z + y)\,A = z\,A + y\,A,$$
$$y\,(A + B) = y\,A + y\,B,$$
$$z\,(y\,A) = (z \times y)\,A.$$

E in particolare:

(45) $1\,A = A \;\; ; \;\; 0\,A = O.$

Si osservi che, come abbiamo già visto in altra occasione (nel paragrafo 4), nella prima delle (44) il segno " $+$ " a sinistra del simbolo " $=$ " indica somma di due numeri razionali, a destra indica somma di due grandezze. Ripetiamo che l'impiego di un medesimo simbolo in contesti differenti (e quindi con significati diversi) non dà luogo a confusioni o ad equivoci, perché il simbolo stesso ha in ogni caso la medesima sintassi, cioè il suo impiego è retto sempre dalle stesse regole.

13 - Date due grandezze omogenee A e B, se avviene che si abbia:

(46) $B = (m/n)\,A,$

si dice che il razionale m/n è (o esprime) il "*rapporto*" tra B ed A; e si scrive anche:

(47) $B{:}A = m{:}n,$ o anche $B/A = m/n,$

leggendo "B sta ad A come m sta ad n", o anche "B sta ad A nel rapporto di m ad n".

Dalla definizione di numero razionale si deduce che dalla (46) o dalla (47) si trae:

(48) $n\,B = m\,A;$

in altre parole, il sussistere della (46) equivale a dire che le due grandezze A e B hanno (almeno) un multiplo in comune.

Questi concetti possono essere generalizzati, prendendo in considerazione quattro grandezze: A, B ed X, Y, nell'ipotesi che A e B siano omogenee, X ed Y siano omogenee, ma non necessariamente A sia omogenea ad X.

Dalla (48) si giunge anche a dimostrare che vale la:

(49) $(1/m)\,B = (1/n)\,A;$

quindi se due grandezze hanno (almeno) un multiplo in comune, esse hanno (almeno) un sottomultiplo in comune, e viceversa.

Se avviene che tra due grandezze sussista una relazione come la (46) si dice che le due grandezze sono *commensurabili tra loro*.

La considerazione di coppie di grandezze tra loro commensurabili, e dell'espressione dei loro rapporti, spiega anche la denominazione di *numero razionale*, che viene utilizzata per indicare la classe di equivalenza di frazioni che indicano un rapporto tra grandezze commensurabili. Tale denominazione risale alla lingua greca, nella quale il termine "logos" aveva il significato di "pensiero, ragione", ma anche di "rapporto"; cose analoghe accadono anche nella lingua latina, nella quale il termine "ratio" ha pure il significato di "ragione" nel senso di pensiero, ma anche ha il significato di "relazione" ed anche di "rapporto". Quindi i simboli che esprimono il rapporto tra due grandezze commensurabili vengono chiamati "numeri razionali" per indicare che essi esprimono il rapporto (ragione, con termine derivato dal latino, ed usato anche nella matematica dei secoli scorsi) tra due grandezze.

Partendo dalla (46), e ricordando il significato di operatore che abbiamo dato a un numero razionale possiamo ora fare un passo ulteriore. Infatti il razionale m/n viene chiamato anche con un altro nome, oltre che rapporto della B alla A: precisamente esso viene detto *misura* della grandezza B rispetto alla grandezza A. Anche questo nome è collegato con la nomenclatura corrente in questa teoria nella matematica classica: infatti il termine "commensurabili" che abbiamo introdotto per indicare due grandezze tra le quali sussiste una relazione come la (46), viene dal latino (come altri termini che abbiamo visto) e significa anche "misurabili".

Quest'osservazione costituisce il punto di partenza per una procedura fondamentale in tutta la scienza che utilizza il linguaggio matematico. Possiamo infatti partire dalla (46) per osservare che, fissata che sia in una classe di grandezze una grandezza (che verrà chiamata "*unità di misura*"), a ogni numero razionale a corrisponde una grandezza, omogenea con la U, che si esprime con la formula:

(50) $A = a\,U.$

Le formule (44) garantiscono che alla somma di due numeri razionali corrisponde la somma delle grandezze rappresentate nella forma (50). In particolare dalla (45) si trae che la grandezza U ha come misura l'unità rispetto a se stessa.

14 - Abbiamo osservato che, fissati un numero razionale e una grandezza U, la formula (50) rappresenta un'altra grandezza, che è univocamente determinata dai dati; ci domandiamo ora se, data una grandezza qualunque A, esista sempre un razionale a tale che valga la (50). In altre parole, se, date due grandezze qualunque, esista un razionale che esprime il loro rapporto; con la nomenclatura introdotta nel paragrafo precedente, la domanda potrebbe essere riformulata chiedendo *se due grandezze qualunque siano sempre commensurabili*.

Come è noto, la risposta a questa domanda è negativa: infatti, dagli inizi della scienza greca (cioè da più di 2000 anni) si conosce l'esistenza di coppie di grandezze che non sono commensurabili; pertanto non è possibile esprimere il loro rapporto con una frazione (o meglio con una qualunque tra le infinite frazioni equivalenti che costituiscono un numero razionale). Pertanto tali coppie di grandezze vengono chiamate "tra loro *incommensurabili*"; tali sono per esempio il lato e la diagonale di un medesimo quadrato, come si dimostra in base al celebre teorema che viene detto "di Pitagora".

Infatti, in forza di questo teorema, se esistesse un razionale a che è la misura della diagonale di un quadrato, quando si prenda come unità di misura il lato, questo razionale a dovrebbe soddisfare alla relazione:

(51) $a \times a = 2\,;$

e in base a semplici considerazioni di aritmetica si dimostra che non può esistere alcun numero razionale a con questa proprietà.

In geometria si dimostra che circostanze analoghe si verificano in numerosissimi casi. Si potrebbe addirittura dire, in forma ben poco precisa, che in generale, per quanto riguarda le grandezze geometriche, non è possibile scrivere una relazione come la (50), nella quale "a" rappresenta un determinato numero razionale; tuttavia è possibile prendere in considerazione un insieme S di infiniti numeri razionali caratterizzato dalla condizione seguente:

Ogni numero a appartenente ad S è tale che sia:

(52) $A > a\,U.$

Si dimostra che, fissate le grandezze A ed U, è sempre possibile considerare l'insieme S di cui si diceva; e viceversa, fissato l'insieme, in forza della proprietà di continuità di cui abbiamo detto (nel paragrafo 7), esiste una unica e ben determinata grandezza A, che soddisfa alla (52) per ogni numero a dell'insieme S.

Si suol dire che l'insieme S così definito costituisce un *numero irrazionale*. Osserviamo che questo aggettivo non deve dar luogo ad equivoci o fraintendimenti. Infatti in questo caso l'aggettivo non ha per nulla il significato di "irragionevole" o addirittura "contrario alla ragione"; semplicemente qui l'aggettivo significa che l'ente che prendiamo in considerazione non può essere rappresentato con un unico numero razionale; pertanto il concetto qui presentato estende il concetto di rapporto tra grandezze, di cui abbiamo detto sopra (paragrafo 13).

Si definiscono per i numeri irrazionali delle relazioni e delle operazioni analoghe a quelle che abbiamo definito e studiato per i numeri razionali; pertanto possiamo scrivere una relazione del tipo:

(53) $A = a\,U;$

e il numero irrazionale a verrà chiamato "*misura*" di A rispetto ad U, e anche "*rapporto*" delle due grandezze A ed U.

15 - L'operazione di misurare una grandezza rispetto ad una certa grandezza omogenea U, che viene assunta convenzionalmente come unità di misura, è fondamentale per la vita quotidiana, per la tecnica e per la scienza. Essa permette di rappresentare con precisione una grandezza con simboli numerici, e soprattutto permette di rappresentare con questi simboli l'operazione di somma di grandezze, e altre manipolazioni che noi eseguiamo sulla realtà materiale. Abitualmente il risultato dell’operazione di misura viene espresso con particolari simboli che sono chiamati (con una espressione non perfetta) *numeri decimali*.

Questi simboli permettono di rappresentare in modo particolarmente comodo certi particolari numeri razionali, precisamente quei numeri razionali che hanno la seguente proprietà: nella classe di equivalenza che li rappresenta esistono delle frazioni il cui denominatore è una potenza del 10, cioè della base da noi adottata per la numerazione.

Per esempio, considerato il razionale $87/75$, si verifica che nella classe di frazioni equivalenti a cui esso appartiene esiste la frazione $116/100$. Come è noto, questa frazione viene convenzionalmente rappresentata nella forma:

(54) $\quad 1{,}16 \quad$ oppure $\quad 1.16.$

Questi simboli vengono chiamati, come si è detto, numeri decimali; la virgola che compare nel primo, o il punto che compare nel secondo, vengono chiamati rispettivamente *virgola decimale* o *punto decimale*. Entrambe le scritture rappresentano convenzionalmente la frazione $116/100$; l’impiego del punto va diffondendosi sempre di più, per imitazione delle abitudini anglosassoni, e per l’influenza delle notazioni dei calcolatori elettronici.

