L'ANGOLO DEI PROBLEMI
DEL
CENTRO RICERCHE DIDATTICHE
UGO MORIN
ED I QUESITI DEL DR. DUBIU

A cura di:

G.Artico
S.Rossetto
C.Sitia

Problemi 2000 - Dr Dubius 2000
Soluzioni problemi agosto 1999

PROBLEMI DEL 2000

001.- Sia C una curva convessa chiusa che possiede due corde principali, tali che ogni altra corda parallela a una delle corde principali è bisecata dall'altra corda principale. Due corde parallele ciascuna alle corde principali dividono l'interno di C in quattro parti. Dimostrare che almeno due di queste parti hanno area non maggiore di un quarto dell'area totale.

002.- Trovare tutte le soluzioni intere positive (x,n) dell'equazione.

$$x^3 + 8 = 3^n .$$

003.- Sia C un punto sul segmento AB con |AC| = a > 0 e |CB| = b> 0. Sia r una semiretta con origine in B, facente un angolo θ con AB, 0 < θ < π. Dimostrare che esiste un punto P su r che rende massimo l'angolo APC e dimostrare che la distanza |BP| è indipendente dalla scelta di θ.

004.- Mostrare che $3^{6n} - 2^{6n}$ è divisibile per 35 qualsiasi sia n naturale.

005.- Provare che $n^2 + 3n + 5$ non è mai divisibile per 121 qualsiasi sia n naturale.

006.- Sia f(x) un polinomio di grado 48 tale che risulti f(x)=1/x per x=1,2,3,4,5,..,48,49 . Quanto vale f(50) ?

DR. DUBIUS

1.2000.- Vorrei conoscere il contesto e la dimostrazione dell'identità di Liouville:

$$\sum_{0<k<\sqrt{x}} \left[\sqrt{x-k^2}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{x}{2k+1}\right]$$

2.2000.- La struttura algebrica denominata in francese CORPS, in tedesco KÖRPER, in italiano CORPO, in inglese viene detta FIELD (campo) se non erro. Da dove viene questa differenza di denominazione? Vi è un legame tra il corpo umano e la struttura di corpo? In generale io sono interessato alle relazioni esistenti tra il corpo umano e la matematica (gradirei indicazioni di articoli, libri)

3.2000.- Non mi riesce di dimostrare la congettura seguente:

In **N***, l'equazione diofantea nelle incognite x, y, z:

$$n = xy + yz + zx$$

possiede almeno una soluzione, eccetto per

$n = \{1,2,4,6,10,18,22,30,42,58,70,78,102,130,190,210,330, 462\}$.

Per $k \geq 1$ e $n = 2k + 1$, si ha la soluzione $(1,1,k)$

Per $k \geq 1$ e $n = 3k + 2$, si ha la soluzione $(1,2,k)$, ecc.

Ciò che precede prova che gli interi n per i quali $n = xy+yz+zx$ non ha soluzione sono necessariamente tra 1,2 o gli interi della forma $6k$ o $6k + 4$, ma non riesco a saperne di più. Ho anche verificato sul computer fino a n = 200 000.

4.2000.- Esiste un numero tetraedrico $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ eguale a un numero piramidale $\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$?

Problema 99.04 – Agosto 1999

Occorre calcolare $S=\sum_2^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{\pi}{4}+\sum_3^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{k}}$ (1)

oppure $S=\sum_1^{n-1} \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{\pi}{4}+\sum_2^n \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}}$ (2)

Partiamo dalle disuguaglianze $\arcsin x > x \qquad \mathrm{arctg}\, x < x$ (3)

valide entrambe per 0<x<1. Da (1) e (3) risulta $S>\frac{\pi}{4}+\sum_3^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ (4)

mentre da (2) e (3) risulta $S<\frac{\pi}{4}+\sum_2^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (5)

Facciamo ora uso di $2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)<\frac{1}{\sqrt{k}}<2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$

per minorare la somma in (4) e maggiorare quella in (5):

$$S>\frac{\pi}{4}+2\sum_3^n\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\frac{\pi}{4}+2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{3}\right)$$

$$S<\frac{\pi}{4}+2\sum_2^{n-1}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)=\frac{\pi}{4}+2\left(\sqrt{n-1}-1\right)$$

Il numero richiesto di giri è $N=S/2\pi$ e si ha:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{\pi}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{3}\right)<N<\frac{1}{8}+\frac{1}{\pi}\left(\sqrt{n-1}-1\right)$$

Per n=10^9 si trova : 10065,41<N<10065,65 e la risposta è:

10065 giri e una frazione non lontana da mezzo giro.

