Assisi. Bosco di San Francesco. Il simbolo del *Terzo paradiso*, visto dalla Rocca Maggiore

PROIETTIVA (appunti)

C.F.M.

Appunti di ripasso di geometria proiettiva, sviluppati secondo il cosiddetto "metodo di Poncelet", che conduce all'ampliamento dello spazio euclideo mediante introduzione degli elementi *impropri*, (*elementi all'infinito*), definiti in base alle solite convenzioni.

1 - OSSERVAZIONE 1 - Già la relazione segmentaria fondamentale sulla retta orientata:

$$(1)\ AB + BC + CA = 0$$

può essere introdotta con un linguaggio della geometria delle trasformazioni: per esempio dicendo che essa è *invariante* per il gruppo delle trasformazioni elementari della retta su se stessa. Tale gruppo, nel seguito, verrà anche chiamato *gruppo euclideo*, e le sue trasformazioni generatrici sono, come è noto, le traslazioni, le dilatazioni, le simmetrie speculari.

Istituendo sulla retta orientata un sistema di coordinate ascisse, la (1) assume la forma:

$$(2)\ (b - a) + (c - b) + (a - c) = 0$$

ed il gruppo delle trasformazioni risulta generato dalle operazioni elementari:

$$(3)\quad \begin{array}{ll} x' = x + h & (\textit{traslazioni}) \\ x' = k\,x & (\textit{dilatazioni}) \\ x' = -x & (\textit{simmetrie}). \end{array}$$

NOTA. Ovviamente la validità della (2) è fondata su quella della (1).

OSSERVAZIONE 2 - L'introduzione dell'orientamento sulla retta e delle convenzioni per rappresentare i segmenti orientati e le operazioni su di essi permette di raggruppare nella sola relazione (1) le 6 relazioni relative alla somma di segmenti, che si dovrebbero scrivere se questi fossero considerati soltanto in valore assoluto, in corrispondenza ai 6 casi che si possono presentare per la reciproca posizione di tre punti su di una retta. Si osserva inoltre che la relazione (1) conserva invariato il suo significato quando si operi una qualunque sostituzione sui simboli *A*, *B*, *C*. Siamo quindi di fronte ad una significativa estensione del concetto di simmetria, intesa come invarianza di fronte ad un certo gruppo di operazioni: qui l'invarianza si riferisce al significato della relazione, che non cambia in conseguenza del cambiamento della forma esteriore della relazione stessa, ed alle operazioni sui simboli che entrano in essa.

2 - Introduzione del rapporto semplice di tre punti e di birapporto di quattro punti su una punteggiata e loro proprietà formali. Invarianza dei valori rispetto al gruppo fondamentale euclideo.

È noto che, secondo le convenzioni di scrittura che si adottano per la retta orientata, un simbolo come *AB* indica un numero reale relativo, che dà la misura della lunghezza del segmento di estremi *A* e *B*; numero al quale viene attribuito il segno + oppure il segno – a seconda che il segmento, percorso da *A* verso *B* risulti oppure no percorso in verso concorde a quello scelto come positivo sulla retta. Con queste convenzioni si ha ovviamente, qualunque sia il punto *A*: $AA = 0$.
Da tali convenzioni, e dalla relazione fondamentale (1), ponendo nella (1) stessa $A = C$, si ottiene la legge:

$$(4)\ AB + BA = 0.$$

Con queste convenzioni si ottengono le note proprietà della funzione *rapporto semplice* di tre punti *A*, *B*, *C* sulla retta. Come è noto tale funzione è rappresentata convenzionalmente col simbolo (*ABC*) ed il suo valore è fornito dalla formula:

$$(ABC) = AC/BC.$$

Da questa formula si inferiscono le proprietà di invarianza della (1) rispetto al gruppo delle trasformazioni di cui si è detto nel paragrafo precedente. In più vale la pena di osservare che la funzione stessa dipende essenzialmente *dall'ordine* in cui sono enunciati (o scritti) nella formula (1) i simboli dei punti coinvolti.
Infatti, tenendo conto degli sviluppi del paragrafo precedente, in corrispondenza ai 6 possibili ordinamenti dei tre punti si ha che, posto $(ABC) = k$, si ottiene:

$$(BAC) = \frac{1}{k}\ ;\ (ACB) = 1 - k\ ;\ (BCA) = \frac{k-1}{k}\ ;\ (CBA) = \frac{k}{k-1}\ ;\ (CAB) = \frac{1}{1-k}\ .$$

