TESTI DELLA PROVA DI CONCORSO A CATTEDRE DI MATEMATICA

Pubblichiamo i testi dei temi del concorso a cattedre di matematica appena svoltosi, sperando che interessino anche ai Soci che non devono più fare concorsi. I temi dati sono un po' diversi dagli usuali (manca quasi la curva algerbrica!!)

TEMA 1

In un piano P è dato un sistema di assi coordinati ortogonali monometrici di origine O. Un punto qualunque del piano $M\equiv(x,y)$ può essere rappresentato con un numero complesso $z=x+iy$, chiamato affissa di M. Sia $\bar{z}$ il complesso coniugato di z.

- Dato un numero complesso a, diverso da 0, considerare l'applicazione ϕ_a del piano P privato dell'origine in se stesso, che ad ogni punto M di affissa z fa corrispondere M' di affissa $z'=a/\bar{z}$. Dire se tale applicazione è, o no, biiettiva.
  Determinare l'insieme dei punti invarianti dell'applicazione ϕ_a, al variare di a.
- L'applicazione composta $\phi_b*\phi_a$, essendo b ed a due numeri complessi non nulli, rappresenta una trasformazione geometrica del piano P: dire di quale trasformazione si tratta. Esaminare, in particolare, il caso b=a.
- Nel seguito del problema, sia a un reale strettamente positivo; dimostrare che, in tale caso, la ϕ_a è un'involuzione. Esprimere, in questo caso, le equazioni della trasformazione che manda $M\equiv(x,y)$ in $M'\equiv(x',y')$ e scriverne le trasformazioni inverse. Mostrare che è una trasformazione quadratica, della quale si dovrà mettere in evidenza qualche proprietà.
- I numeri complessi z e z', affisse di M e di M', siano espressi nella forma trigonometrica :
  $$z=r(\cos\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta) \text{ e } z'=r'(\cos\vartheta'+\operatorname{sen}\vartheta');$$
  esprimere r e ϑ in funzione di r' e ϑ'.
- Sia Γ una circonferenza passante per O e avente centro in un punto $C\equiv(c,0)$ dell'asse delle ascisse. Determinare l'immagine data dalla trasformazione ϕ_a della circonferenza Γ, privata del punto O.
- Data la curva H di equazione $x^2-y^2+2x=0$ mostrare che si tratta di un'iperbole, determinare centro, assi, vertici, fuochi e asintoti.
- Nell'applicazione considerata nelle domande precedenti, porre a=1. Sia K l'immagine di H data dalla ϕ_1; mostrare che K è una cubica circolare e farne una rappresentazione grafica. In particolare, trovare le tangenti alla K nell'origine e nell'ulteriore punto di interesezione con l'asse delle ascisse.

- Trattare le trasformazioni quadratiche, in particolare l'inversione per raggi vettori reciproci.

TEMA 2

Indicare con $P(a,r)$ la progressione aritmetica di ragione $r\neq 0$ e di primo termine a, con S_n la somma dei primi n termini della progressione, T_n la somma dei quadrati dei primi n termini.

- Scelti $p,q\in\mathbb{R}$, dire se esiste una progressione $P(a,r)$ tale che: $S_n=pn^2+qn$; in caso affermativo, calcolare a ed r in funzione di p e q. In particolare, calcolare a ed r per $p=3$ e $q=5$.
- Calcolare la somma Σ_n dei quadrati dei numeri interi consecutivi da 1 a n (si potrà considerare lo sviluppo di $(x+1)^3$ dando ad x i valori 1, 2, 3...., n e adddizionando membro a membro le uguaglianze ottenute).
  Dedurre una espressione di T_n per una progressione $P(a,r)$ in funzione di a, r ed n. In particolare, calcolare la somma dei quadrati dei primi n numeri interi dispari.
- Quale condizione devono verificare i numeri b, c e d affinchè esista una $P(a,r)$ tale che $T_n=bn^3+cn^2+dn$?
- Trattare l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

TEMA 3

In un piano euclideo riferito ad un sistema di assi, considerare la trasformazione che al punto $M\equiv(x,y)$ associa $M'\equiv(X,Y)$ tale che

$$\begin{cases} X=x-y+1 \\ Y=x+y \end{cases}$$

Mostrare che h è una similitudine piana diretta della quale si preciseranno gli elementi.

