
Ettore Spalletti. In mostra a Roma, 2005

DUE TEOREMI DI APOLLONIO SULL'ELLISSE: dimostrazione analitica.

1. *In ogni ellisse la somma, (e in ogni iperbole la differenza), dei quadrati costruiti su due diametri coniugati qualsiasi, è uguale alla somma, (rispettivamente alla differenza), dei quadrati costruiti sugli assi.*
2. *In ogni ellisse, l'area di un parallelogramma circoscritto ad essa è costante ed è uguale al prodotto delle lunghezze dei due diametri dell'ellisse*.

Sia data un'ellisse, rappresentata in forma canonica con l'equazione:

$$(1)\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\ .$$

Porremo:

$$(2)\ \alpha = \frac{1}{a}\ ,\ \ \beta = \frac{1}{b}\ ,$$

e con questi simboli l'equazione (1) sarà scritta nella forma:

$$(3)\ (\alpha\, x)^2 + (\beta\, y)^2 = 1.$$

Ricordiamo che *due diametri dell'ellisse si dicono coniugati (tra loro) se le tangenti negli estremi di uno di essi sono parallele all'altro.*

Siano ora due numeri reali, *p*, *q* tali che si abbia:

$$(4)\ p^2 + q^2 = 1.\ (*)$$

Consideriamo i due polinomi:

$$(5)\ u = \alpha p\, x + \beta q\, y\ \ ;\ \ v = -\alpha q\, x + \beta p\, y.$$

Si verifica che la (3) può essere scritta nella forma:

$$(6)\ u^2 + v^2 = 1\ ,$$

e ciò in infiniti modi, in dipendenza della scelta della coppia di numeri reali *p, q,* soddisfacenti alla (4).

Dal sistema che si ottiene dalla (6) e dalla: (7) $u = 1$, si ottiene il sistema dato dalla (7) e dalla: (8) $v^2 = 0$. Questo secondo sistema esprime il fatto che la retta avente equazione (7) è tangente all'ellisse rappresentata dalla (6), perché la retta in parola ha due intersezioni coincidenti con la (8) e quindi anche con l'ellisse. La tangenza della retta con l'ellisse avviene nel punto *V*, di intersezione tra le due rette di equazioni:

$$(9)\ \ u - 1 = 0,\ \ v = 0.$$

Il sistema (9) permette di calcolare le coordinate di *V*, che risultano essere:

$$(10)\ x = ap\ \ ,\ \ y = bq.$$

In modo analogo si accerta che la retta di equazione: (11) $v = 1$, è tangente all'ellisse nel punto U in cui interseca la retta di equazione: (12) $u = 0$; punto le cui coordinate sono:

$$(13)\ x = -a\,q\ \ ;\ \ y = b\,p.$$

Le rette $u = 0$ e $v = 0$ sono ovviamente dei diametri dell'ellisse e sono parallele rispettivamente alle rette $u = 1$ e $v = 1$. Si conclude quindi che i due diametri considerati soddisfano alla definizione di diametri coniugati (rispetto all'ellisse) che abbiamo dato all'inizio.

Le formule (10) e (13) permettono quindi di giungere alla seguente:

$$(14)\ \ OU^2+OV^2 = (-aq)^2 + (bp)^2 + (ap)^2 + (bq)^2 = a^2 + b^2\ .$$

Si osserva che l'ultimo membro del sistema di equazioni (14) non dipende da p né da q, e quindi esprime una proprietà comune a tutte le coppie di diametri coniugati della curva (I° teorema di Apollonio).

Si consideri ora il parallelogramma che ha due lati consecutivi coincidenti con i vettori *OU* ed *OV*, semidiametri dell'ellisse. È noto che l'area di tale parallelogramma ha il valore del determinante di II° ordine avente come elementi le componenti dei vettori nominati. Pertanto, per la (10) e la (13), tale area vale:

$$(15)\ \ \ ap\,bp - bq\,(-aq) = ab\,(p^2 + q^2) = ab.$$

Anche in questo caso il risultato non dipende dalla scelta dei due numeri *p*, *q* soddisfacenti alla (4), ed è quindi valido per ogni coppia di semidiametri coniugati (II° teorema di Apollonio).

