L'Insegnamento della Matematica
e delle Scienze Integrate

Vol. 11 - N.12
Dicembre 1988

INDICE

Sez. B

ATTI DEL XVII INCONTRO ANNUALE DEL CENTRO MORIN

CARLO FELICE MANARA

LA DEFINIZIONE
Richiami di logica elementare

SOMMARIO

1 - La definizione . Primo momento per la chiarezza scientifica.

E' facile osservare che noi usiamo il linguaggio per molti scopi: tra gli altri vi sono: la comunicazione di concetti, quella di comandi e quella di sentimenti e di stati d'animo.

L'impiego del linguaggio per comunicare sentimenti e stati d'animo e' tipico della poesia e della letteratura. Noi qui prenderemo in considerazione soltanto il primo dei ricordati impieghi del linguaggio, e precisamente l'impiego del linguaggio per comunicare dei concetti. Questo impiego infatti e' strettamente collegato con la conoscenza; ed in particolare con quella conoscenza motivata, spiegata, fondata e coordinata che viene abitualmente chiamata scienza.

Abbiamo qualificato la scienza come conoscenza motivata, spiegata, fondata e logicamente strutturata. E' facile convincersi del fatto che il primo passo da fare per ottenere una conoscenza di questo tipo e' la designazione precisa delle cose di cui si parla e che si vogliono conoscere. Tale designazione precisa delle cose di cui si parla e che si vogliono cooroscere e' lo scopo di una operazione logica che viene abitualmente chiamata "definizione".

Prima di proseguire nel nostro cammino, osserviamo che questa operazione e' in certo modo caratteristica della conoscenza scientifica e dell'impiego del linguaggio nella scienza. Infatti e' difficile osservare uno scrittore o un poeta che si preoccupa di definire i termini che impiega; anzi, si direbbe che la cosa piu' importante per un poeta sia la circostanza che i termini impiegati siano sfumati, ricchi di tanti significati, allusivi, evocativi di associazioni ; invece per la scienza la designazione precisa degli oggetti di cui si parla e' una condizione essenziale per ogni operazione successiva.

Non vi e' quindi da meravigliarsi per il fatto che la definizione, cioe', ripetiamo, quella operazione logica che precisa il significato dei termini usati, sia stata trattata dai primi filosofi che hanno meditato sulla cononscenza scientifica; ed in particolare sia stata analizzata da Aristotele, che ci ha lasciato uno splendido patrimonio di metodologia della conoscenza.

Nelle pagine che seguono cercheremo per prima cosa di esporre per sommi capi la teoria classica della definizione, mettendo anche in evidenza quanta parte del pensiero classico sia ancora viva nel nostro modo di ragionare e di costruire delle teorie, cioe' dei sistemi coerenti di conoscenze spiegate e motivate.

Prima di addentrarci nell'argomento ricordiamo in via preliminare che la logica classica ha tradizionalmente utilizzato il linguaggio comune, naturale: il greco, il latino , il francese, l'inglese ecc.; in altre parole ha utilizzato le lingue dei pensatori che di volta in volta si occupavano dei problemi.

Ora e' facile osservare che il linguaggio comune e' spesso ambiguo, e che quasi ogni termine ha piu' di un significato; e questo e' quasi sempre precisato dal contesto (frase, periodo, pagina, libro..) in cui il termine stesso e' inserito.

Per convalidare cio' che diciamo, prendiamo in considerazione un termine molto usato, per esempio il termine "diritto". La consultazione, anche superficiale , di un dizionario ci informa che questo termine puo' essere sostantivo oppure aggettivo:

Inteso come aggettivo, il dizionario enuncia vari significati, nel modo seguente : che non piega ne' da una parte ne' dall'altra; sagace, accorto, giusto, onesto. Destro, retto, rettilineo, tirato a filo, impettito, difilato, perpendicolare, verticale, orizzontale. Ed insieme con questi significati il dizionario enuncia spesso anche delle frasi, nelle quali l'aggettivo e' usato nel senso considerato.

Se poi il termine e' inteso come sostantivo, il dizionario riporta intere pagine che precisano vari sensi del termine stesso: tra questi significati ne riportiamo qui due principali. Il primo che e' spiegato dalle parole: facolta' legittima di fare o non fare una cosa, di disporne, di esigerla, d'impedirla. Beneficio, immunita', prerogativa, privilegio, ragione, spettanza, titolo.

Il secondo significato e' spiegato con le parole: giure, giustizia, istituzioni, norma, ordinamento, regola, scienza giuridica.