- Studiare la conica C di equazione $x^2+y^2-2xy+x-3y=0$; determinare l'equazione cartesiana della curva C', immagine della curva C data dalla trasformazione h; trovarne le caratteristiche (fuoco, direttrice, vertice) e rappresentare le curve C e C'.
- Considerare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt$$

  essendo f(t) una funzione definita sull'insieme dei numeri reali. Trovare il dominio di definizione e studiare la continuità e la derivabilità di F(x). Determinare il comportamento di F(x) per $x \longrightarrow +\infty$ quando di suppone l'esistenza di $L=\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$.
- Trattare l'ipotesi del continuo.

TEMA DI CONCORSO 1991. RISPOSTE TEMA 1.

I - Indichiamo con $P*$ l'insieme dei punti del piano diversi dall'origine *0*. Poniamo:

$$(1) a = a_1 + i\, a_2 .$$

Per ipotesi è

$$(2)\ a\bar{a} > 0.$$

L'applicazione φ_a di $P*$ su se stesso può essere rappresentata nella forma:

$$(3)\ z'\bar{z} = a.$$

Quindi, tenendo conto della (2), se è $z \in P^*$ è anche $z' \in P^*$ e viceversa. Dalla (3) si trae:

$$(4)\ \bar{z}'\, z = \bar{a} ,$$

e quindi:

$$(5)\ z = \bar{a} / \bar{z}'.$$

Pertanto l'applicazione di $P*$ in se stesso data dalla (3), nella ipotesi (2), è bijettiva.
Diremo che un punto di $P*$ di affissa *z* è invariante se si ha:

$$(6)\ z' = z,$$

e quindi, per la (3):

$$(7)\ z\, \bar{z} = a.$$

Si osservi ora che il primo membro della (7) rappresenta un numero reale e positivo; quindi si hanno i seguenti casi:

i) se nella (1) è

$$(8)\ a_2 \neq 0,$$

la (7) non può essere soddisfatta per alcun valore complesso *z*;

ii) lo stesso avviene se è

$$(9)\ a_2 = 0 \ ;\ a_1 < 0;$$

iii) nel caso in cui si abbia:

$$(10)\ a_1 > 0 \ ;\ a_2 = 0$$

tutti i punti di $P*$ appartenenti alla circonferenza avente centro in *0* e $\sqrt{a_1}$ come raggio sono invarianti per la φ_a.

II - Sia *b* un numero complesso, e poniamo:

$$(11)\ b = b_1 + i\, b_2,$$

con

$$(12)\ b\, \bar{b} > 0.$$

Rappresentiamo φ_b nella forma:

$$(13) z'' = \frac{b}{\bar{z}'}.$$

Dalla φ_a che è data da:

$$(14)\ z' = \frac{a}{\bar{z}},$$

eliminando *z'* si ottiene la $\varphi_a\varphi_b$ nella forma:

$$(15)\ z'' = \frac{bz}{\bar{a}} = \frac{(ab)z}{a\,\bar{a}} .$$

Pertanto nell'insieme $P*$ la (15) rappresenta una rotomotetia di centro *O*, cioè una trasformazione che è il prodotto di due trasformazioni (permutabili tra loro):

1. una omotetia avente come centro *O* ed avente come costante il rapporto dei moduli dei due numeri complessi *b* ed *a*;
2. una rotazione attorno ad *O*, di un angolo che è la somma degli argomenti dei due numeri suddetti.

La trasformazione di P^* in se stesso può essere estesa all'intero piano P, convenendo di assumere O come corrispondente di se stesso.
Se in particolare nella (15) è $b = a$, allora la trasformazione è una rotazione dell'intero piano attorno ad O, di un angolo uguale al doppio dell'argomento di a.