Tuttavia si osserva che non ogni numero razionale può essere rappresentato sotto forma decimale: ciò si può fare se, e soltanto se, il numero naturale, il quale sta al denominatore della frazione ridotta ai minimi termini, che rappresenta il numero razionale, vi sono soltanto come fattori primi il 2 oppure il 5, cioè i fattori del numero 10, che è stato scelto come base della numerazione. In ogni altro caso il numero razionale non può essere rappresentato con simboli finiti del tipo (54); ciò si verifica per esempio nel caso del numero razionale rappresentato dalla frazione $2/3$, che è ridotta ai minimi termini, e nel cui denominatore compare il numero 3, che è primo, ma che differisce ovviamente da 2 e da 5.

Osserviamo che una circostanza analoga si verificherebbe anche se si scegliesse come base di numerazione un numero naturale diverso dal 10.

16 - Abbiamo visto che il rapporto tra due grandezze può non essere rappresentato da un numero razionale unico, ma richiede la considerazione di un insieme di infiniti numeri razionali, che costituiscono un numero irrazionale. Abbiamo visto inoltre che vi sono infiniti numeri razionali i quali non possono essere rappresentati sotto forma finita con numeri decimali. Tuttavia in questi casi è sempre possibile ottenere delle informazioni sufficienti per la teoria e per la pratica, con adeguate procedure, che sono ben note e che sono fondate sulle proprietà delle grandezze.

La procedura abituale per ottenere un simbolo che rappresenti la realtà con certe convenzioni viene chiamata operazione di *misura*; essa consiste nel confrontare la grandezza che si vuole rappresentare con l'unità di misura e con i suoi sottomultipli. Ordinariamente, secondo la abitudini della tecnica e della vita civile di oggi, i sottomultipli sono presi secondo il 10 e le sue potenze; quindi la grandezza da misurare è confrontata con l’unità di misura, con il suo decimo, il suo centesimo, il suo millesimo ecc. In linea di principio, l’operazione può non avere fine, perché la grandezza da misurare può non essere commensurabile con l’unità di misura scelta. Tuttavia l’operazione si può ripetere indefinitamente, e conduce a una successione di cifre di un numero decimale, del tipo di quelli che compaiono nella (54). Cose analoghe si possono ripetere a proposito della rappresentazione del numero irrazionale che è soluzione di una equazione del tipo della (51); anche in questo caso esistono delle procedure che conducono a costruire sempre delle nuove cifre del simbolo numerico che rappresenta la soluzione.

In matematica si suole chiamare *algoritmo* una procedura di calcolo, che può constare di più stadi (in linea di principio anche senza mai finire), in modo che in ogni stadio del calcolo si tiene conto del risultato degli stadi precedenti; poiché un calcolo è sostanzialmente una deduzione, e poiché ogni deduzione (beninteso valida) ci procura nuove informazioni esplicite, si potrebbe dire che un algoritmo è una procedura razionale per migliorare indefinitamente le informazioni che si posseggono.

Così nel caso della soluzione dell'equazione (51), con l’applicazione successiva di un opportuno algoritmo si ottengono per la soluzione x le informazioni date dal simbolo seguente:

(55) $\quad x = 1.4142135623730950488016887242\,09...$

I puntini che stanno a destra dell'ultima cifra scritta indicano che la soluzione dell'equazione non è data dal numero decimale a 30 cifre che figura a destra del segno " $=$ ", ma che l'informazione data da quello è sempre migliorabile in modo razionale con l'impiego di un opportuno algoritmo.

Dalla (55) si possono anche ricevere altre informazioni: infatti, quando si scriva un numero decimale che contiene soltanto una parte delle cifre scritte nella formula, si ottiene un numero razionale che appartiene all'insieme dei numeri y tali che si abbia:

(56) $$y \cdot y = y^2 < 2;$$

aumentando di una unità l'ultima cifra scritta, si ottiene invece un numero dell'insieme complementare, cioè si ottiene un numero z tale che sia:

(57) $$z^2 > 2.$$

Ciò si verifica facilmente accertando che si ha per esempio:

(58) $$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2 .$$

17 - Il fatto che il rapporto tra due grandezze non possa essere rappresentato con un numero finito di simboli (cifre) non si verifica soltanto nel caso in cui due le grandezze siano tra loro incommensurabili; ciò avviene anche quando le grandezze sono commensurabili, ma il loro rapporto non può essere espresso con una frazione che possa dar luogo ad un numero decimale, come abbiamo visto sopra, nel paragrafo 15. Infatti, quando nella classe di equivalenza delle frazioni rappresentanti un numero razionale non può esistere una frazione che ha al denominatore una potenza del 10, il numero razionale non può essere rappresentato con una frazione decimale.

Per esempio non è possibile rappresentare il razionale $2/3$ con un numero decimale finito. In questo caso si può costruire una successione di cifre dopo la virgola, nella quale le cifre si succedono con regolarità; si suole dire che si ha un numero *decimale periodico*. Così per esempio il razionale $10/13$ dà luogo al numero decimale periodico:

$$10/13 = 0.769230769230769230769230\ldots..$$

Oppure si ha:

(59) $$2/3 = 0.6666666666\ldots...$$

Anche in questo caso, prendendo un decimale che si costruisce con un numero finito di cifre si ottiene una informazione parziale; ma anche in questo caso l'informazione può essere sempre migliorabile con sicurezza. E il significato del simbolo scritto a destra del simbolo " $=$ " è analogo a quello che abbiamo visto nel paragrafo precedente; così si ha:

(60) $$0.6666666666 < 2/3 < 0.6666666667.$$

E difatti si ha:

(61) $$3 \times 0.6666666666 = 1.99999999998 < 2 < 2.0000000001 = 3 \times 0.66666666667.$$

18 -- Abbiamo parlato dell'operazione che conduce a stabilire la misura di una grandezza rispetto a un'altra, assunta come unità di misura; ed abbiamo detto che questa operazione viene effettuata confrontando la grandezza da misurare con l'unità scelta e con i suoi sottomultipli.

Abitualmente questi sono presi rispetto al 10 ed alle sue potenze; tuttavia ciò non è per nulla necessario all'essenza dell'operazione, questa scelta è stata fatta perché si ottiene così, con una certa comodità, una successione di cifre di un numero decimale. Ma nella tecnica e nella tradizione di certe tecnologie si utilizzano dei sottomultipli secondo numeri diversi dal 10; per esempio nella tradizione della siderurgia anglosassone è stata praticata per molto tempo la procedura di misurare le lunghezze in pollici (inches), mezzi pollici, quarti, ottavi, sedicesimi e trentaduesimi di pollice. Convenzioni perfettamente legittime, ed anche comode per certi aspetti ma scomode per comunicare con altri popoli che hanno diverse convenzioni.

La cosa veramente importante sta nel fatto che, mediante l'operazione di misura, si riesce a dare una rappresentazione di molte grandezze mediante simboli opportuni del linguaggio matematico. Inoltre, come abbiamo visto più volte, i simboli matematici hanno spesso delle regole di trasformazione, che costituiscono una sintassi. L'applicazione di queste regole di sintassi permette di dedurre, cioè di trarre delle conseguenze certe da certe premesse. In questa luce quindi il linguaggio matematico ci si presenta come una chiave di lettura della realtà; il che spiega, almeno in parte, la fortuna e i numerosi progressi delle scienze matematizzate, dall'epoca di Galileo in qua:

infatti Galileo fu uno dei primi, se non addirittura il primo, che riconobbe e proclamò la potenza del linguaggio matematico nella scienza, affermando che il grande libro dell'Universo è scritto in caratteri matematici, e che in questo libro potrà leggere soltanto chi conoscerà questi caratteri.

V - IL CONCETTO INTUITIVO DI INSIEME. ALGEBRA DELLA LOGICA.

Il concetto intuitivo di insieme e la codificazione dell'operazione di astrazione; elementi di algebra di Boole. Simbolizzazione convenzionale diretta dei concetti, dei loro rapporti e delle operazioni logiche.

1 - Nel Cap. II, in particolare nei paragrafi 3, 4, 5, 6 abbiamo parlato del concetto di insieme, accettando il significato che a questo termine viene dato nel linguaggio comune, e ricordando anche la frase con la quale il grande matematico Georg Cantor presenta tale concetto.

Ritorniamo qui sull'argomento per varie ragioni: anzitutto esso è esplicitamente nominato nei programmi d'insegnamento, anche per la scuola a livello elementare; inoltre il concetto viene abitualmente collegato, in modo più o meno stretto, con varie operazioni logiche: tra esse ricordiamo per esempio l'operazione di classificazione, e varie operazioni di deduzione. Molte, tra queste operazioni logiche, vengono simbolizzate con simboli opportuni, le cui regole sintattiche sono studiate dall'Algebra astratta, e dalla Logica simbolica .