OSSERVAZIONE. Si può osservare che sussiste un isomorfismo tra il gruppo totale delle 6 possibili permutazioni dei simboli *A*, *B*, *C* e certe operazioni sulla retta proiettiva, rappresentate da un classico gruppo moltiplicativo di matrici quadrate (2×2) ad elementi interi. Tale gruppo potrebbe essere presentato nel modo seguente.

Si considerino come elementi della retta proiettiva reale i vettori a due componenti del tipo:

$$(5)\ v = [x, y]$$

con le solite convenzioni: 1) che le due componenti *x*, *y* non siano in alcun caso entrambe nulle; 2) che siano considerati equivalenti due vettori le cui componenti di posto corrispondente si ottengano dall'un vettore all'altro per moltiplicazione di una medesima costante non nulla. In formule si avrà quindi:

$$(6)\ [x, y] \equiv [m\,x, m\,y]\ ;\quad m \neq 0.$$

Si verifica che il gruppo delle sostituzioni sui simboli *A*, *B*, *C* è isomorfo al gruppo delle operazioni sui vettori sopra introdotti, che si ottiene con operatori rappresentati da matrici (2×2) nel modo seguente. Indichiamo con i simboli α, β, I le matrici seguenti:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si ha il gruppo di trasformazioni date dalle matrici:

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \beta\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \beta\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \alpha\beta\alpha.$$

M. Pistoletto. Louvre 2013: Année 1. Le Paradis sur Terre

Come è noto, la rappresentazione dei punti della retta sotto la forma (5) permette di rappresentare analiticamente anche il *punto improprio* (*punto all'infinito*) della retta stessa. Infatti, fissati due punti *A*, *B*, se i tre punti *A*, *B*, *C* sono tutti propri, e distinti tra loro, il valore *k* del rapporto semplice (*ABC*) viene rappresentato dal numero reale *k* tale che sia:

$$(7)\ k = \frac{x}{y};$$

se $B = C$, il rapporto semplice viene rappresentato dal vettore $[x, 0]$; infine se il punto *C* si allontana sino a coincidere con il punto all'infinito della retta, il rapporto semplice viene rappresentato dal vettore $[x, x]$.

Valori limiti in relazione al punto improprio della retta.

3 - Teorema di Menelao. Considerato un triangolo, di vertici *A*, *B*, *C*, (nel seguito indicato con il simbolo <*A*,*B*,*C*>), e considerati tre punti: *P*, *Q*, *R*, appartenenti rispettivamente ai lati <*AB*>, <*BC*>, <*CA*> , condizione necessaria e sufficiente perché i tre punti appartengano ad una medesima retta *r* è che si abbia:

$$(1)\ (ABP)\cdot(BCQ)\cdot(CAR) = 1;$$

relazione che, in forza della definizione di rapporto semplice, può anche essere scritta nella forma:

$$(1)\ \text{bis}\quad AP\cdot BQ\cdot CR = BP\cdot CQ\cdot AR.$$

La dimostrazione di questo teorema si fonda, come è noto, sulle proprietà della similitudine, e quindi, in ultima analisi, sul teorema di Talete.