III - Siano ora valide le (10), ed a indichi ora un numero reale e positivo. Dalla (3), prendendo i coniugati di entrambi i membri e tenendo conto dell'ipotesi, si trae la involutorietà della φ_a in questo caso.
Poniamo ora:

$$(16)\ z' = x' + i\, y';$$

dalla (3), in questa ipotesi, si ha

$$(17)\ z' = \frac{a}{\bar{z}} = \frac{a\, z}{z\bar{z}}\ ;$$

e di qui, separando il reale dall'immaginario, si hanno le formule:

$$(18)\ x' = ax/(x^2 + y^2)\ ,\ y' = a\, y/(x^2 + y^2),$$

e le inverse:

$$(19)\ x = ax'/(x'^2 + y'^2)\ ,\ y = a\, y'/(x'^2 + y'^2).$$

OSSERVAZIONE 1 - Le (18), (19) rappresentano una trasformazione di P^* su se stesso che rientra nella classe delle trasformazioni quadratiche, cioè delle corrispondenze tra piani proiettivi complessi che mandano la rete delle rette di un piano in una rete omaloidica di coniche dell'altro, cioè in una rete di coniche le quali passano tutte per tre punti fissi (chiamati "punti base " della rete); pertanto si ha che due coniche della rete hanno un solo punto di intersezione variabile, in funzione dei parametri che le determinano.
Segue di qui che, dato un punto in uno dei piani, le coordinate del corrispondente sono in generale delle funzioni razionali e regolari delle coordinate del primo; quindi la corrispondenza è in generale bijettiva e regolare. Esistono tuttavia dei punti e dei luoghi di punti nel quali le formule della trasformazione perdono di senso, e quindi vengono perduti i caratteri di regolarità e di bijettività della corrispondenza.
Per esempio, se si considera la corrispondenza di P^* in se stesso data dalle (18), (19) come la restrizione a P^* di una corrispondenza del piano proiettivo complesso $\mathbb{C}\,\mathbb{P}(2)$ in sé, i punti eccezionali sono l'origine O ed i due punti ciclici, ed i luoghi eccezionali sono la retta impropria e le due rette isotrope per O.
Da quanto è stato detto segue che se è data una curva algebrica irriducibile f su uno dei piani, la corrispondente può non essere irriducibile, perché contiene un certo numero di curve eccezionali della trasformazione. Tuttavia si conviene abitualmente di considerare come corrispondente di una curva algebrica irriducibile soltanto quella rappresentata dall'equazione trasformata con le formule della corrispondenza, privata dei fattori rappresentanti le curve eccezionali. Tenendo presenti queste avvertenze ed osservazioni, partendo dalle (18) e (19)si verifica la validità delle seguenti proprietà della corrispondenza di P^* in se stesso:

1. Una circonferenza di P^* non passante per l'origine viene trasformata in un 'altra circonferenza pure non passante per l'origine;
2. una retta non passante per l'origine viene trasformata in una circonferenza passante per l'origine; e viceversa una circonferenza passante per l'origine viene trasformata in una retta;
3. una retta passante per l'origine viene trasformata in se stessa.

IV - Ponendo:

$$(20)\ z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\ ,\ z' = r'(\cos\vartheta' + i\ \sin\vartheta'),$$

dalla (3) si ha:

$$(21)\ \ r\, r' = a\ ;\ \cos\vartheta = \cos\vartheta\,';\ \sin\vartheta = \sin\vartheta\,',$$

e quindi

$$(22)\ \vartheta' \equiv \vartheta\ (mod\ 2\pi).$$

V - La Γ ha equazione:
(23) $x^2 + y^2 - 2\,cx = 0$.
Sostituendo per la (19), e tenendo conto delle avvertenze enunciate sopra (OSS. l) si ottiene come corrispondente la retta:

$$(24)\quad 2cx' - a = 0.$$

VI - L'equazione della H può essere scritta nella forma seguente:

$$(25)\ (x+1)^2 - y = 1;$$

pertanto, eseguendo la traslazione rappresentata dalle formule:

$$(26)\ X = x + 1\ ,\ \ Y = y\ ;\quad x = X - 1\ ,\ Y = y,$$

essa acquista la seguente forma canonica:
(27) $X^2 - Y^2 = 1$;
questa equazione rappresenta una iperbole equilatera in forma canonica, rispetto agli assi X ed Y; essa è il luogo di punti del piano X, Y tali che la differenza (in valore assoluto) delle distanze di un punto qualunque del luogo da due punti fissi (chiamati fuochi) è una costante. Infatti con calcoli non difficili si verifica che l'unica equazione (27) può essere dedotta dalle due:

$$\sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + y^2} - \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + y^2} = 2$$