Questo esempio, ed altri numerosissimi che si potrebbero addurre, giustifica il fatto che ogni dottrina (scienza oppure anche tecnica) cerca di costruirsi un linguaggio specializzato, nel quale un termine abbia un significato preciso e costante, il piu' possibile indipendente dal contesto. Questo scopo viene cercato in vari modi; spesso una scienza utilizza un termine del linguaggio comune, ma ne precisa il significato con adeguate convenzioni: si pensi, per esempio, al termine improvviso, mentre in Geometria viene impiegato per designare una figura piana, definita con precisione. Oppure si pensi al termine "serie", che nel linguaggio comune puo' avere vari significati, ma che e' impiegato dalla Satatistica in un senso ben preciso e dalla Matematica in un senso pure ben preciso, anche se diverso dal precedente.

Sempre allo scopo di utilizzare dei termini con significati precisi e costanti spesso le varie dottrine coniano vocaboli tecnici e termini nuovi, spesso costruiti con radici prese da una lingua morta; tale lingua e' spesso il greco antico nel caso della Medicina. Invece la scienza giuridica, in Italia ed in altre numerosi paesi, impiega spesso direttamente dei termini latini.

Puo' avvenire infine che una scienza costruisca dei simboli convenzionali, che non hanno significato nel linguaggio comune : cio' avviene per esempio per la Chimica ed in forma notevolissima per la Matematica.

2 - La trattazione classica del problema . I predicabili.

Abbiamo detto che il problema della definizione e' stato oggetto di riflessione fin dall'antichita' greca, la quale ha trattato in modo acuto e profondo i problemi della logica, ed in generale della conoscenza razionale, chiara e certa.

Nella logica classica la definizione di un concetto viene conseguita sostanzialmente assegnando una successione di insiemi, ciascuno contenuto nel precedente, tali da precisare la classe a cui appartiene il concetto in parola.

Questa procedura e' seguita ancora oggi, per esempio, nelle classificazioni degli enti studiati dalle scienze della Natura vivente: per esempio Botanica e Zoologia. In quest'ultima le specie di animali viventi vengono definite assegnando una successione di insiemi, ciascuno contenuto nel precedente, alla quale appartiene la specie dell'animale che si vuole definire. Per esempio, nel caso della Zoologia, si assegna una successione di insiemi i cui nomi classici sono, come e' noto: tipo, classe, ordine, famiglia, genere, specie.

Per necessita' di classificazione questa successione di insiemi e' stata arricchita, ed ha condotto alla successione piu' moderna data da: tipo, sottotipo, classe, sottoclasse, ordine, sottordine, famiglia, genere, specie.

E' appena necessario osservare che questi sostantivi hanno vari significati nel linguaggio comune, ma dalla Zoologia sono impiegati in un significato tecnico preciso, per i fini che questa scienza si propone.

A questa tecnica per la definizione si ispira anche la nota convenzione per la denominazione delle specie animali; convenzione che assegna ad ogni animale un nome latino che ne precisa il genere e la specie, spesso aggiungendo anche il nome dello scienziato che per primo ha scoperto l'animale, oppure lo ha studiato e classificato.

Cosi', per esempio, la specie del cane comune domestico viene definita con la seguente successione di insiemi:

TIPO	cordati
SOTTOTIPO	vertebrati
CLASSE	mammiferi
SOTTOCLASSE	euteri
ORDINE	carnivori
SOTTORDINE	fissipedi
FAMIGLIA	canidi
GENERE	canis
SPECIE	domesticus.

Come e' noto, abitualmente si enunciano i termini che denominano il genere e la specie; nella fattispecie, il cane che convive con l'uomo viene definito come "canis domesticus".

E' anche noto che questo insieme di convenzioni per la denominazione dei viventi e' stata inventata ed introdotta nella scienza dal naturalista scandinavo Carlo Linneo (1707-1788); queste convenzioni sono ancora oggi adottate nella Zoologia e nella Botaninca e, come si vedra', sono ispirate dalla logica classica, che ai tempo di Linneo formava oggetto di studio assiduo ed ispirava la ricerca scientifica. In particolare i termini "genere" e "specie", introdotti da Linneo ed ancora oggi adottati, derivano dagli analoghi termini della logica classica, come vedremo.

Iniziando a presentare le idee fondamentali della logica classica, ricordiamo che questa dottrina ha analizzato anzitutto le forme di espressione, ed ha identificato nella proposizione il piu' piccolo elemento del discorso umano che puo' avere il carattere di verita' o falsita'. La forma elementare e schematica alla quale ogni proposizione puo' essere ricondotta (beniteso ai fini della logica e non, per esempio, ai fini della poesia) e'del tipo seguente:

" S e' un P"

ovvero :

" Al soggetto S compete il predicato P"

o anche, utilizzando una nomencaltura oggi forse piu' diffusa:

" L'insieme degli S e' un sottoinsieme dell'insieme dei P"

o altre frasi analoghe ed equivalenti.