Lo studio dell'argomento "insiemi" all'inizio dello svolgimento del programma di matematica pone in atto una concezione della matematica e della sua didattica che io non condivido, come ho già fatto capire nell'introduzione a questo volume.

Io penso infatti che la presentazione di un concetto molto astratto e molto generale all'inizio del curriculum scolastico non permetta ai discenti di assimilare pienamente la sua portata e la sua potenza. Infatti la semplicità e la generalità di un concetto non significano affatto che esso sia facilmente comprensibile. Ciò mi pare confermato anche dalla storia della scienza: infatti molto spesso i concetti profondi e generali sono stati frutti di sintesi e di evoluzioni faticose. Probabilmente essi si sono affermati soltanto quando la grande massa di conoscenze e la complessità delle teorie parziali ha permesso agli scienziati di apprezzare la potenza e la validità dei concetti generalissimi.

Nel caso dell'insegnamento elementare ritengo che l'introduzione di quella che viene abitualmente chiamata "insiemistica" sia stato un errore didattico, frutto della confusione (forse fatta in buona fede) tra semplicità e generalità di un concetto e facilità del suo apprendimento e della sua appropriazione da parte degli scolari.

Io penso al contrario che le strutture formali astratte debbano, in linea di massima, nascere dal vissuto concreto del discente, e debbano essere presentate soltanto quando il discente è in grado di apprezzarne la potenza di sintesi e le possibilità di deduzione certa che esse offrono; dunque quando il discente possegga già un certo patrimonio di nozioni da inquadrare.

Ciò non significa per nulla che dobbiamo rinunciare ad avviare i discenti alla deduzione rigorosa; ma significa soltanto che il discente deve essere esercitato in questa pratica insostituibile anzitutto nei casi pratici concreti, rinunciando alle strutture formali e ai simbolismi dei quali per il momento non vede la necessità né l'utilità.

Tuttavia ritengo molto utile che i docenti conoscano queste strutture formali; se non altro perché la loro conoscenza può aiutare anche a capire il significato dei calcoli che si fanno sui numeri, e il valore della matematica come chiave di lettura della realtà.

2 - Tralasciamo per il momento il problema della definizione del concetto astratto e generale di insieme; penso infatti che il dare una definizione rigorosa ponga dei problemi la cui soluzione richiede dei procedimenti filosofici ed epistemologici che sarebbe fuori luogo affrontare qui.

Mi interessa invece il problema della determinazione di un dato insieme; esso infatti è oggetto di frequenti trattazioni, anche a livello elementare, e viene affrontato nella pratica didattica sotto varie forme; una delle più frequenti è quella della classificazione di oggetti o di concetti. La procedura più abituale è quella che collega la costruzione di un insieme con il concetto intuitivo di proprietà o qualità specifica. È questo un modo di vedere che fa parte del nostro modo di pensare quotidiano; in esso infatti con molta frequenza classifichiamo oggetti materiali, persone, concetti e altre moltissime cose, mettendo in una sola classe certi oggetti in cui scopriamo una qualità o certe qualità comuni. Ciò è talmente frequente e comune che il vocabolario corrispondente fa parte del modo quotidiano di parlare: per esempio quello che viene chiamato il *genere* dei nomi non è che il riflesso della classificazione che noi facciamo, in modo quasi automatico ed inconscio, anzitutto delle persone e degli animali, in corrispondenza dei due sessi, e poi attribuendo un genere anche ai nomi delle cose inanimate, per ragioni che difficilmente si saprebbero in ogni caso giustificare. Pertanto si potrebbe dire che l'impiego quotidiano della lingua viva e comune avviene attraverso una ripetuta operazione di classificazione.

Tuttavia, quando si voglia giungere a simbolizzare questi procedimenti in modo astratto e rigoroso, si possono incontrare delle difficoltà, che possono anche causare fuorviamenti logici. Infatti Bertrand Russel, costruendo un celebre paradosso, ha mostrato che la simbolizzazione delle operazioni logiche elementari richiede certe precauzioni per evitare le situazioni paradossali.

Per queste ragioni io tratterò qui soltanto alcuni aspetti di quella che viene chiamata la teoria elementare, intuitiva e acritica degli insiemi. Infatti, anche rimanendo a questo livello, penso di poter far comprendere il significato della simbolizzazione e di poter anche analizzare la portata di certe strategie didattiche dirette all'acquisizione delle procedure fondamentali della logica.

Purtroppo si potrebbe osservare che molte trattazioni manualistiche, e soprattutto molte di quelle dedicate alle scuole elementari, non sembrano adatte per ottenere lo scopo che si vuole raggiungere, e cioè per aiutare i discenti al ragionamento astratto, generale e rigoroso.

3 - Come ho detto al paragrafo precedente, molto spesso, nella pratica quotidiana della didattica, la presentazione del concetto di insieme conduce alla pratica della classificazione di oggetti (concreti oppure astratti) e talvolta viene addirittura confusa con essa. Abbiamo anche osservato che quest'operazione viene abitualmente e quotidianamente compiuto quasi ogni volta che utilizziamo la lingua comune.

Perciò io penso che ogni volta che utilizziamo correttamente una lingua, eseguiamo delle operazioni di classificazione; queste pertanto non meriterebbero di essere oggetto di tanti appositi esercizi; perché degli esercizi cosiffatti rientrano nell'ordinaria pratica di espressione corretta con i soliti mezzi linguistici. Tuttavia spesso i manuali e i sussidiari insistono su quest'operazione logica con molti esercizi, il cui triste risultato è spesso una clamorosa confusione di idee.

Ricorderò qui alcuni tra gli esercizi che s'incontrano più frequentemente; essi si presentano in moltissime varianti, e pertanto li ricorderò in forma molto schematica:

I - Esercizio che si potrebbe chiamare "dell'elemento estraneo";

II - Esercizio che si potrebbe chiamare "della lacuna da colmare";

III - Esercizio che si potrebbe chiamare "della serie da proseguire".

Nell'esercizio del I tipo, si hanno spesso delle figure di oggetti, e uno tra questi non possiede la qualità specificante di tutti i rimanenti; questo viene quindi considerato come "estraneo" all'insieme, e deve essere indicato come tale.

Nell'esercizio del II tipo la situazione è in qualche modo reciproca: ci sono molti oggetti, i quali dovrebbero avere tutti una caratteristica comune; si tratta di indicare, o di trovare un oggetto da mettere in loro compagnia.

Gli esercizi del III tipo sono analoghi a quelli del II, con l'aggravante che in questi casi il soggetto ha a che fare con numeri.

Diverse osservazioni si potrebbero fare su questi tipi di esercizi, che vengono abitualmente chiamati "di logica". Mi pare che l'osservazione più importante possa essere espressa dicendo che coloro i quali propongono esercizi cosiffatti hanno ovviamente in mente un certo personale criterio di classificazione degli oggetti che presentano, criterio che potrebbe essere molto ragionevole, e che viene considerato anche come "immediato", o anche "evidente" e "intuitivo"; purtroppo molti tra coloro che propongono gli esercizi pensano in più che il loro criterio sia l'unico possibile, e tendono inevitabilmente a considerare errato ogni altro criterio. In questo modo si rischia di non giudicare correttamente, o, come minimo, di restringere il proprio punto di vista.

Ricordo per esempio una delle tante volte in cui sono caduto in un errore di questo tipo: stavo lavorando in aritmetica con una bambina di circa sette anni, e volevo presentarle l'idea che la somma di due numeri, rappresentanti due insiemi finiti, ha senso quando gli oggetti dei due insiemi sono della stessa specie; per esempio, le dissi che non si possono sommare tre cavoli con quattro patate, perché il numero 7 non avrebbe rappresentato né cavoli né patate; ma la bambina mi rispose prontamente che il numero 7 avrebbe rappresentato 7 vegetali. Ovviamente nelle mie parole era implicita la condizione che la somma dei due interi naturali dovesse rappresentare un insieme di oggetti appartenenti alla stessa specie degli elementi di uno dei due insiemi. Ma questa condizione diventa irrilevante quando si passi ad un livello superiore di astrazione, come aveva già fatto la bambina.

Così, negli esercizi di cui abbiamo detto, si richiede sostanzialmente che un soggetto riconosca un certo criterio di classificazione, fondato su una certa proprietà comune; criterio che giustifica l'esclusione, o l'inclusione di un oggetto come elemento di un dato insieme. Ma mi pare evidente che possono esistere varie proprietà, le quali possono fondare diversi criteri di classificazione dei medesimi oggetti. Mi pare inoltre evidente che la cosa veramente importante non è tanto che il soggetto identifichi il criterio di classificazione adottato da colui o da coloro che propongono l'esercizio, ma che abbia un criterio ragionevole di classificazione, e sappia giustificarlo, anche se in modo sommario e incompleto.