[*Prof. Elio Fabri –Università Pisa*]

Arrivati a $\sqrt{10^9}$ si tratta di calcolare la somma $\sum_{k=1}^{10^9-1} arctg\frac{1}{\sqrt{k}}$, che poniamo uguale a S, e dividerla per 2π. Si può osservare che la corrispondente funzione $f(x)=arctg\frac{1}{\sqrt{x}}$ è strettamente decrescente per x>0 per cui si ha

$$\int_1^{10^9} arctg\frac{1}{\sqrt{x}}dx < S \quad e \quad \int_1^{10^9} arctg\frac{1}{\sqrt{x}}dx > \sum_{k=2}^{10^9} arctg\frac{1}{\sqrt{k}} \ .$$

Poiché è $\sum_{k=2}^{10^9} arctg\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{10^9-1} arctg\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{\pi}{4} + arctg\frac{1}{\sqrt{10^9}}$ si può scrivere, posto

I= $\int_1^{10^9} arctg\frac{1}{\sqrt{x}}dx$, I<S e I>S+ $\frac{\pi}{4} - arctg\frac{1}{\sqrt{10^9}}$ da cui I<S<S+ $\frac{\pi}{4} - arctg\frac{1}{\sqrt{10^9}}$.

Integrando per parti e per sostituzione, si ottiene

I= $\left[x\, arctg\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - arctg\sqrt{x} \right]_1^{10^9} \approx 63242{,}98$ da cui 63242<S<63244 e

dividendo per 2π si ottiene 10065,2<S/2π<10065,6. Quindi si saranno percorsi 10065 giri.

[*Antonina Latini – Milano*]
Soluzione analoga è pervenuta dal *prof. Nicolò Blunda* di Sabbioneta (MN)
Altra soluzione dal *prof. Spartaco Spadon* – Rovigo

Problema 99.06 – Agosto 1999

Premessa:
si evince che

a) con la scittura N=ab sia da intendersi che il numero N è scritto in base 10 e che a e b sono due cifre di questo tipo di numerazione, e che N'=ba ha significato anche se b=0, come del resto si usa anche nelle notazioni informatiche (chiaro che il problema perde significato se a e b sono nulli).
b) Con la scrittura S(N) si intende la somma delle cifre del numero N espresso in base 10.

Soluzione:
Dalla definizione di quoziente intero di due numeri naturali, se (a+b) è divisore di N si ha 10a+b=C_N (a+b) mentre 10b+a=$C_{N'}$ (a+b)+r , con r resto della divisione di N' per (a+b) e quindi r<a+b .
Sommando membro a membro le uguaglianze precedenti e raccogliendo a fattor comune, si arriva a

$$11\,(a+b)=(C_N+C_{N'})(a+b)+r$$

e, dividendo per a+b, diverso da zero,

$$11= C_N+ C_{N'}+r/(a+b) \qquad (1)$$

Poiché C_N, $C_{N'}$, a , b , r sono numeri naturali, dalla (1) risulta che r deve essere multiplo di (a+b) o nullo. Quindi, ricordando la disuguaglianza r<a+b , si ha r=0. Pertanto l'asserto C_N+ $C_{N'}$=11 .

Se a+b non è divisore di N, sempre dalla definizione di quoziente intero, si ha

$$10a+b=C_N\,(a+b)+r \quad e \quad 10b+a=C_{N'}\,(a+b)+r' \qquad (2)$$

con r e r' resti delle due divisioni. Quindi:

$$0<r<a+b\ ,\ 0<r'<a+b\ ,\ 0<r+r'<2(a+b) \qquad (3)$$

Sommando membro a membro le (2) e raccogliendo a fattor comune, consegue

$$11\,(a+b) - (\,C_N + C_{N'})\,(a+b)=r+r' \qquad (4)$$

e per la (3) $\quad 0<11\,(a+b) - (\,C_N + C_{N'})\,(a+b)<2(a+b)$,

da cui, dividendo per (a+b) diverso da zero, risulta

$$0<11-(\,C_N+C_{N'}) < 2$$

e poiché C_N, $C_{N'}$ sono umeri interi, risulta 11– (C_N+ $C_{N'}$)=1 e quindi

$$C_N+C_{N'}=10$$

Osservazione: con procedimento analogo si dimostra che la proprietà ora provata è vera per ogni numero scritto in base n , numero naturale maggiore di 1.
[n.d.r. *segue dimostrazione*, *analoga alla precedente*]

[*Spartaco Spadon – Rovigo*]
Analoga dimostrazione ha inviato *Antonina Latini* – Milano