Queste relazioni tra insiemi, le quali traducono relazioni valide tra i concetti coinvolti, possono essere illustrate con varie convenzioni grafiche. Oggi, come e' noto, sono molto diffusi certi disegni che vengono chiamati " Diagrammi di Eulero-Venn", dai nomi del matematico svizzero Leonardo Eulero (che li propose per primo) e del logico inglese G.Venn. Tuttavia altre convenzioni grafiche, diverse ma altrettanto valide, erano gia' state proposte nel secolo XVII dal matematico e filosofo tedesco W.G. Leibnitz.

In conseguenza della riduzione della proposizione alla forma schematica di cui si e' detto, la logica classica ha classificato anche i concetti che possono servire come predicati di una proposizione del tipo ricordato; pertanto tali concetti sono stati chiamati "predicabili" e sono stati identificati e classificati nelle forme seguenti:
GENERE, SPECIE, DIFFERENZA (specifica),PROPRIO, ACCIDENTE.

I primi due, cioe' il genere e la specie, identificano due insiemi inclusi l'uno nell'altro, come abbiamo gia' visto nel caso della classificazione zoologica. Tuttavia non e' detto che gli insiemi cosiffatti debbano necessariamente essere soltanto due: infatti anche nelle trattazioni classiche si ammetteva che potessero esistere vari generi, cioe' vari insiemi, ciascuno contenuto nel precedente; per esempio si parlava di genere remoto e di genere prossimo.

In questo ordine di idee, il concetto di "differenza specifica" costituisce la specie nell'interno del genere, cioe' determina e precisa l'insieme a cui appartiene l'ente che si definisce, nell'interno dell'insieme immediatamente superiore.

Il concetto di "proprio" esprime una proprieta' che consegue dalla definizione dell'ente, ma che non lo costituisce logicamente. Infine il concetto di "accidente", come lo dice lo stesso nome, esprime una qualita' che puo' essere o non essere presente senza che per questo l'ente cambi di natura.

Cosi', per esempio, se in Geometria elementare si volesse definire il rombo si potrebbe dire che si tratta di un quadrilatero piano convesso i cui lati sono tutti uguali fra loro.

In questa frase si potrebbero identificare i vari predicabili che costituiscono la definizione nel modo seguente :

genere remoto	figura piana;
genere prossimo	quadrilatero convesso;
differenza specifica	il fatto di avere i quattro lati uguali tra loro.

Il fatto che le due diagonali di un quadrilatero cosiffatto siano tra loro perpendicolari costituisce un "proprio" della figura; infatti questa proprieta' consegue dalla definizione della figura, ma non e' sufficiente a costituirne la definizione, perche' anche altri quadrilateri piani convessi hanno le diagonali tra loro perpendicolari senza avere i quattro lati uguali tra loro.

Un "accidente" potrebbe essere per esempio il fatto che in un determinato rombo uno dgli angoli interni valga 30 e l'altro 150 gradi.

Il procedimento logico di definizione di cui abbiamo detto finora puo' essere illustrato e reso visibile con vari accorgimenti grafici e con vari sussidi visivi. Per esempio oggi e' molto di moda il cosiddetto "diagramma ad albero", il quale e' talvolta utile, anche se non strettamente necessario, per comprendere il procedimento logico che abbiammo presentato. Cosi' nell'esempio che abbiamo trattato si potrebbe immaginare il diagramma ad albero seguente.

Figura piana — Figura qualunque nello spazio

Quadrilatero — Figura piana qualunque

Convesso — Quadrilatero qualunque, anche intrecciato

Con i lati uguali tra loro

Come si vede, ogni biforcazione dell'albero conduce alla precisazione di una qualita' costitutiva della figura (rombo) che stiamo definendo.

Possiamo ora osservare che questo procedimento non e' proprio ed esclusivo della Geometria, ma viene adottato ogni volta che si vuole svolgere un insieme di considerazioni rigorosamente razionali.

Pensiamo per esempio alla procedura che si dovrebbe adottare per definire l'automobile: questa potrebbe essere definita come un veicolo su strada a quattro ruote, mosso da un apparato interno al veicolo stesso. Volendo illustrare la procedura si potrebbe costruire il diagramma ad albero seguente:

Veicolo

Veicolo qualunque (anche nave o aeroplano)

Veicolo destinato a correre su strada

Slitta o lettiga, o carro ferroviario

a ruote

Triciclo o bicicletta

Con 4 ruote

Trainato da cavalli o altri veicoli

Con motore interno che lo muove.