Inoltre la didattica abituale adotta anche degli strumenti e degli espedienti grafici per condurre in porto le operazioni di classificazione: questi strumenti sono per esempio i diagrammi ad albero, i diagrammi di Eulero, i diagrammi di Carrol.

Rispetto le buone intenzioni di coloro che hanno inventato questi strumenti utilissimi; e rispetto anche le buone intenzioni di chi intende utilizzarli per facilitare le operazioni logiche di classificazione e le loro conseguenze; tuttavia vorrei anche osservare che anche in questi casi si tratta pur sempre di rappresentazioni simboliche e convenzionali di concetti e di rapporti tra essi. Pertanto si potrebbe considerare valido anche il dubbio che talvolta queste rappresentazioni possano essere inadeguate o addirittura fuorvianti; ed anche si deve considerare valida l'ipotesi che alcune menti siano imbarazzate dall'aspetto simbolico e convenzionale di queste rappresentazioni, e quindi si trovino da queste imbarazzate piuttosto che aiutate. Il che sarebbe ovviamente contro le intenzioni e le speranze degli inventori di questi marchingegni, e soprattutto sarebbe contro le ottime intenzioni di coloro i quali intendono utilizzarli nella didattica.

Il fatto che purtroppo spesso si ottengano dei risultati opposti a quelli desiderati fa parte della pratica quotidiana di chiunque, e dunque anche di chi insegna, e non deve stupire; ma credo che la cosa da evitare sia il pensare che questi strumenti siano necessari per un ragionare corretto; il che conduce a impostare il proprio insegnamento su questa presunzione, e a giustificare i propri giudizi su queste basi, ignorando che spesso esistono dei fenomeni di rigetto per il simbolismo astratto, fenomeni che non debbono tuttavia portare a giudizio negativo sulle capacità mentali dei soggetti.

Le considerazioni svolte hanno il loro fondamento su numerose osservazioni; del resto basta leggere l'opera di Lewis Carrol, intitolata *Logic*, nella quale egli presenta i propri diagrammi logici per leggere contemporaneamente anche molte fondate critiche sui difetti dei diagrammi di Eulero.

Dico questo per sottolineare il fatto che ogni strumento espressivo convenzionale può avere i propri difetti ed i propri limiti, e che quindi occorre evitare di conferirgli quel valore assoluto che non possiede.

4 - La simbolizzazione di insiemi con lettere dell'alfabeto, oppure in modo grafico, è soltanto il primo passo che si compie nella direzione che conduce alla logica simbolica vera e propria. Un passo ulteriore si compie istituendo un insieme di simboli che permettono di rappresentare le operazioni sugli insiemi. Lo studio delle leggi di queste operazioni ha condotto alla costruzione di un ramo importante della matematica moderna, ramo che viene spesso richiamato sotto il nome di Algebra di Boole, dal nome del teologo, filosofo e matematico inglese dell' Ottocento George Boole [1815-1864] che costruì un sistema di simboli per rappresentare i concetti e le loro relazioni, e mise in evidenza le leggi formali di questi simboli.

Le regole di tale simbolismo permettono di superare le ambiguità e gli equivoci che nascono spesso dall'impiego di certe espressioni del linguaggio comune e che portano spesso a incomprensioni ed anche a conclusioni errate. La manualistica riporta molti di questi equivoci, che del resto sono ricordati anche nei programmi d'insegnamento delle scuole elementari; mi limiterò quindi soltanto a brevissimi cenni su questi aspetti della questione.

Si considerino, per esempio, due casi in cui una stessa particella del linguaggio comune, e precisamente la particella "o", può avere diversi significati e quindi può permettere diverse deduzioni. Il primo esempio è dato da frasi come queste: “I ragazzi del gruppo che era in gita acquistarono caramelle o patatine”, e l’altra: “Voglio il traditore vivo o morto”. Evidentemente nel primo caso la congiunzione "o" non esclude che esistano dei ragazzi del gruppo che hanno acquistato tanto le caramelle che le patatine; invece nel secondo caso chi porta il traditore vivo non può portarlo morto e viceversa.

Si usa dire che nel primo impiego la congiunzione "o" ha significato *non esclusivo*, mentre nel secondo caso ha significato *alternativo*. Nella lingua latina, i due impieghi sarebbero distinti anche dal punto di vista esteriore, perché il primo impiego richiederebbe l’uso della particella "vel", mentre il secondo richiederebbe l’uso della congiunzione "aut...aut…". Questo secondo modo di esprimersi è talvolta in uso anche in lingua italiana, quando si vuole mettere in evidenza la necessità della scelta tra due alternative, una delle quali esclude necessariamente l’altra; e del resto è questo anche il senso in cui l’espressione "aut aut" è usata in un celebre libro del filosofo Soren Kirkegaard. Nella pratica comune la distinzione tra i due tipi di impiego può essere ottenuta con ricorso al contesto a cui la frase appartiene; ma talvolta accade che neppure il ricorso al contesto permetta di decidere tra l’una e l’altra interpretazione.

Analoghe situazioni ambigue insorgono anche in corrispondenza all’uso della congiunzione "e", pure di frequentissimo impiego nel linguaggio comune; a titolo di esempio consideriamo le due frasi seguenti: “Nell’aula erano presenti studenti e studentesse”, e l’altra: “I capaci e meritevoli, anche se privi di mezzi, hanno diritto di raggiungere i gradi più alti degli studi.” [Costituzione della repubblica italiana. Art. 33. Comma 3].

Ovviamente nel primo caso la congiunzione "e" vuol significare che l’insieme delle persone presenti nell’aula era costituito dalla riunione di due insiemi senza elementi comuni; nel secondo invece la stessa congiunzione significa che coloro i quali hanno diritto di accedere ai più alti livelli d’istruzione debbono avere entrambe le due qualità: di essere capaci e di essere meritevoli; infatti se mancasse anche una sola delle due qualità, se uno fosse capace ma non meritevole, se fosse meritevole ma incapace, il diritto non maturerebbe.

Ovviamente, anche in questo secondo caso, il ricorso al contesto permetterebbe di chiarire i dubbi di interpretazione delle espressioni del linguaggio comune. Osservo tuttavia che il ricorso al contesto può spesso condurre a comprendere chiaramente il significato delle espressioni verbali che si odono o si leggono; ma aggiungo che ciò non avviene sempre, e ne fanno fede le interminabili discussioni e polemiche sull’interpretazione di certe leggi e addirittura della nostra Costituzione.

5 - L’analisi logica delle nostre operazioni mentali ha messo in evidenza certe operazioni che sono state scelte come elementari e fondamentali, ed ha condotto alla loro simbolizzazione, in modo tale che ogni altra operazione mentale interessante la logica può essere rappresentata con i simboli che sono stati escogitati.

Prima di esporre questo simbolismo vorrei tuttavia ribadire che il percorso che esporrò non è per nulla obbligato; quindi si potrebbe costruire un simbolismo logico anche partendo da altre operazioni elementari. Ciò mi pare particolarmente interessante per la didattica e per l’aiuto alla diagnosi di certe forme di minorazione: può infatti avvenire che le due operazioni sugli insiemi che esporrò siano considerate come fondamentali in senso assoluto, e quindi ogni eventuale carenza nella loro comprensione (o, peggio ancora, nella loro simbolizzazione) sia giudicata come sintomo di grave minorazione mentale e di incapacità di ragionamento razionale coerente. Nelle pagine che precedono, ho già messo in guardia varie volte da atteggiamenti di questo tipo; ribadisco le osservazioni fatte, perché gli argomenti riguardanti la logica sono giudicati spesso come assolutamente fondamentali per ogni comportamento razionale, e quindi gli eventuali giudizi avventati in questo campo possono risultare più gravidi di conseguenze negative dei giudizi analoghi emessi in altre occasioni.

Una prima operazione mentale o materiale viene chiamata "unione" di due insiemi. Abbiamo già parlato di quest’operazione nel capitolo II, sull’unione di due insiemi che non hanno elementi in comune, e all’operazione di somma di due numeri naturali. Quello che abbiamo considerato nell’occasione citata è soltanto un caso particolare di un’operazione che ora prenderemo in considerazione in tutta la sua generalità. Precisamente: dati due insiemi, che indicheremo con A e B, indicheremo col simbolo convenzionale:

(1) $$A \cup B$$

(da leggersi "A unione B") l’insieme costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi dati. Così, dato un gruppo di ragazzi in gita, possiamo indicare con A l’insieme dei ragazzi che, durante una sosta, hanno comperato caramelle, e con B l’insieme dei ragazzi che, durante la stessa sosta, hanno comperato cioccolatini. Allora l’insieme unione, indicato dalla (1), è costituito dai ragazzi che durante la sosta hanno comperato almeno un dolciume di uno dei due tipi, cioè caramelle o cioccolatini, senza escludere che esistano dei ragazzi che hanno comperato dolciumi di entrambe le specie.