Se i tre punti *P*, *Q*, *R* sono allineati, allora vale la (1); questa è quindi condizione necessaria per l'allineamento. Sia dunque *r* una retta su cui stanno per ipotesi i tre punti. Si mandino per *A*, *B*, *C* rispettivamente tre rette parallele tra loro, ad incontrare la *r* nei tre punti *A'*, *B'*, *C'*. Per l'ipotesi del parallelismo i due triangoli <*APA'*> e <*BPB'*> sono simili tra loro. Si avrà quindi:

$$(2)\ AP : BP = AA' : BB'.$$

In modo analogo, circolando sulle lettere *A*, *B*, *C* e *P*, *Q*, *R* si avranno le altre due relazioni:

$$(3)\ BQ : CQ = BB' : CC' \qquad ; \qquad CR : AR = CC' : AA'.$$

Moltiplicando tra loro membro a membro le tre relazioni (2) e (3) si ottiene la (1) bis.

Supponiamo ora che valga la (1)bis, e dimostriamo che i tre punti *P*, *Q*, *R* sono allineati, e quindi che la (1)bis è condizione sufficiente per l'allineamento.
La dimostrazione si consegue per assurdo: supponiamo infatti che i tre punti non appartengano ad una stessa retta; tracciamo allora la retta *r* che congiunge *P* con *Q*, e chiamiamo *R'* il punto in cui la

r interseca il lato <*AC*> del triangolo. Supponendo, per ipotesi assurda, che *R'* sia diverso da *R*, si avrà, per la prima parte della dimostrazione:

$$(4)\ AP\cdot BQ\cdot CR' = BP\cdot CQ\cdot AR'.$$

Dalla (1) bis, che vale per ipotesi, e dalla (4) ora dimostrata, si trae:

$$(5)\ CR : CR' = AR : AR',$$

o anche, permutando i medi della proporzione:

$$(6)\ CR : AR = CR' : AR'.$$

Ma questa relazione è chiaramente assurda se *R'* è diverso da *R*; quindi quest'ultimo punto è l'intersezione della retta *r* con il lato <*CA*> del triangolo, ossia i tre punti *P*, *Q*, *R* sono allineati.

4 - Si consideri ora un triangolo di vertici *A, A', C*; si fissi un punto *O* sul lato <*AA'*> e si mandi da *O* una retta ad intersecare i lati <*CA*> e <*CA'*> nei punti *B* e *B'* rispettivamente. Applicando il teorema di Menelao al triangolo in parola si ottiene:

$$(7)\ AB\cdot CB'\cdot A'O = CB\cdot A'B'\cdot AO.$$

Mandiamo ora da *O* una seconda retta, ad intersecare i lati <CA> e <CA'> nei punti *D* e *D'* rispettivamente. In forza del teorema di Menelao si avrà una seconda relazione, analoga alla (7), che si ottiene da questa ponendo *D* e *D'* rispettivamente al posto di *B* e *B'*, precisamente:

$$(8)\ AD\cdot CD'\cdot A'O = CD\cdot A'D'\cdot AO.$$

Dalle (7) e (8), dividendo membro a membro, ricordando la definizione di *birapporto* di 4 punti *A*, *C*, *B*, *D*: $(ACBD) = (ACB)/(MND) = \dfrac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}$,

a conti fatti si ottiene:

$$(9)\ (ACBD) = (A'CB'D').$$

Mandiamo ora per *O* una retta diversa dalle precedenti, ad intersecare i lati <*CA*> e <*CA'*> nei punti *E* ed *E'* rispettivamente. Ripetendo i calcoli eseguiti or ora si giunge alla relazione:

$$(10)\ (ACBE) = (A'C\,B'\,E').$$

In base alle note proprietà del birapporto, dalle (9) e (10) conseguono le relazioni seguenti:

$$(11)\ (BADC) = (B'A'D'C)\ ,\ (BAEC) = (B'A'E'C).$$

E di qui, sulla base della definizione di birapporto ed ancora delle proprietà di questo si trae:

$$(12)\ (ABED) = (A'B'E'D').$$

La proprietà espressa dalla (12) viene descritta abitualmente nella forma sostanzialmente equivalente con il fondamentale