Si potrebbe anche osservare che questa procedura logica trova il suo corrispettivo nel fenomeno linguistico che ha condotto a costruire il nome dell'oggetto che si considera. E' noto infatti che il termine "automobile" e' uno dei tanti esempi di aggettivo sostantivato, cioe' di termine che e' diventato sostantivo ma all'inizio indicava una differenza specifica, la quale costituiva la specie delle automobili nell'interno del genere delle vetture, che all'epoca della nascita del termine erano in generale trainate da cavalli. Pertanto l'invenzione di una vettura che si muove da sola (questo infatti e' il significato etimologico del termine "automobile") rese necessaria la costruzione di una specie particolare entro il genere delle vetture che, al tempo della nascita del vocabolo, erano in generale trainate da cavalli. Pertanto il termine che oggi viene considerato un nome, un sostantivo, era nella sua origine un aggettivo, destinato ad indicare la differenza specifica di un oggetto ; cioe' destinato ad indicare la qualita' che costituiva una nuova specie di mezzi di trasporto, precisandone la differenza da tutti gli altri; differenza che era costituita dal fatto, a quei tempi straordinario, che la vettura si muovesse da sola, senza essere trainata.

Si puo'ora osservare che la successione degli insiemi che costituiscono la definizione di un determinato ente non e' in generale stabilita in modo univoco . Cosi' per esempio nel caso del rombo si potrebbe pensare legittimamente ad un diagramma ad albero come il seguente:

Poligoni piani

Poligoni qualunque, anche intrecciati

Poligoni convessi

Poligoni con lati qualunque

Poligoni con lati uguali

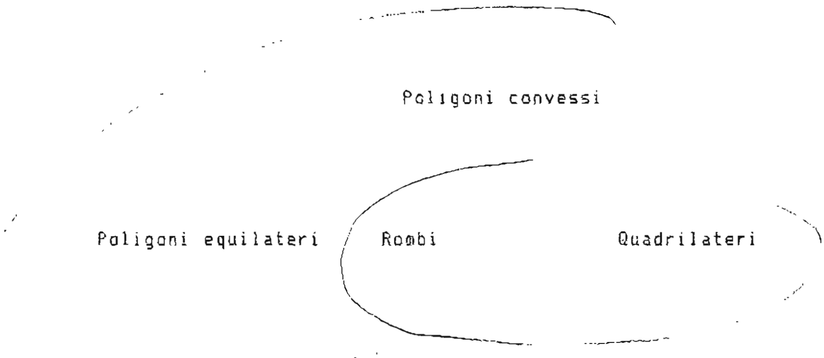
Poligoni con un numero qualunque di lati

Quadrilateri.

Questa osservazione e' alla base delle trattazioni che presentano le definizioni di certi enti per mezzo di diagrammi di Eulero-Venn, con riferimento alla operazione logica di intersezione di insiemi.

Volendo presentare la cosa con i termini della logica classica, si potrebbe dire che per esempio due generi prossimi contenuti in un medesimo genere remoto possono avere degli elementi in comune . Pertanto la determinazione della specie puo' essere ottenuta assegnando come differenza specifica il fatto che la specie stessa e' l'intersezione di due generi prossimi.

Cosi', nell'esempio considerato, la specie dei rombi puo' essere definita come l'intersezione del genere dei poligoni convessi equilateri e di quello dei quadrilateri convessi.



3 - Le definizioni reali e le definizioni nominali.

Negli esempi trattati finora la definizione e' stata considerata come una operazione logica che precisa la natura di un ente, e permette quindi di dedurre logicamente ogni proprieta' dell'ente stesso; proprieta' che, per cosi' dire, sono contenute implicitamente nella definizione e che richiedono soltanto una operazione di deduzione per essere conosciute esplicitamente.

Cosi' per esempio, nel caso del rombo, si deducono dalla definizione della figura tutte le sue proprieta' che non siano accidentali . Nel caso dell'automobile si potrebbe dire che dalla definizione stessa segue la necessaria esistenza di un apparato per cambiare direzione della corsa della vettura, dato che le strade che essa deve percorrere non sono tutte diritte.

Le definizioni, considerate da questo punto di vista, vengono dette "definizioni reali" ed erano anticamente indicate come definizioni "quid rei"; questa espressione latina indica in sostanza che la definizione precisa la natura della cosa che si definisce: nel caso degli esempi trattati, la definizione indica che cosa sia la figura chiamata rombo e che cosa sia l'oggetto chiamato automobile.