Come si vede, in questo caso il simbolo (1) traduce il significato della particella "o" del linguaggio comune, nel suo senso alternativo ma non esclusivo. Dal punto di vista dell’aritmetica appare chiaro che il numero degli elementi dell’insieme (1) non può essere ottenuto semplicemente facendo la somma dei due numeri naturali che danno gli elementi dei singoli insiemi A e B: infatti se essi avessero elementi in comune, questi verrebbero contati due volte.

[Nota: Indicando con $|X|$ la *cardinalità* – cioè il numero di elementi – di un insieme X, si ha: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.]

Per quanto riguarda la (1), possiamo ripetere qui ciò che abbiamo già detto nel Cap. II, in relazione alla somma di due numeri: infatti la (1) rappresenta un insieme, determinato dai due insiemi A e B; ma la stessa formula può essere vista come la rappresentazione dell’operazione (materiale oppure anche semplicemente mentale) che conduce a considerare l’insieme unione dei due. Nel citato Cap. II abbiamo suggerito due nomi diversi per l’operazione e per il suo risultato: rispettivamente addizione e somma. Ma abbiamo anche avvertito che non tutti sono d’accordo nel fare questa distinzione e nell’adottare questo vocabolario preciso. Nel caso degli insiemi si adotta un solo vocabolo, "unione", per indicare l’operazione e l’insieme che ne è il risultato, lasciando al lettore o all’ascoltatore il decidere sul significato in base al contesto.

Anche in relazione a questa operazione si possono ripetere le considerazioni che abbiamo già presentato nel cap. II: la (1) viene letta con una scansione temporale, da sinistra a destra; ciò potrebbe ingenerare il dubbio che il risultato dell’operazione dipenda dall’ordine in cui i due insiemi sono enunciati. Occorre quindi presentare delle proprietà dell’unione di due insiemi; proprietà che, a ben guardare, debbono essere esplicitamente enunciate a causa del nostro modo di presentare l’operazione.

Anche qui faremo uso del simbolo " $=$ " per indicare che due insiemi sono costituiti dagli stessi elementi, e useremo le parentesi secondo le convenzioni che abbiamo già presentato e commentato nel cap. II. Con queste convenzioni, le proprietà delle operazioni di unione di due insiemi vengono espresse dalle formule seguenti:

(2) $A \cup B = B \cup A$,

(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

La proprietà espressa dalla (2) viene chiamata *proprietà commutativa* dell’operazione di unione di due insiemi; quella espressa dalla (3) viene chiamata *proprietà associativa* della stessa operazione.

Queste proprietà vengono spesso chiamate *proprietà formali* dell’operazione di unione di insiemi; il nome convenzionale vuole indicare che esse valgono per tutti gli insiemi: quindi in particolare nelle espressioni che le presentano è lecito sostituire ad ogni lettera maiuscola un’altra qualunque, dovunque la prima venga incontrata.

L’operazione di unione di due insiemi viene anche talvolta chiamata *somma logica*, con una espressione che risale a G. Boole, il quale aveva appunto osservato molte analogie tra le operazioni dell’aritmetica e quelle della logica. È bene tuttavia evitare queste espressioni che potrebbero indurre in errore: infatti il parallelismo tra le operazioni dell’aritmetica e della logica non è completo. Una delle proprietà che sottolineano la differenza tra i due insiemi di operazioni è la seguente:

(4) $A \cup A = A$,

che ovviamente non vale per la somma tra numeri, e che viene chiamata *proprietà di idempotenza* dell'operazione di unione.

6 - Accanto all'operazione di unione di due insiemi viene abitualmente considerata una seconda operazione fondamentale, che prende il nome di "intersezione"; dati due insiemi A e B, si suol indicare con il simbolo:

(5) $$A \cap B$$

(che si legge "A intersezione B") l'insieme costituito dagli elementi che appartengono a entrambi. Così, come abbiamo detto sopra, al paragrafo 4, secondo la nostra Costituzione repubblicana, l'insieme dei cittadini che hanno diritto di raggiungere i gradi più alti degli studi, è costituito dall'intersezione dei due insiemi di cittadini: quelli capaci e quelli meritevoli.

Anche per l'operazione di intersezione di due insiemi si possono ripetere le considerazioni che abbiamo svolto poco sopra, a proposito della operazione di unione, e delle sue proprietà formali anzitutto si osserva che la (5) è stata presentata come il simbolo di un certo insieme; tuttavia essa può anche essere vista come simbolo dell'operazione logica che conduce a questo insieme; nella pratica entrambi questi concetti vengono designati con un solo termine: *intersezione*, e soltanto il ricorso al contesto può far distinguere i due significati. Inoltre alcuni Autori chiamano l'operazione di intersezione di due insiemi col nome di *prodotto logico*; questa denominazione risale a G. Boole e deriva dal parallelismo che questo autore aveva rilevato tra le proprietà dell'operazione e quella che viene chiamata "prodotto" tra numeri. Tuttavia già lo stesso Boole aveva rilevato anche le differenze tra le due operazioni; e ciò rende sconsigliabile l'impiego di questa denominazione, rispetto a quella di "intersezione", che appare più precisa e univoca.

Qui ci limiteremo a scrivere le formule che ne danno le proprietà:

(6) $A \cap B = B \cap A$ (*proprietà commutativa);*

(7) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (*proprietà associativa*)

(8) $A \cap A = A$ (*proprietà di idempotenza*).

7 - La considerazione dell'operazione di intersezione di due insiemi rende opportuna l'introduzione del un concetto convenzionale di *insieme vuoto*. A proposito di questo concetto si potrebbero parafrasare le osservazioni che abbiamo fatto nel Cap. II (soprattutto nei paragrafi 10 e 12) a proposito del simbolo "0" (zero). Abbiamo infatti osservato che se il concetto di numero nasce dal conteggio degli elementi di un dato insieme, quando gli elementi non ci sono il conteggio non ha senso e quindi in teoria non si potrebbe parlare del loro numero; di conseguenza l'introduzione dello zero tra i numeri consegue da un ampliamento convenzionale del concetto di numero (e della relativa simbologia). Tuttavia tale ampliamento non è contradditorio con ciò che è stato detto prima, e permette di costruire un simbolismo comodo e pratico; si tratta quindi di una convenzione non necessaria ma ben motivata.

Cose analoghe si possono ripetere a proposito del concetto di insieme vuoto; infatti poco fa è stato detto ripetutamente che un certo insieme "è costituito" da certi elementi; una immediata deduzione porterebbe a dire che l'insieme considerato non esiste se non ci sono elementi che lo costituiscono. Tuttavia si introduce in modo del tutto convenzionale l'insieme vuoto, cioè l'insieme che non ha elementi che lo costituiscano; esso viene indicato con il simbolo "$\emptyset$", simile a quello del numero zero; e infatti si potrebbe dire, in forma intuitiva, che il numero zero è appunto il numero degli elementi dell'insieme vuoto.

Con l'impiego del simbolo dell'insieme vuoto si può completare ciò che è stato detto fin qui a proposito dell'operazione di intersezione di due insiemi; in particolare la formula:

(9) $A \cap B = \emptyset$

esprime che l'intersezione dei due insiemi A e B è l'insieme vuoto. Dicendo la stessa cosa con termini più usuali, la (9) dice che i due insiemi A e B non hanno elementi in comune, cioè che nessun elemento di A appartiene a B e viceversa nessun elemento di B appartiene ad A.

Con riferimento al significato del simbolo, appaiono d'immediata evidenza le due formule:

(10) $A \cap \emptyset = \emptyset \quad ; \quad A \cup \emptyset = A.$

L'impiego dell'insieme vuoto permette anche di esprimere in forma convenzionale certe proposizioni che si esprimono abitualmente con il linguaggio comune. A tal fine introduciamo anzitutto un'altra convenzione simbolica; ricordando che abbiamo utilizzato il segno " $=$ " per indicare che due insiemi hanno gli stessi elementi, e quindi coincidono secondo la concezione intuitiva, conveniamo di scrivere :

(11) $A \neq B$

per indicare che i due insiemi A e B non coincidono, e quindi che tra loro non intercede la relazione indicata col simbolo " $=$ ". Stabilita questa simbologia, appare chiaro che la formula:

(12) $A \neq \emptyset$

indica che l'insieme A non è l'insieme vuoto, e quindi che esistono, nel senso intuitivo del termine, degli elementi dell'insieme A.

8 - Le due operazioni di intersezione e di unione posseggono altre proprietà, che qui presenteremo per completezza e che di solito vengono giustificate facendo ricorso alle rappresentazioni grafiche, come quelle fornite dai diagrammi di Eulero.

(13) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(14) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Le proprietà espresse da queste due formule vengono chiamate *proprietà distributive*, rispettivamente dell'operazione di intersezione rispetto a quella di unione [espressa dalla (13)] e dell'operazione di unione rispetto a quella di intersezione [espressa dalla (14)].