TEOREMA (*di invarianza del birapporto*). Secando quattro rette: *a, b, c, d* di un fascio con due rette *r* ed *r'* qualisivogliano (non passanti per il centro del fascio), si ottengono due quaterne di punti: *A*, *B*, *C*, *D*, e *A', B', C', D'* tali che sia:

$$(13)\ (ABCD) = (A'B'C'D').$$

Questo teorema permette di definire anche il birapporto di una quaterna di rette di un fascio, o di una quaterna di piani pure appartenenti ad un fascio; infatti esso permette di porre la seguente

DEFINIZIONE. Data una quaterna di rette *a, b, c, d* appartenenti ad uno stesso fascio, si chiama *birapporto* della quaterna di rette il birapporto dei quattro punti ottenuti secando le rette stesse con una secante qualunque.

Si verifica immediatamente che la definizione è ben posta nel caso in cui le due rette siano parallele tra loro, oppure quando il centro del fascio sia un punto improprio. In generale poi il teorema di invarianza permette di garantire che la definizione è ben posta in ogni caso.

Siano ora α, β, γ, δ quattro piani appartenenti ad un medesimo fascio, tali cioè che siano tutti paralleli tra loro oppure passino per una medesima retta, che viene chiamata, come è noto, *asse* del fascio di piani. Siano *r* ed *r’* due rette qualunque dello spazio, ed indichiamo con *A*, *B*, *C*, *D* i punti in cui i quattro piani nominati intersecano rispettivamente la retta *r*; analogamente indichiamo con *A’, B’, C’, D’* rispettivamente i punti in cui i piani in parola intersecano la retta *r’*. Dimostriamo che sussiste anche in questo caso la relazione (13).

Si distinguano due casi: se le due rette *r* ed *r’* sono complanari, si chiami π il piano in cui entrambe giacciono, per ipotesi; si chiami *O* il punto in cui l’asse del fascio incontra il piano π, ed infine si chiamino *a, b, c, d* le rette secondo cui il piano stesso è secato rispettivamente dai piani del fascio. Ovviamente tali rette passano per *O* e le due quaterne di punti: *A, B, C, D* ed *A’, B’, C’, D’* si trovano nelle condizioni considerate per la dimostrazione del teorema di invarianza.

Si supponga ora che le due rette *r* e ed *r’* siano sghembe tra loro; si mandi allora un piano π per *r* ed un piano π' per *r’*. Si chiami *r”* la retta intersezione dei due piani, e si chiamino *A”, B”, C”, D”* i punti in cui tale retta interseca rispettivamente i quattro piani del fascio. Applicando due volte il teorema di invarianza si passa dalla quaterna *A, B, C, D* alla *A’, B’, C’, D’* sempre con lo stesso birapporto.

OSSERVAZIONI. Configurazioni e metodo di Poncelet. Configurazione di Pappo-Pascal e dimostrazione con il teorema dei 9 punti base di un fascio di cubiche piane.

ESEMPIO di applicazione del metodo di Poncelet: Teorema di Pappo-Pascal [e configurazione di Pappo-Pascal].

Siano date in un piano due rette *r* ed *r’*; siano *A, B, C* tre punti di *r* e siano *A’, B’, C’* tre punti di *r’*. Supponiamo che le due rette *r* ed *r’* abbiano in comune un punto che chiameremo *O*, e supponiamo inoltre che questo punto non coincida con alcuno dei 6 punti or ora nominati sulle due rette.

Consideriamo ora i tre punti seguenti:

(14) $P = \langle A B' \rangle \cap \langle A' B \rangle \quad ; \quad Q = \langle B C' \rangle \cap \langle B' C \rangle \quad ; \quad R = \langle C A' \rangle \cap \langle C' A \rangle$.

Sussiste il

TEOREMA. I tre punti *P, Q, R* or ora definiti appartengono ad una medesima retta, che indicheremo provvisoriamente con *u*.