Si potrebbe tuttavia prendere in considerazione delle frasi che hanno un'apparenza esteriore analoga a quella della definizione, ma che hanno un significato diverso. Tali frasi vengono considerate come delle pure imposizioni di nomi; come tali esse dipendono dalla volonta' di colui che le pronuncia, ed hanno un significato strettamente convenzionale. Tale sarebbe per esempio la frase seguente:

"Quadrilatero e' un poligono di quattro lati".

Essa infatti potrebbe essere interpretata come se fosse scritta nel modo seguente:

" Conveniamo di chiamare quadrilatero ogni poligono di quattro lati".

In questo ordine di idee la frase viene considerata come se assegnasse un significato al termine "quadrilatero" che fino a questo punto non ne aveva alcuno.

Considerazioni di questo tipo sono state svolte dal grande matematico, filosofo e teologo Blaise Pascal, il quale ha ossservato che l'espressione "numero pari" puo' essere considerata come una pura convenzione, diretta a risparmiare la frase completa, la quale dovrebbe essere "numero intero che, diviso per 2, da' resto zero".

Le definizioni considerate da questo punto di vista vengono talvolta chiamate "definizioni nominali", con espressione evidente , in forza di cio' che e' stato detto; con frase latina queste definizioni venivano chiamate definizioni "quid nominis".

Si puo' osservare, come ha fatto Pascal, che in Matematica vengono spesso impiegate delle procedure di questo tipo, dirette ad introdurre dei simboli nuovi ed a risparmiare lunghe frasi nella esposizione dei concetti.

A questo proposoito G. Peano ha osservato che in Matematica spesso il simbolo "=" di uguaglianza viene spesso usato in due significati diversi, che occorrerebbe accuratamente distinguere.

Infatti si suol scrivere per esempio:

(1) $A = B$

per indicare che l'ente (oggetto, concetto ecc.), supposto ben conosciuto, indicato con il simbolo A coincide con quello indicato con il simbolo B.

Cosi' per esempio, scrivendo:

(2) $(a+b)^2 = a^2 + 2\ a\ b + b^2$

si vuole indicare che il numero ottenuto facendo il quadrato della somma di due altri numeri a e b e' lo stesso di quello che si ottiene eseguendo le operazioni di somma, prodotto ed elevazione a quadrato indicate a destra del simbolo "=" nella (2).

Ma supponiamo per esempio di voler introdurre la misura in radianti di un angolo. A questo fine si potrebbe seguire la procedura seguente:
siano a e b due semirette aventi un'origine comune in un punto O. Si tracci una circonferenza avente raggio r e centro in O, e si indichino con A e B rispettivamente i punti di intersezione della circonferenza tracciata con le semirette a e b . Si supponga di saper misurare la lunghezza dell'arco di circonferenza compreso tra i punti A e B e si indichi con il simbolo $\widehat{AB}$ tale lunghezza . Si supponga inoltre di aver dimostrato che tale lunghezza e' direttamente proporzionale al raggio r della circonferenza tracciata. Allora si puo' introdurre un simbolo, per esempio:

(3) rad(a,b)

che indica il rapporto tra la lunghezza dell'arco $\widehat{AB}$ e quella del raggio r.

Se scrivessimo, per esempio:

(4) $rad(a,b) = \text{lunghezza dell'arco } \overset{\frown}{AB} / r$

scriveremmo una relazione esteriormente simile alla (2) ma di significato profondametne diverso; infatti nella (4) il simbolo che sta a sinistra del segno "=" e' nuovo, e quindi finora privo di significato. Questo e' precisato dalla frase (o dalla espressione) di significato noto che sta alla destra del segno "=". Si tratta quindi di una definizione nominale, della imposizione convenzionale di un nome alla frase (o all'espressione nota) che sta alla destra del simbolo "="; sarebbe quindi bene se si potesse distinguere tra i due significati di questo segno. Cio' si otterrebbe per esempio scrivendo la (4) nella forma seguente:

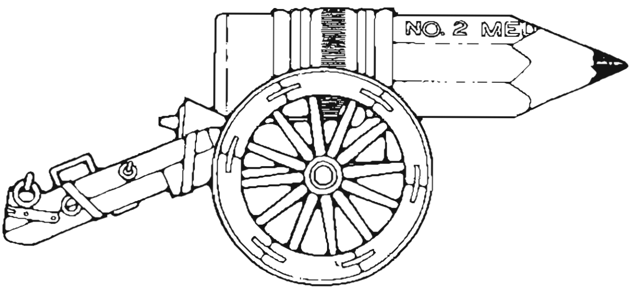
(4) bis $rad(a,b) \underset{df}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots$

dove il simbolo che segue "rad(a,b)" potrebbe essere letto per esempio con la frase " e' uguale per definizione..."; e cio' potrebbe precisare il fatto che la (4)bis e' una definizione nominale (definizione "quid nominis") e pertanto sostanzialmente diversa dalla (2), la quale indica invece una proprieta' delle operazioni, che si deduce dalle cose gia' note, e rappresenta quindi un teorema.