$$-\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + y^2} = 2.$$

Sulla equazione (27), con i metodi noti della geometria analitica elementare, si possono leggere direttamente le proprietà seguenti, che forniscono le risposte alle richiesta del Tema; precisamente:

coordinate del centro $X = Y = 0$;
equazioni degli assi $X = 0$, $Y = 0$;
coordinate dei vertici $X = \pm 1$; $Y = 0$;
coordinate dei fuochi $X = \mp\sqrt{2}$; $Y = 0$;
equazioni degli asintoti $X = \pm\ Y$.
Le formule (26) permettono di esprimere immediatamente le risposte in coordinate x, y.

VII - Facendo nelle (19) $a = 1$, sostituendo nella equazione della H, tenendo conto delle avvertenze contenute nella Osservazione 1 (e trascurando, per semplicità, di scrivere gli apici), si ottiene l'equazione della curva K:

$$(28)\ x^2 - y^2 + 2x\,(x^2 + y^2) = 0.$$

Questa equazione rappresenta, nel piano proiettivo complesso $\mathbb{C}\,\mathbb{P}(2)$, una cubica. Lo studio della curva, e soprattutto della parte reale di essa, può essere eseguito con metodi classici ben noti. Riporteremo qui alcune proprietà che così possono essere messe in evidenza.

i) Scrivendo l'equazione (28) in coordinate omogenee, con la sostituzione:

$$(29)\quad x = X / Z\ \ ;\ y = Y / Z,$$

si ottiene

$$(30)\quad Z\,(X^2 - Y^2) + 2X\,(X^2 + Y^2) = 0,$$

equazione che è soddisfatta dalle terne di coordinate: $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$.
Ciò dimostra che la curva passa per i punti ciclici del piano; è noto che ciò si esprime di solito dicendo che la curva è circolare. Tali punti sono semplici per la curva: infatti se essi non fossero tali, la retta impropria farebbe parte della curva, perché avrebbe più di 3 punti in comune con essa.

ii) Scritta l'equazione (28) nella forma:

$$(31)\ \ y^2 = x^2\,\frac{1+2x}{1-2x},$$
si verifica che la curva è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e che essa ha punti reali se e soltanto se x soddisfa alle limitazioni

$$(32)\ \ -1/2 \leq x < 1/2.$$

iii) L'origine è un punto doppio per la curva; ivi le tangenti principali sono rappresentate complessivamente dall'equazione che si ottiene uguagliando a zero il complesso del termini di secondo grado dell'equazione (28); pertanto tali tangenti sono rappresentate separatamente dalle equazioni:

$$(33)\ \ x \pm y = 0,$$

L'asse delle ascisse incontra ulteriormente la curva nel punto (-1/2, 0); ivi la tangente alla curva ha l'equazione:

$$(34)\ \ 2x + 1 = 0.$$

La retta di equazione:

$$(35)\ \ 2x - 1 = 0$$

è un asintoto della curva; questa ha un flesso nel punto improprio della retta (35).

iiii) La ricerca delle intersezioni della curva con le rette del fascio:

$$(36)\ \ y = t\,x$$

conduce alle equazioni seguenti, che forniscono la rappresentazione parametrica razionale della curva, cioè esprimono le coordinate di un punto della stessa come funzioni razionali di un parametro t:

$$(37)\ \ x = \frac{t^2-1}{2(t^2+1)}\ \ ;\ \ y = \frac{t(t^2-1)}{2(t^2+1)}\ .$$

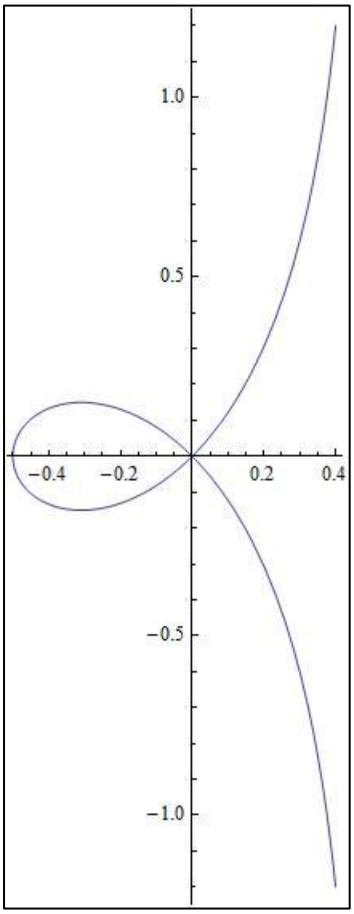

Figura 1

OSSERVAZIONE 2. Le proprietà della curva rappresentata dalla (28) potrebbero essere ritrovate direttamente dall'analisi e dalla discussione delle equazioni parametriche (37). In particolare, assegnando al parametro t tutti i valori compresi nell'intervallo:

$$(38)\ \ -1 \leq t \leq +1\ ,$$

si ha dalle (37) che x appartiene all'intervallo:

$$(39)\ \ -1/2 \leq x \leq 0.$$

Inoltre la funzione y data dalla seconda delle (37), nell'intervallo (38), ha un valore massimo ed un valore minimo; questi corrispondono ai valori del parametro t che sono soluzioni dell'equazione:

$$(40)\ \ t^2 = \sqrt{5} - 2\ ;$$

precisamente il valore massimo della y corrisponde alla radice negativa della (40), e vale:

$$y = \sqrt{\sqrt{5}-2}\ \ \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

ed il valore minimo corrisponde alla radice positiva della stessa equazione (40), ed è opposto al precedente. Pertanto i punti della curva le cui coordinate sono date dalle (37), quando t appartiene all'intervallo (38), costituiscono una curva chiusa (una specie di "occhiello"), che è simmetrica rispetto all'asse delle x, e che sta tutta nel semipiano delle x negative.
Quando il parametro t appartiene agli intervalli definiti dalle disequazioni:

$$(41)\ \ t < -1\ \ ;\ \ t > 1$$

la curva presenta due rami infiniti, che stanno nella striscia data dalle disequazioni:

$$(42)\ \ 0 < x < 1/2,$$

ed hanno come asintoto comune la retta (35).
La forma della parte reale della curva è rappresentata sommariamente dalla fig. 1.

VIII - Varie proprietà delle trasformazioni quadratiche sono già state richiamate sopra, nel corso della Oss. 1. Pertanto ci limiteremo qui ora a ricordare alcune proprietà delle inversioni circolari considerate dal punto di vista della geometria elementare.

Fissato nel piano un punto O (che verrà chiamato "*centro di inversione*") e considerato un punto X, diverso da O, si faccia corrispondere ad esso il punto X', allineato con O e con X, e tale che si abbia:

$$(43) \quad OX\, OX' = 1.$$

Si abbia ora una retta r del piano, non passante per O, e si indichi con H il piede della perpendicolare calata da O sulla retta; sia poi P un punto della retta, e consideriamo i corrispondenti dei punti H e P nella inversione (Fig. 2). In forza della (43) si avrà che i due triangoli OPH ed $OH'P'$ sono simili; quindi, se immaginiamo che il punto P descriva la retta, il corrispondente punto P' descriverà la circonferenza r' passante per O, ed avente OH' come diametro; ed inversamente, se immaginiamo che il punto P' descriva la circonferenza suddetta, il corrispondente punto P descriverà la retta per H, perpendicolare al diametro OH' della circonferenza. Sia poi t la tangente alla circonferenza in P, e sia Q un punto di questa tangente; con facili considerazioni del tutto elementari