Problema 99.05 – Agosto 1999

Supposto che f e g siano due funzioni di variabile reale a valori reali tali che per $x_0, x \in A \subseteq \Re$, con x_0 dato, risulti $0 < f(x_0) \le f(x) \le g(x_0) \le g(x)$, e che sia λ≥0 si ha

$$\frac{f(x)}{g(x_0)} = \frac{f(x)(1+\lambda)}{g(x_0)(1+\lambda)} = \frac{f(x)+\lambda f(x)}{g(x_0)+\lambda g(x_0)} \le \frac{f(x)+\lambda g(x)}{f(x_0)+\lambda g(x_0)}$$

poiché è $f(x)+\lambda f(x) \le f(x)+\lambda g(x)$ e $g(x_0)+\lambda g(x_0) \ge f(x_0)+\lambda g(x_0)$
Inoltre risulta

$$\frac{f(x)+\lambda g(x)}{f(x_0)+\lambda g(x_0)} \le \frac{g(x)+\lambda g(x)}{f(x_0)+\lambda f(x_0)}$$

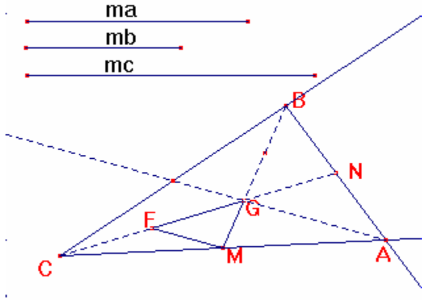
essendo $f(x)+\lambda g(x) \le g(x)+\lambda g(x)$ e $f(x_0)+\lambda g(x_0) \ge f(x_0)+\lambda f(x_0)$
quindi risulta

$$\frac{f(x)}{g(x_0)} \le \frac{f(x)+\lambda g(x)}{f(x_0)+\lambda g(x_0)} \le \frac{g(x)(1+\lambda)}{f(x_0)(1+\lambda)} = \frac{g(x)}{f(x_0)}$$

[*Antonina Latini - Milano*]

Problema 99.07 – Agosto 1999

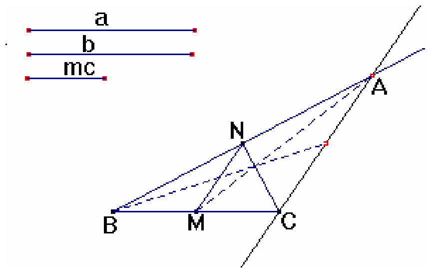
Siano date le misure m_a, m_b, m_c delle mediane del triangolo. Si costruisce il triangolo MGF che ha FM=1/3 m_a , MG=1/3 m_b , e GF=1/3 m_c ; poi si prolunga GF di due segmenti , FC=GF e GN=GF, e MG di un segmento GB=2 GM. Il triangolo cercato è quello di vertici B, C, e A , punto di intersezione delle rette BN e CM. Infatti dall'omotetia $\omega_{G,-1/2}$ si ha che MN è paralleo a BC e congruente alla sua metà, per cui M ed N sono i punti medi dei lati AC e AB e per costruzione è CN=m_c e BM=m_b. La terza mediana, i cui 2/3 sono AG, è lunga m_a perché , per l'omotetia $\omega_{C,2}$ si ha AG=2 FM=2/3 m_a.



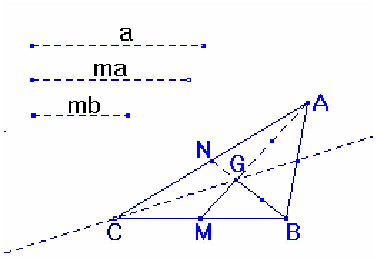
Perché la costruzione sia possibile deve essere possibile costruire il triangolo MGF, cioè se m_c è la misura maggiore deve essere $m_c<m_a+m_b$, o, più in generale, $|m_a-m_b|<m_c<m_a+m_b$.

Siano date le misure a e b di due lati e quella m_a della mediana relativa al primo lato. Si costruisce il triangolo AMC che ha AC=b, AM=m_a e CM=a/2. Si prolunga CM di un segmento MB=CM e si unisce B con A. Il triangolo ABC è quello richiesto. La costruzione è possibile se è possibile costruire il triangolo AMC, cioè se $|b-a/2|<m_a<b+a/2$.