Osserviamo inoltre che , nel presentare la definizione nominale (4) abbiamo avuto cura di osservare che si suppone di aver dimostrato che la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ e' direttamente proporzionale al raggio r della circonferenza tracciata.

In base a questo fatto la definizione viene detta " ben posta". Infatti spesso in Matematica si presenta l'opportunita' di enunciare le definizioni nominali di certi enti, definizioni che vengono date facendo ricorso a costruzioni o in generale ad altri enti scelti arbitrariamente. Nel caso in esame, per esempio l'arbitrarieta' si realizza nella scelta del raggio r della circonferenza che si traccia con il centro in O, punto comune alla due semirette a e b . In generale si potrebbe dire che e' necessario svincolare la definizione nominale da ogni arbitrarieta', per far si' che la defininzione stessa sia ben posta. Infatti per esempio se l'ambiente in cui si lavora fosse una Geometria non-euclidea, la definizione non avrebbe piu' senso, peche' la lunghezza dell'arco AB dipenderebbe dal raggio r con una legge che non e' quella della proporzionalita' diretta; pertanto il secondo membro della (4) dipenderebbe dal raggio r e non soltanto dalla mutua posizione delle due semirette.

Riassumendo, potremmo dire che la definizione reale mira a far conoscere le proprieta' dell'ente a cui si riferisce; a tal punto che, se la definizione e' completa ed esauriente, ogni altra proprieta' dell'ente dovrebbe potersi dedurre dalla definizione, come avviene per esempio ini Geometria. Invece la definizione nominale si riduce ad una pura assegnazione convenzionale di un nome ad un ente che si suppone gia' noto per altra via. Pertanto si potrebbe aggiungere che lo scopo di ogni scienza e' quello di giungere o di tendere ad una definizione reale dei suoi oggetti; tuttavia non sempre la scienza umana puo' giungere a tanto; quindi in molti casi ci si deve accontentare di assegnare delle condizioni , oppure delle relazioni o delle leggi, che descrivono abbastanza davvicino gli enti considerati , in modo tale da poter prevedere il loro comportamento futuro, o le loro reazioni agli stimoli naturali o artificiali ai quali essi vengono sottoposti. La descrizione della realta' sperimentale, che viene data mediante il linguaggio della Matematica, tende appunto ad avvicinarsi ad una definizione completa reale degli enti considerati, o ne costituisce un succedaneo che si cerca continuamente di migliorare.



4 - Il problema dei termini primitivi.

Abbiamo parlato nelle pagine precedenti delle definizioni che vengono date mediante frasi del linguaggio comune, oppure mediante simboli della Matematica; aggiungiamo qui una osservazione che puo' sembrare banale, ma che e' essenziale per tutto il nostro discorso: in tutto cio' che abbiamo detto si suppone che le frasi o che i simboli utilizzati in una definizione abbiano un significato noto al lettore o all'ascoltatore. Cio' veniva espresso dalla logica classica con una regola che imponeva : "Definitio sit clarior definito", cioe' la definizione deve essere piu' chiara dell'ente definito; il che, del resto, e' prescritto anche dal buon senso.

La strada che si percorre cercando di definire i termini che si usano ha uno sbocco obbligato: infatti non e' possibile definire tutti i termini che si impiegano, ne' proseguire all'infinito nel dare delle definizioni: si rischia infatti di cadere in quella operazione logica fallace che la logica classica chiamava "circolo vizioso". La cosa era gia' stata osservata da B. Pascal, che abbiamo gia' citato; egli infatti osserva che non ogni termine puo' essere definito, e che occorre partire da un insieme di termini il cui significato e' assunto come noto.

Cio' accade spesso nei dizionari della varie lingue, e viene spesso ironicamente osservato dai lettori; ricordiamo per esempio cio' che ha scritto Leo Longanesi sotto il titolo " Moto perpetuo"; egli infatti riportava che un dizionario, sotto il lemma "sedia" scriveva "vedi seggiola" e sotto il lemma "seggiola" scriveva " vedi sedia".

Invero i dizionari abitualmente sono scritti con l'intento di spiegare il significato dei termini di una lingua, oppure di presentare i vari sensi nei quali un determinato termine puo' essere usato, a seconda dei vari contesti, come abbiamo gia' osservato nel paragrafo 1. Ma tali dizionari sono scritti nella lingua che presumono di chiarire,e pertanto suppongono che essa sia gia' nota, almeno in parte; altrimenti non potrebbero spiegare nulla . Pertanto i dizionari dovrebbero contenere all'inizio un elenco dei termini o delle espressioni o dei modi di dire che si presumono noti al lettore , o che comunque l'autore del dizionario rinuncia a chiarire , nella lingua utilizzata.