Sussistono infine altre proprietà, chiamate *proprietà di assorbimento*, che sono espresse dalle formule:

(15) $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$.

9 - Abbiamo considerato il concetto di insieme come intuitivo, rinunciando a darne una definizione rigorosa, ma limitandoci a presentare degli esempi; in modo analogo presentiamo il concetto di *sottoinsieme* di un insieme dato, ed il concetto di *elemento* di un insieme.

È chiaro che un insieme A potrà essere detto sottoinsieme di un insieme B quando ogni elemento di A è anche elemento di B; in simboli tale relazione tra i due insiemi può essere espressa dalle formule:

(16) $A \cap B = A$, oppure $A \cup B = B$.

Ricordando le (4) e (8) si vede che ogni insieme può essere considerato come sottoinsieme di se stesso; inoltre, ricordando le (10), si vede anche che l'insieme vuoto $\emptyset$ può essere considerato come sottoinsieme di ogni insieme.

Queste proprietà che conseguono dalle (16) sono molto utili nei calcoli che si possono fare con il simbolismo che abbiamo introdotto; tali calcoli rientrano in una dottrina di cui abbiamo detto sopra, al paragrafo 4, analoga all'algebra abituale, che viene chiamata abitualmente "algebra di Boole". Questi calcoli permettono di tradurre in formule i ragionamenti che la logica classica eseguiva con l'impiego del linguaggio comune.

10 - Per introdurre altre operazioni dell'algebra di Boole, conviene fare qualche ulteriore convenzione: precisamente d'ora innanzi supporremo che ogni insieme di cui dovremo parlare o su cui dovremo operare sia un sottoinsieme di un insieme dato, che indicheremo con Ω e chiameremo *universo*. Questa indicazione non vuole avere nulla di assoluto o di filosofico; semplicemente è diretta a precisare il significato e la portata di certe operazioni logiche, le quali in altro modo rischierebbero di rimanere nel vago.

Precisato che sia un universo Ω, e dato che sia un insieme A, che dunque sarà sottoinsieme di Ω, indicheremo con il simbolo:

(17) A'

l'insieme di tutti gli elementi di Ω che non appartengono ad A; tale insieme viene chiamato *complementare di A rispetto ad Ω*. Spesso si suol dire semplicemente "complementare di A", ed è sempre sottinteso che è stato precisato l'insieme universo al quale si fa riferimento per definire il complementare. Il simbolo (17) viene spesso letto "non A" e l'operazione che fa passare dall'insieme A al suo complementare A' viene chiamata *complementazione*; essa ha certe proprietà formali che sono espresse dalle formule seguenti:

(18) $[A']' = A,$

(19) $[A \cap B]' = A' \cup B',$

(20) $[A \cup B]' = A' \cap B'.$

La proprietà espressa dalla (18) viene spesso chiamata *legge della doppia negazione*; essa infatti è analoga a quella legge linguistica secondo la quale, in alcune lingue [per esempio in latino] una doppia negazione equivale a una affermazione: così per esempio è noto che in latino la parola "nonnulli" significa "alcuni". Le proprietà espresse alle (19) e (20) vengono chiamate *leggi di De Morgan*, dal nome del logico inglese Augustus De Morgan [1806-1871] che le formulò recentemente: esse tuttavia erano già note alla logica medievale.

Con l'introduzione dell'operazione di complementazione e del concetto di insieme universo, si possono enunciare altre proprietà delle operazioni che abbiamo introdotto finora. Tra le più importanti ricordo le seguenti:

(21) $A \cap A' = \emptyset; \qquad A \cup A' = \Omega$

(22) $A \cup \Omega = \Omega; \qquad A \cap \Omega = A.$

11 - Dati due insiemi finiti A e B si può costruire un terzo insieme C, che viene chiamato *prodotto cartesiano* dei due insiemi dati ed indicato con il simbolo:

(23) $C = A \times B$

che viene letto abitualmente "A cartesiano B". Indicando con a un elemento di A e con b un elemento di B, l'insieme C è costituito da tutte le coppie di elementi (a, b) costruite accoppiando in tutti i modi possibili un elemento di A ed uno di B. La coppia (a, b) viene detta *ordinata*, perché in essa si distingue qual è il primo e quale il secondo elemento; anche in questo caso, come in altri numerosi che abbiamo già incontrato, si usa lo stesso vocabolo per indicare l'operazione logica che conduce alla costruzione dell'insieme C e il risultato dell'operazione stessa.

Da ciò che abbiamo detto poco sopra si inferisce che l'operazione che conduce alla costruzione del prodotto cartesiano di due insiemi non è commutativa, e quindi il suo risultato dipende dall'ordine nel quale i due insiemi sono considerati. Tuttavia il numero cardinale che corrisponde agli elementi dell'insieme C si ottiene moltiplicando tra loro i numeri che corrispondono agli elementi degli insiemi A e B. In quest'ordine di idee abbiamo già preso in considerazione il prodotto cartesiano di due insiemi nel paragrafo 15 del Cap. II.

Inoltre il termine "prodotto cartesiano", e soprattutto l'aggettivo che lo qualifica, hanno la loro origine nelle convenzioni di geometria analitica che portano alla costruzione di un riferimento cartesiano nel piano (come abbiamo già detto nel paragrafo 10 del Cap. III), convenzioni che conducono a rappresentare i punti del piano stesso con coppie ordinate (x, y) di numeri.

12 - Accanto al concetto intuitivo di insieme, che abbiamo considerato finora, viene preso in considerazione il concetto di "elemento di un dato insieme". Tale concetto sarà da noi considerato pure intuitivo, e pertanto ci limiteremo a presentare alcuni esempi di applicazione dei termini relativi, senza definire rigorosamente il loro significato. Per esempio diremo che "il numero 3 è un elemento dell'insieme dei numeri naturali", oppure che "Giulio Cesare è un elemento dell'insieme dei personaggi storici", oppure che "Giuseppe Garibaldi è un eroe della Patria", cioè è un elemento di un certo insieme di uomini che noi designiamo come "eroi della Patria". Indicato con A un insieme, e supponendo che x sia il nome di un suo elemento, si usa scrivere :

(24) $x \in A$

leggendo "x è un (elemento dell'insieme) A" per indicare il fatto che appunto l'oggetto di nome x appartiene all'insieme A.

Notiamo che si può vedere la (24) come una affermazione simbolizzata, e quindi come una particolare proposizione, cioè come un caso particolare di un discorso elementare del quale si sa dire se è vero oppure falso. Così per esempio, indicando con D l'insieme dei numeri naturali dispari, la formula:

(25) $4 \in D$

indica una proposizione falsa, mentre è vera la proposizione simbolizzata da:

(26) $11 \in D$.

Siamo quindi giunti ad ampliare il nostro discorso, perché siamo passati dalla considerazione del concetto di insieme a quella del concetto di proposizione (o enunciato), cioè di un discorso che afferma o nega qualche cosa, ed al quale noi attribuiamo abitualmente la qualità di "verità" o di "falsità". Accettiamo anche in questo caso questi due termini dal linguaggio comune, e presumiamo che il loro significato sia chiaro e noto: infatti, se volessimo approfondire le questioni inerenti alla verità o alla falsità dovremmo addentrarci in analisi ed in discussioni che possono avere anche un carattere filosofico, e quindi non rientrano nel nostro attuale lavoro.

13 - È possibile operare sulle proposizioni con simbolizzazioni convenzionali e con regole di calcolo analoghe a quelle che abbiamo considerato a proposito degli insiemi. Nel seguito daremo qualche esempio di queste idee e delle procedure corrispondenti; ciò permetterà di ampliare l'immagine abituale della matematica, e soprattutto ci potrà confermare nell'idea che l'oggetto di questa scienza non è costituito soltanto dai numeri e dalle grandezze misurabili, ma può essere molto esteso al di là di quello che era una volta considerato il suo campo tradizionale. Ci occuperemo qui di questioni riguardanti la logica, studiata con un simbolismo apposito; questo permetterà di rappresentare convenzionalmente le proposizioni e di operare su di esse, in modo da trasformare in calcolo la procedura ordinaria che viene chiamata "ragionamento deduttivo", o anche semplicemente *deduzione*.

Si conoscono oggi molti sistemi di notazioni simboliche per la logica; queste dottrine e i relativi sistemi simbolici hanno avuto la loro origine verso la seconda metà dell'Ottocento, in occasione degli studi sui fondamenti della matematica e della geometria. La logica matematica si è poi sviluppata in modo imponente nel nostro secolo, e costituisce ormai un ramo importante di tutta la matematica.