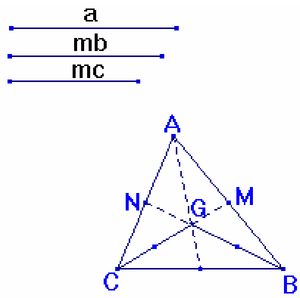
Siano date le misure a e b di due lati e quella della mediana m_c relativa al terzo lato. Si costruisce il triangolo CNM che ha CN=m_c, NM=b/2, e MC=a/2. Si prolunga CM di un segmento MB=MC, da C si conduce la parallela a MN che interseca in A la retta BN: il triangolo ABC è quello richiesto. Infatti ha BC=a, CN mediana perché per il teorema di Talete N è punto medio di AB e AC=2MN=b. La costruzione è possibile se è possibile costruire il triangolo MNC, cioè se $|(a-b)/2|<mc<(a+b)/2$.



Siano date le misure a e m_a di un lato e della mediana ad esso relativa e quella di un'altra mediana m_b. Si costruisce il triangolo MBG che ha MB= a/2 , BG=2/3m_b, MG=m_a/3. Si prolunga MG di un segmento GA=2MG e GB di un segmento GN=1/2 GB , perciò è BN=m_b e AM=m_a. Se C è il punto di incontro delle rette BM e AN, il triangolo ABC è quello richiesto. Infatti, dall'omotetia $\omega_{G,-1/2}$, MN è parallelo ad AB e congruente alla sua metà per cui N ed M sono i punti medi dei lati BC, che misura a, e AC. La costruzione è possibile se è possibile costruire il triangolo GMB, cioè se $|2/3\ m_b - 1/3\ m_a| < a/2 < 2/3\ m_b + 1/3\ m_a$.



Siano date le misure a di un lato e di due mediane relative agli altri due lati, m_b e m_c. Si costruisce il triangolo GBC che ha BC=a, GC=2/3 m_c e GB=2/3 m_b. Si prolunga BG di un segmento GN=1/2 BG e CG di un segmento GM=1/2 CG. Il triangolo che ha per vertici B,C e A, punto d'incontro delle rette CN e BM, è quello cercato. Infatti dall'omotetia $\omega_{G,-1/2}$ si ha che MN è paralleo a BC e congruente alla sua metà, per cui M ed N sono i punti medi dei lati AB e AC e per costruzione è $CM=m_c$ e $BN=m_b$. La costruzione è possibile se è possibile quella del triangolo GCB, cioè se $2/3\ |m_c - m_b| < a < 2/3\ (m_c + m_b)$



[*Antonina Latini – Milano*]
Altra soluzione dal prof. *Spartaco Spadon* – Rovigo

Quesito n. 99.02 del dr Dubius.

"Gli isolanti sono caratterizzati da un'elevata costante dielettrica. L'acqua che ha una costante dielettrica piu' elevata della maggior parte degli isolanti non dovrebbe anch'essa essere un isolante? Perche' invece e' conduttrice? Come si puo' spiegare questa apparente anomalia?"

1. Non e' vero che tutti gli isolanti abbiano costante dielettrica elevata. Ad es. due plastiche comuni, polietilene e teflon, hanno c.d. relativa poco superiore a 2. La c.d. e' elevata se le molecole sono polari, ossia dotate di momento di dipolo proprio, come e' il caso dell'acqua.

2. Non c'e' una relazione immediata fra valore della c.d. e l'essere o no conduttore. Per i solidi la conducibilità' dipende dalla struttura e dall'occupazione delle bande: i metalli hanno bande non completamente occupate, quindi sono buoni conduttori; i semiconduttori hanno la banda di valenza piena, ma la banda di conduzione relativamente vicina, per cui e' possibile una certa eccitazione termica. Ad es. nel 4^ gruppo (C Si Ge Sn Pb) il carbonio (diamante) e' isolante, perche' il "gap" fra le bande di valenza e di conduzione e' di circa 6 eV; il silicio e' semiconduttore, con conducibilità' molto bassa a temperatura ambiente, avendo un gap di 1.1 eV; il Germanio e' un semiconduttore ... piu' conduttore (gap 0.7eV); lo stagno grigio, con un gap di soli 0.08 eV e' ... quasi un metallo; il piombo e' metallo a tutti gli effetti.

3. Passando all'acqua, notiamo anzitutto che in fase solida e' isolante. In fase liquida e' conduttore a causa della ionizzazione, che e' favorita dall'alta c.d. Infatti l'energia necessaria per separare le cariche e' inversamente proporzionale alla c.d. Per la stessa ragione, i sali sciolti in acqua si dissociano in ioni. Va detto che l'acqua non e' l'unico liquido con queste proprieta'. Ma per dire di piu' ci vorrebbe un chimico...--

Elio Fabri Dip. di Fisica - Univ. di Pisa
Sez. Astronomia e Astrofisica