Analoghe considerazioni potrebbero esssere svolte a proposito della frase che in certi manuali viene presentata come la definizione del concetto di insieme, frase che suona piu' o meno cosi':

" Insieme e' una collezione di enti, presa come un tutto unico".

Ovviamente questa frase non risolve il problema della definizione del concetto di "insieme, ma la rimanda alla precisazione del significato del termina "collezione", oltre a quella degli altri termini contenuti nella frase.

Con queste osservazioni abbiamo posto, in modo quasi obbligato, il problema dell'inizio della conoscenza di una determinata lingua, e dell'apprendimento del significato di alcuni termini fondamentali della lingua stessa.

A ben guardare, il problema si pone per ogni bambino che impara a parlare, vivendo concretamente in una data societa'. Ovviamente i genitori non possono spiegargli con parole il significato dei termini che essi usano. Egli apprende tale significato vivendo, cioe' ripetendo, imitando, accettando le correzioni , generalizzando con l'impiego della sua intelligenza le nozioni ed i termini che egli apprende via via. Per esempio, quando avra' imparato a chiamare "gatto" la bestiola che vive in casa sua e che gioca con lui, egli riconoscera' come tale anche altre bestiole della stessa specie, e magari chiamera' "gatto" anche una tigre vista in fotografia.

La regola della logica classica (e del buon senso) la quale imponeva che la definizione debba essere piu' chiara dell'ente definito non e' ovviamente rispettata dalle frasi che vorrebbero essere delle definizioni, e che impiegano dei termini astrusi o strani, oppure utilizzano nella frase definitoria il termine stesso che vogliono definire (oppure dei termini strettamente collegati). Un esempio tipico di questo difetto e' fornito dall'Annuario statistico italiano, il quale definisce il termine "Vita media " con la frase seguente : "Il numero di anni che competono in media ad ogni nato vivo". Ovviamente se uno non sa che cosa sia la vita media non sa neppure quanti siano gli anni che competono in media ad ogni nato vivo. Il punto principale della questione sta infatti nel chiarire la espressione "in media", che qualifica la espressione "vita media".

In conclusione, potremmo osservare che, per apprendere il significato di certi termini con procedure diverse dalla definizione, e' essenziale la capacita' di generalizzazione dell'individuo; in caso contrario si otterrebbe soltanto l'apposizione di un nome ad un noggetto singolo, ma non l'apprendimento di un nome comune, atto a rappresentare ogni elemento di un determinato insieme .

Osserviamo tuttavia che in ogni caso l'assegnazione di un nome , che sia oppure no generalizzabile , viene conseguita con un procedimento che viene chiamato " definizione ostensiva", questo termine significa "definizione che mostra l'oggetto del quale si vuole insegnare il nome"; questa definizione veniva chiamata dalla logica classica "definizione per additamentum", cioe' definizione (nominale) in cui si pronuncia il nome di un oggetto additando contemporaneamente l'oggetto stesso.

Un procedimento di questo tipo dovrebbe essere seguito qualora si volesse comunicare con un soggetto umano che non conosce la nostra lingua, e che parla soltanto una lingua a noi totalmente sconosciuta: le prime comunicazioni con lui dovrebbero necessariamente realizzare questa procedura di additamento di cui abbiamo detto.

Si osserva tuttavia che una procedura di questo tipo e' applicabile ed afficace soltanto nel caso in cui si voglia stabilire il nome di oggetti che siano materialmente designabili, o concretamente additabili. Essa cade in difetto quando si tratti di risolvere il problema di definire un concetto astratto.

6 - la definizione implicita e per ricorrenza.

Abbiamo detto delle difficolta' che si incontrano qualora si vogliano definire dei concetti astratti, che siano talmente fondamentali da non poter essere facilmente definiti con riferimento ad altri. Tali difficolta' si superano con la definizione che viene chiamata "implicita" o anche "definizione d'uso", e che viene impiegata per definire gli enti fondamentali della Matematica.

Una procedura cosiffatta fu adottata da G. Peano, il quale pose le basi dell'Aritmetica in una classica memoria del 1882, scritta in latino ed intitolata "Arithmetices principia nova methodo exposita".