Noi qui daremo soltanto alcune idee di questa dottrina, e adotteremo le notazioni convenzionali che sono state inventate dal grande matematico tedesco David Hilbert, il quale si è occupato attivamente anche di questi argomenti. Vale tuttavia la pena di ricordare che oggi vengono usate anche altre convenzioni di notazione, tra le quali ricordiamo quelle inventate dal matematico italiano G. Peano, e adottate poi anche dal logico e filosofo Bertrand Russel. L'esistenza di diversi sistemi di notazione mi sembra un tipico esempio del fatto che abbiamo incontrato più volte nelle pagine precedenti; in quelle occasioni ho rilevato esplicitamente che uno dei caratteri fondamentali del pensiero matematico è quello di essere un pensiero simbolizzato, e che le convenzioni dei simbolismi possono presentare ad alcune menti delle difficoltà che sono distinte dalla difficoltà di astrazione o, in generale, di ragionamento logico rigoroso.

Di qui innanzi indicheremo con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino, come A, B, C,… non più degli insiemi, come abbiamo fatto finora, ma delle proposizioni; accettiamo dal linguaggio comune il significato del termine *proposizione*, e ci limitiamo a darne una descrizione, che non vuole essere una definizione rigorosa. Tale descrizione potrebbe essere data dicendo che chiamiamo proposizione un discorso compiuto costituito, secondo la sintassi classica, da un termine chiamato "soggetto", da una copula verbale, e da uno o più predicati. Così per esempio la successione di parole: "Roma è la capitale dell'Italia", sarà da noi considerata una proposizione, nella quale "Roma" è il soggetto, "è" è la copula verbale e le parole "capitale dell'Italia" sono il predicato.

Nell'atteggiamento che assumeremo qui, rinunceremo a distinguere in una proposizione il soggetto, la copula verbale e il predicato, ma porteremo la nostra attenzione soltanto sul fatto che la proposizione sia vera oppure falsa. Esprimeremo questo fatto dicendo che ci occuperemo soltanto di "proposizioni non analizzate"; e il fatto che la proposizione sia vera oppure falsa sarà indicato come *valore di verità* della proposizione considerata.

Vi sono varie convenzioni per indicare il valore di verità di una proposizione: alcuni autori scrivono semplicemente "V" oppure "F" per indicare il vero oppure il falso. Gli autori anglosassoni scrivono "T" (iniziale della parola "true", che significa "vero") ed "F", e sono copiati anche da autori italiani. Noi adotteremo le scritture convenzionali "1" e "0" per indicare rispettivamente il vero e il falso. I simboli "1" e "0" possono anche essere considerati dei numeri, il che permetterebbe anche di eseguire dei calcoli nel senso aritmetico del termine, qualora si stabilissero delle opportune convenzioni.

Se indichiamo con lettere maiuscole dell'alfabeto latino le proposizioni, converremo di indicare con le corrispondenti lettere minuscole i rispettivi valori di verità; così per esempio, se con A indichiamo una data proposizione, scrivendo

(27) $A = 1$ oppure $A = 0$

indicheremo che la proposizione A è vera, oppure rispettivamente falsa.

14 - Date che siano certe proposizioni elementari, che indicheremo per esempio con i simboli P, Q, R,…., è possibile costruirne altre, con certe procedure logiche di cui diremo subito, e che sono simbolizzate con opportune convenzioni.

La prima procedura che si prende in considerazione è l'operazione logica di negazione di una data proposizione. Data una proposizione P, indicheremo con il simbolo:

(28) $$\neg P$$

da leggersi "non P", la proposizione che è falsa quando P è vera e che è vera quando P è falsa.

Date due proposizioni che indicheremo con P e Q, è possibile costruirne una terza, che verrà detta *composta* dalle due; quest'operazione logica viene indicata interponendo dei simboli convenzionali appositi, tra i simboli delle due proposizioni elementari, che vengono chiamate "componenti"; i simboli vengono chiamati *connettivi*.

Quando si tenga conto soltanto del valore di verità delle due proposizioni componenti e della proposizione composta, si possono costruire 16 proposizioni diverse. I connettivi che sono abitualmente usati nella logica simbolica sono i seguenti.

I - Connettivo "vel" (inglese "or"). La proposizione composta con questo connettivo si indica con il simbolo:

(29) $P \vee Q$,

leggendo "P vel Q" o anche "P oppure Q". La proposizione (28) viene anche chiamata *alternativa* ed è falsa nel solo caso in cui siano false entrambe, la P e la Q; in tutti gli altri tre casi è vera.

Vale la pena di osservare che la (29) traduce simbolicamente le frasi del linguaggio comune che constano di una coppia di proposizioni congiunte da una congiunzione "o", senza valore esclusivo, come abbiamo già osservato sopra, nel paragrafo 5. Ciò avviene per esempio quando diciamo a un bambino: "Comprati caramelle o cioccolatini", senza proibire che compri dolciumi di entrambe le specie.

II - Connettivo "et" (inglese "and"). La proposizione composta con questo connettivo viene indicata col simbolo:

(30) $P \wedge Q$,

leggendo "P et Q" od anche "P e Q". La proposizione (30) viene anche chiamata *congiunzione* delle due P e Q, ed è vera nel solo caso in cui siano vere entrambe, e falsa negli altri tre casi.

III - Connettivo "freccia". La proposizione composta con questo connettivo viene indicata con il simbolo:

(31) $P \rightarrow Q$;

la proposizione (31) è falsa nel solo caso in cui sia vera P e falsa Q, ed è vera negli altri tre casi. Il simbolo viene letto in vari modi, il che può dare luogo a equivoci e ad incertezze; tra le varie convenzioni di lettura vi sono le seguenti: "se P allora Q", "P implica Q". Questi modi di lettura inducono spesso alla falsa opinione che il simbolo (31) rappresenti il legame logico tra una ipotesi (rappresentata dalla proposizione P) e una conseguenza che se ne deduce (la proposizione Q). Questo modo di pensare conduce a equivoci e a confusioni, perché, nell'ambito della teoria delle proposizioni non analizzate, ciò che interessa è soltanto il valore di verità di una proposizione, valore che è dato dalla convenzione esposta sopra. Per queste ragioni è forse meglio leggere la (31) con la frase "P freccia Q".

IV - Connettivo "doppia freccia". La proposizione composta con questo connettivo viene indicata con il simbolo:

(32) $P \leftrightarrow Q$;

essa è vera nel solo caso in cui P e Q siano entrambe vere oppure entrambe false, ed è falsa negli altri due casi. Anche il simbolo (32) viene letto in vari modi, che spesso inducono in equivoci; tra le convenzioni di lettura vi è la seguente: "P è equivalente a Q"; anche in questo caso il modo di leggere la formula (32) potrebbe ingenerare l'opinione falsa che le proposizioni P e Q siano l'una condizione necessaria e sufficiente per l'altra, cioè che dalla verità di una qualunque di esse si potesse dedurre la verità dell'altra. Pertanto è forse meglio leggere la (32) con la frase: "P doppia freccia Q".

Come è stato detto sopra, si potrebbero definire altri connettivi, che permettono di costruire proposizioni composte da due, ma ci limitiamo a dare qui sotto una tabella riassuntiva dei valori di verità delle proposizioni composte che abbiamo preso in considerazione finora, e che sono più frequentemente usate:

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

15 - Con i connettivi che abbiamo presentato si possono costruire delle proposizioni composte da un numero quale si voglia di proposizioni elementari componenti; le definizioni dei connettivi permettono di determinare in ogni caso i valori di verità delle proposizioni composte in funzione dei valori di verità di quelle che le compongono. Per la scrittura e la lettura delle formule che denotano le proposizioni composte sono state date delle regole di gerarchia tra i connettivi, che qui non riportiamo; in ogni caso, per la scrittura e la lettura delle formule si usano parentesi, il cui impiego è retto dalle regole che abbiamo già esposto e commentato al Cap. II.

Per esempio, la proposizione esclusiva, che in latino veniva espressa con le congiunzioni "aut...aut", e che presenta due alternative l'una delle quali esclude l'altra (per esempio: " Portatemi Tizio, o vivo o morto"), viene espressa con la formula:

(33) $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$,

oppure con la formula:

(34) $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.

Si verifica, in base alla tabella dei valori di verità delle proposizioni composte, che la (33) oppure la (34) rappresentano delle proposizioni che sono vere nel solo caso in cui una delle due, P oppure Q, sia vera e l'altra sia falsa.

Hanno particolare importanza certe proposizioni composte che hanno valore di verità uguale a 1 (cioè sono vere) quali che siano i valori di verità delle proposizioni che le compongono; tali proposizioni vengono chiamate "tautologie", con termine che viene dal greco. Esempi di tautologie, secondo la definizione che ne abbiamo dato, sono le seguenti proposizioni:

(35) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$,

$(P \rightarrow Q) \rightarrow [(R \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow Q)]$.

16 - Abbiamo visto finora delle proposizioni non analizzate, che hanno un determinato valore di verità; con un passo ulteriore si possono prendere in considerazione delle proposizioni incomplete, che vengono dette *forme proposizionali aperte*; tale è per esempio la frase: "....è figlio di Noè".