La dimostrazione può essere data nel modo seguente: poiché il fatto che tre punti siano allineati è invariante per il gruppo delle trasformazioni che caratterizza la geometria proiettiva, dimostreremo il teorema nel caso in cui la retta *u* sia la retta impropria del piano. In questo caso la formulazione del teorema porterebbe a dire che i punti *P, Q, R* sono impropri e quindi che le tre coppie di rette sono costituite da rette a coppie parallele tra loro. La procedura classica conduce a dimostrare che se per es. *P* e *Q* sono punti impropri, anche *R* è improprio.

A tale fine supponiamo che le rette date, *r* ed *r*’, siano scelte come assi cartesiani di un sistema di coordinate affini, avente il punto *O* come origine, ed avente come assi *x* ed *y* rispettivamente le rette *r* ed *r’*. Con queste convenzioni, siano:

(15) (*a, 0*), (*b, 0*), (*c, 0*) rispettivamente le coordinate di *A, B, C,* e siano (*0, a’*), (*0, b’*), (*0, c’*) le coordinate di *A’, B’, C’*.

L’equazione segmentaria della retta <*A B’*> è allora:

$$(16)\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b'} = 1,$$

e quella della retta <*A’B*> è:

$$(17)\quad \frac{x}{b} + \frac{y}{a'} = 1,$$

e la condizione di parallelismo delle due rette (16) e (17) conduce alla relazione:

$$(18)\quad \frac{a}{b} = \frac{b'}{a'}, \text{ ossia } a\,a' = b\,b'.$$

In modo analogo si dimostra che il parallelismo tra le due rette <*B C’*> e <*B’C*> conduce alla relazione:

$$(19)\quad b\,b' = c\,c'.$$

Da queste due relazioni, ricordando che, per ipotesi, nessuna delle coordinate a, b, c, a', b', c' è nulla, si trae ovviamente la relazione:

$$(20)\quad a\,a' = c\,c';$$

la quale esprime che il punto R è improprio, come si voleva.

Volendo evitare il ricorso alle coordinate cartesiane (oblique), la dimostrazione può essere condotta in forma equivalente con considerazioni del tutto elementari, nel modo seguente.

Il parallelismo tra le due rette <*AB’*> ed <*A’B*> implica che sia valida la relazione:

$$(21)\quad OA : OB' = OB : OA',$$

dalla quale si trae:

$$(22)\quad OA \cdot OA' = OB \cdot OB'.$$

Analogamente, dal parallelismo delle due rette <*A C’*> ed <*A’C*> si trae la validità della relazione:

$$(23)\quad OA \cdot OA' = OC \cdot OC'.$$

E dal confronto delle (22) e (23) e dalle ipotesi si trae:

$$(24)\quad OB : OC' = OC : OB'.$$

OSSERVAZIONE. Le procedure che abbiamo seguito finora si fondano su risultati del tutto elementari; in altre parole esse appartengono alla geometria euclidea classica, anche se viene trattata con qualche strumento della geometria analitica. Tuttavia i risultati hanno validità anche in un campo molto più vasto di quello della geometria euclidea classica: invero il fatto che tre punti appartengano ad una medesima retta è invariante quando si operi sulle figure con operazioni di proiezione e sezione, cioè con operazioni che appartengono ad un gruppo molto più ampio di quello caratteristico della geometria elementare euclidea.

Per esempio, con riferimento al teorema di Pappo-Pascal, si osserva che dati due piani π e π', che non siano paralleli tra loro, ed una retta r appartenente a π, è sempre possibile, in infiniti modi, proiettare le figure di π su π' in modo che la retta r di π si proietti nella retta impropria (*retta all’infinito*) di π'.

N.d.R. *Il testo è un file del 2003. Reimpaginato gennaio 2014.*

Terzo paradiso. ***Variazione sul simbolo dell’infinito***