(*) NOTA. La determinazione di due numeri p e q soddisfacenti alla (4) può essere ottenuta in vari modi: per esempio si può scegliere un angolo qualunque θ e porre:

$$(+)\ \ p = \cos\theta\ ,\ \ q = \sin\theta.$$

Oppure si possono fissare due numeri qualisivogliano: *m*, *n*, e porre:

$$(++)\ \ p = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\ \ ,\ \ q = \frac{2\,m\,n}{m^2 + n^2}\,.$$

CFM, 31 - 1 - 2004 ?
NdR. Reimpaginato da file, giugno 2014

Esempio di utilizzazione del metodo di trasformazione.

Teorema di Apollonio. *Data un'ellisse E, tutti i parallelogrammi aventi come diagonali coppie di diametri coniugati di E hanno la medesima area*.

Scegliamo di rappresentare l'ellisse *E* in forma canonica:

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Si osservi che la scelta della forma canonica della equazione (1) è lecita proprio in forza del metodo di trasformazione: infatti il cambiamento di un sistema di riferimento equivale ad una trasformazione della figura in esame; e le proprietà considerate sono invarianti rispetto al gruppo delle trasformazioni di coordinate, cioè dei movimenti rigidi del piano in se stesso. Infatti per un movimento rigido diametri coniugati dell'ellisse *E* rimangono coniugati, e le aree di figure corrispondenti rimangono uguali.

Supponiamo noto il concetto di diametri coniugati di un'ellisse; non interessa qui richiamare le proprietà di questa corrispondenza, ben nota dalla geometria proiettiva. Indicati con *m* ed *m'* i coefficienti angolari di due diametri della *E*, la corrispondenza è rappresentata dall'equazione:

$$(2)\quad \frac{m\,m\prime}{b^2}+\frac{1}{a^2}=0.$$

Quindi alla retta per l'origine rappresentata dall'equazione

$$(3)\quad qx-py=0,$$

la (2) fa corrispondere la retta di equazione:

$$(4)\quad p\,b^2\,x+q\,a^2\,y\ =0\,.$$

Si consideri ora la trasformazione affine tra il piano (*x*, *y*) e il piano (*X*, *Y*) data dalle equazioni:

$$(5)\ x=X\ ;\quad y=\frac{b\,Y}{a}\ .$$

Sappiamo che le aree di figure corrispondenti nella trasformazione (5) hanno rapporto costante; quindi la (5) porta coppie di figure aventi uguali aree in coppie di figure pure aventi aree uguali fra loro. Si osserva ora che la (5) porta l'ellisse *E* di equazione (1) nella circonferenza *C* di equazione

$$(6)\ x^2\ +\ y^2\ =\ a^2\,;$$

inoltre le rette (3) e (4), coniugate rispetto alla E, vengono mutate nelle rette

$$(7)\quad aq\,X-bp\,Y=0\quad;\quad pb\,X+aq\,Y\ =0,$$

coniugate rispetto alla circonferenza *C*. Ora le (7) sono perpendicolari fra loro, quindi i parallelogrammi aventi per diagonali due diametri coniugati sono in questo caso dei quadrati inscritti nella circonferenza *C*. Essi hanno quindi tutti la stessa area, quali che siano i valori dei parametri p e q che figurano nelle (7). Lo stesso quindi vale anche per i parallelogrammi aventi per diagonali coppie di diametri coniugati dell'ellisse (1).

OSSERVAZION E – Il procedimento di analisi, cioè di deduzione, codificato dalla logica classica, si realizza qui mediante la trasformazione del problema dal piano (x,y) al piano (X, Y). Il procedimento di sintesi, cioè di ritorno dalle proprietà delle figure trasformate a quelle delle figure originarie, non è qui reso esplicito; tuttavia esso è surrogato dalle osservazioni che si fanno sulle proprietà della trasformazione e dalla biunivocità (considerata evidente) della trasformazione.
CFM, 091090

NdR Dattiloscritto reimpaginato