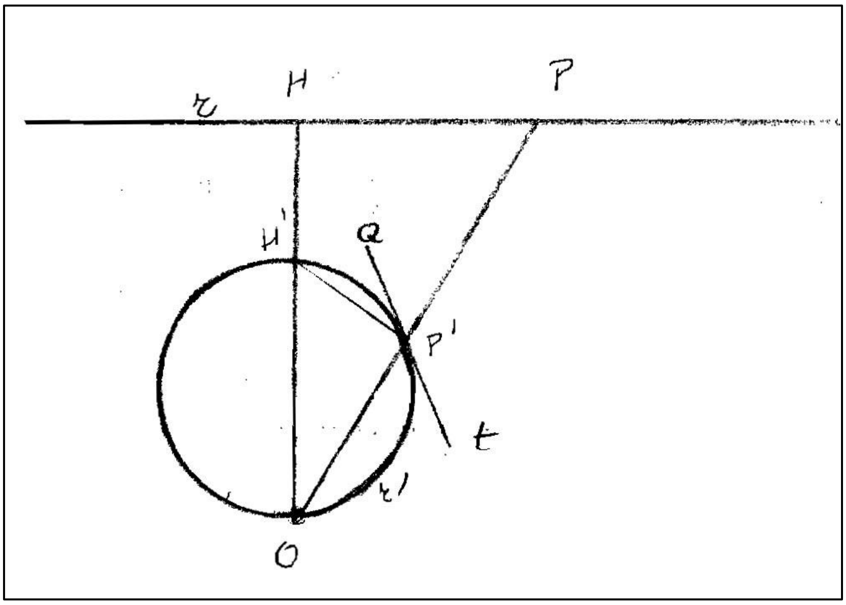

Figura 2

si giunge a dimostrare che i due angoli $QP'P$ e $P'PH$ sono uguali tra loro.

Supponiamo ora che esista una curva regolare, tangente in P alla retta HP; la sua trasformata sarà tangente in P' alla circonferenza e quindi alla retta $P'Q$; pertanto si può concludere che due curve, trasformate l'una dell'altra per l'inversione, in punti corrispondenti hanno come tangenti delle rette che formano angoli uguali in valore assoluto, ma di segno opposto, con la retta che congiunge i punti corrispondenti con il centro di inversione.

Partendo da questa osservazione si giunge subito a dimostrare che, se per un punto P passano due curve le cui tangenti formano un certo angolo, le curve trasformate, nel punto corrispondente P', avranno delle tangenti che formano un angolo uguale al primo in valore assoluto, ma di segno opposto. Questa proprietà viene richiamata dicendo che l'inversione circolare è una trasformazione "*isogonale*".

Più in generale, considerata una circonferenza k, (non passante per O), e su di essa due punti P e Q (Fig. 3), siano P' e Q' i loro corrispondenti nella inversione; dalla relazione (43) si trae la similitudine dei due triangoli OPQ ed $OQ'P'$; quindi, immaginando che il punto P descriva la circonferenza k, si trae che anche il punto P' descrive una circonferenza k'; in particolare se P descrive la k in senso orario, il corrispondente P' descrive la k' in senso antiorario.

Le proprietà ora esposte, ed altre che ne conseguono, possono essere verificate con calcoli elementari, per esempio fissando nel piano un riferimento polare avente O come polo, ed applicando le note formule di geometria analitica che riguardano le curve in coordinate polari. Queste stesse proprietà sono spesso utilizzate per risolvere dei problemi di geometria elementare riguardanti rette e circonferenze.

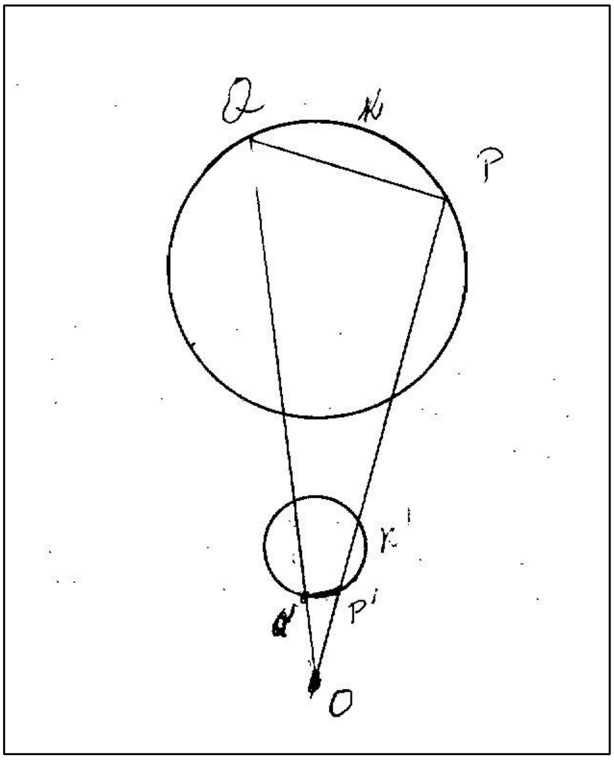

Figura 3