Spesso, in una frase cosiffatta, al posto dei puntini che denotano una lacuna, si scrive una lettera indeterminata, per esempio la "x", che in matematica indica tradizionalmente una incognita, cioè un numero che non si conosce; con queste notazioni la frase precedente potrebbe essere scritta nella forma " x è figlio di Noè". Naturalmente questa frase non è né vera né falsa; lo può diventare se al posto di x, lettera indeterminata, si pone il nome di un essere umano; nella fattispecie, la frase diventa vera se al posto di x si pone Sem, oppure Cam, oppure Jafet; diventa falsa se al posto di x si pone il nome di un altro qualunque essere umano.

In generale, dato un universo Ω, si suole indicare con un simbolo del tipo di $P(x)$ un predicato, cioè una qualità, una proprietà che può convenire a un elemento x di Ω; pertanto $P(x)$ può essere considerata una frase aperta, cioè una proposizione incompleta, che può diventare completa e quindi vera oppure falsa, se si pone il nome di un elemento di Ω al posto di x.

Abbiamo visto che, dato un predicato $P(x)$ competente agli elementi di un insieme Ω, si ottiene una proposizione ponendo al posto di x il nome di un elemento di Ω; si può tuttavia ottenere una frase completa anche ponendo prima del predicato un termine che viene chiamato *quantificatore*. Presenteremo qui due soli tipi di quantificatori:

I) Il quantificatore detto *universale:*

(36) $\forall\, x\, [P(x)]$

che si legge: "per tutti gli x (di Ω), è vera $P(x)$", il che significa ovviamente che la proprietà espressa dal predicato P compete a tutti gli elementi di Ω. Sia per esempio Ω l'insieme degli uccelli, e sia $P(x)$ la frase: "x ha le ali". Allora in questo caso la (36) è vera, perché ogni uccello ha le ali anche se esistono anche altri esseri, che non sono uccelli, e che sono alati.

II) Il quantificatore detto *esistenziale*:

(37) $\exists\, x\, [P(x)]$

che si legge: "esistono degli x (ovviamente di Ω), che hanno la proprietà espressa dal predicato P"; ovvero, in altre parole, per almeno un x di Ω la (37) è vera. Sia per esempio Ω l'insieme dei numeri naturali, e sia $P(x)$ la frase "x è pari"; allora la (37) è ovviamente vera, perché esistono dei numeri naturali (di fatto sono infiniti) che sono pari.

17 - Sia Ω un insieme determinato, e sia $P(x)$ un predicato. Possiamo prendere in considerazione l'insieme A degli elementi x di Ω per i quali $P(x)$ è vera. Tale insieme A viene indicato spesso con il simbolo:

(38) $A = \{x\,|P(x)\}$,

da leggersi: "A è l'insieme degli elementi x tali che $P(x)$ sia vera".

Sia per esempio Ω l'insieme degli esseri umani e sia $P(x)$ la frase: "x è maggiorenne"; allora l'insieme A, indicato dalla (38), è l'insieme di tutti gli esseri umani per cui la frase è vera, cioè, brevemente, l'insieme di tutti i maggiorenni.

Se la proprietà P non è posseduta da alcun elemento di Ω, l'insieme A indicato dalla (38) è ovviamente l'insieme vuoto $\emptyset$. In ogni caso l'insieme A è un sottoinsieme di Ω.

18 - La simbolizzazione delle proposizioni e dei loro legami può essere completata con regole che costituiscono una sintassi, cioè un insieme di procedure per costruire sempre nuove proposizioni vere, a partire da alcune proposizioni di partenza. Si otterrebbe così il risultato di tradurre con operazioni simboliche i ragionamenti deduttivi che stanno alla base di ogni costruzione scientifica e in generale di ogni comportamento razionale e coerente. Questi sistemi di deduzione hanno avuto la loro origine negli studi riguardanti i fondamenti della matematica e della geometria, che sono iniziati nella seconda metà del secolo XIX.

L'impiego di questi mezzi concettuali ha permesso di porre su nuove e sicure basi anche le ricerche riguardanti le procedure elementari della nostra mente; naturalmente con queste strutture veniva data la risposta a problemi discussi da secoli, ma venivano pure aperte delle nuove questioni, riguardanti la validità e la portata di questi metodi. Noi non ci interessiamo qui di questi problemi, ma non possiamo evitare di osservare che tali ricerche non debbono rimanere nell'ambito della matematica superiore ed astratta, ma possono estendere la loro influenza anche nell'ambito della matematica elementare e del suo insegnamento, perché esse hanno messo in evidenza i procedimenti fondamentali con cui la nostra mente costruisce i concetti e le deduzioni. Ciò può servire a dare all'insegnamento quel carattere di essenzialità di cui abbiamo detto tante volte, soprattutto in relazione all'opera di eventuale ricupero ed aiuto ai soggetti meno dotati.

19 - La simbolizzazione della logica è uno degli ultimi passi compiuti dal pensiero matematico nel suo sviluppo. Si può tuttavia osservare che in ogni periodo della sua Storia la matematica ha utilizzato il ragionamento, soprattutto il ragionamento deduttivo, per raggiungere i propri scopi. Ciò è evidente nel caso della dimostrazione dei teoremi: questa infatti è una tipica operazione di deduzione, la quale, partendo da certe ipotesi, ci fa giungere ad ammettere con certezza la verità di certe conclusioni.

Ma anche nella risoluzione dei problemi matematici la deduzione ha un posto molto importante: ciò era già stato osservato dai filosofi dell'antica Grecia, i quali avevano codificato i due procedimenti razionali, che avevano chiamato di *analisi* e di *sintesi*, che conducono alla dimostrazione dei teoremi ed alla soluzione dei problemi. In particolare il procedimento di analisi, applicato alla soluzione dei problemi, conduce a dedurre dai dati di un problema le conseguenze necessarie, per mezzo del ragionamento logico, trasformando così il problema dato in un altro che è sua conseguenza, fino a che si giunge a un problema del quale si sa dare la soluzione.

Questa può essere soluzione anche del problema di partenza; per garantire questo fatto occorre applicare il procedimento che viene chiamato di "sintesi". Con questo si parte dalla soluzione raggiunta, presa ora come ipotesi, e si fanno a ritroso i ragionamenti che costituiscono la procedura di analisi fino a dimostrare che la soluzione dell'ultimo problema è anche soluzione del problema dato.

Nel caso della geometria il problema consiste spesso nel trovare o costruire una figura che soddisfa a determinate condizioni; in questo caso l'applicazione del procedimento di analisi richiede spesso che si immagini esistente la figura che si cerca o che si vuole costruire, e che si deducano da questa figura, supposta esistente, le conseguenze necessarie fino a trovare la strada per costruire la soluzione.

Occorre quindi l'opera della fantasia, ma, anche in presenza di questa, il ragionamento deduttivo non è eliminabile dalla procedura di soluzione, quando si voglia che essa sia rigorosa.

"Though this be madness,
"yet there is method in it".

(W.Shakespeare. Hamlet. Act II

A. Mazzotta.

NdR

Files rieditati, Maggio 2018.

Per un approfondimento sugli argomenti presentati nelle pagine precedenti, on line nel Sito www.carlofelicemanara.it

si potrebbero consultare anche i seguenti saggi:

CFM. *Numeri cardinali finiti e transfiniti*. Ist. Mat. Univ. Milano, (1967). Dattiloscritto rieditato, pp. 1-12.

CFM. *Un esperimento didattico: l'insegnamento della Matematica nei centri ANCIFAP*. Pedagogia e vita, giugno-luglio 1975, pp. 513-541.

CFM. *Grandezze e misure I*. Didattica delle scienze, 72 (1977), 6-10; *Grandezze e misure II*. Didattica delle scienze, 73 (1978), 14-16.

CFM. *Appunti di logica elementare*. ISU Università Cattolica, Milano, 1983.

CFM. *Grandezze, misure, proporzionalità*. Dip. Mat. Univ. Milano, Quaderno 30, 1993.

CFM. *Note di lavoro didattico*. Inedito, 1993.

CFM. *Proposte per un itinerario didattico*. Inedito, 1994.

CFM. e Raffaella Manara Tardini. "*La formazione matematica degli studenti: i problemi dell'apprendimento*". Dispense per il corso di perfezionamento in Didattica della Matematica, UCSC, Brescia, 1996-97.

CFM. *Sull'Angolo*. Inedito, 1997

CFM. *Difficoltà: sostegno e recupero*. *Pubblicato* in L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 26 (2003), 243-254.

Maria Angela Manara. *Esperienze di recupero*

Educare alla razionalità.

Recupero alla logica ed al ragionamento.

Adriana Davoli. Un impegno che continua. In sito www.carlofelicemanara.it

Molto materiale per l'insegnamento si trova nelle sezioni del Sito:

DIVULGAZIONE -> Collaborazioni a Riviste e Associazioni per l'insegnamento

DIDATTICA -> Insegnamento in situazione di difficoltà