Ivi Peano non da' la definizione del numero intero naturale con una frase del tipo:" Il numero e'....", ma si limita ad enunciare senza dimostrazione delle frasi che parlano del numero, ed insieme parlano anche di altri enti astratti, non definiti. Precisamente Peano presenta cosi' tre concetti : il concetto di numero naturale, inteso come classe, il concetto di zero, inteso come un elemento di questa classe, il concetto di un operatore, che opera sugli elementi di questa classe e viene indicato con il simbolo "successivo di ...".

Peano enuncia 5 proposizioni primitive, cioe' senza dimostrazione, proposizioni che vengono ancora oggi chiamate "Assiomi di Peano"; quindi la definizione del concetto di numero naturale viene data semplicemente parlando del numero e degli altri concetti ricordati, e lasciando al lettore o all'ascoltatore la comprensione del significato del concetto e del termine che lo rappresenta.

In modo analogo procede David Hilbert nella sua classica opera sui fondamenti della Geometria; ivi egli non scrive mai una frase del tipo della seguente : " Il punto e'...." oppure " La retta e'....", ma semplicemente incomincia a parlare di punti , rette e piani, e lascia che il lettore si faccia un'idea personale degli enti di cui parla, e ne costruisca dentro di se' le immagini, con riferimento all'esperienza concreta.

A ben guardare, questa procedura viene seguita ogni volta che si insegna un determinato gioco a qualcuno che non lo conosce. Si pensi, per esempio, al gioco degli scacchi: ovviamente il nome che diamo ad un determinato pezzo, per esempio al cavallo, e' puramente convenzionale, e non determina per nulla il comportamento del pezzo stesso durante il gioco. Invece la definizione del pezzo viene data enunciando le regole con le quali il pezzo viene mosso; cioe' la definizione viene data con l'enunciazione delle relazioni fondamentali che legano il pezzo stesso a tutti gli altri che stanno sulla scacchiera.

Spesso, in questioni di Matematica riguardanti l'Aritmetica, la definizione di certi enti (operazioni, funzioni ecc.) viene ottenuta con una procedura che viene chiamata "ricorsiva". In questi casi un ente collegato con i numeri interi viene definito in un caso singolo, per esempio in corrisipondenza allo zero, e poi viene indicata la procedura che, partendo dall'ente corrispondente ad un numero qualunque, precisa la costruzione dell'ente corrispondente al numero successivo.

Sia per esempio da definire la somma a+b di un numero intero naturale a con un altro numero b, pure intero naturale. A questo fine si puo' considerare il simbolo "+b" come un operatore il quale, posto alla destra di un dato numero a, produce un altro numero; tale operatore puo' essere definito ricorsivamente nel modo seguente:

(5)

$$a+0 = a$$

$$a + \mathrm{succ}(b) = \mathrm{succ}(a+b).$$

Quindi, come si e' detto, l'effetto dell'operatore "+b" viene definito anzitutto quando sia b=0, e poi definito per il successivo di ogni numero.

Questa definizione ricorsiva e' fondata sulla legge di induzione completa, che Peano enuncia tra i suoi assiomi, considerandola in certo modo come costitutiva del concetto di numero intero naturale.

7 - Ulteriori problemi: indipendenza e coerenza.

Abbiamo visto che nella scienza, ed in particolare nella Matematica, non e' possibile definire ogni concetto con una frase che faccia riferimento ad un genere ed ad una differenza specifica: occorre partire da certi concetti che debbono essere supposti noti, e mediante i quali si possono costruire le definizioni degli altri e le teorie che li collegano; tali concetti vengono spesso chiamati "concetti primitivi".

E' necessario a questo proposito osservare che il fatto che un concetto sia primitivo non e' determinato dalla sua natura, ma dipende sostanzialmente dalla teoria nella quale il concetto stesso e' inserito: in altre parole, un concetto che in una determinata teoria risulta essere primitivo (perche' non puo' essere definito facendo ricorso ad altri) puo' benissimo essere definito in un'alra teoria, che sistema le stesse cose in maniera diversa dalla prima. Cosi' per esempio, per quanto riguarda l'Aritmetica, i concetti primitivi su cui si basa la teoria sviluppata da G. Peano sono in parte diversi da quelli che basano la teoria di M. Pieri.

Considerazioni analoghe possono essere fatte per quanto riguarda le proposizioni primitive: queste sono tali perche', in una determinata sistemazione di una teoria, non possono essere dimostrate fondandosi su quelle che le precedono. Ma cio' ha senso soltanto in relazione ad una determinata sistemazione della teoria; in un'altra sistemazione puo' darsi che una proposizione che e' primitiva per la prima sistemazione possa essere dimostrata , cioe' sia un teorema, nella seconda.

Pertanto si potrebbe dire che nella costruzione rigorosa di una determinata teoria, per esempio dell'Aritmetica o anche della Geometria astratta, e' necessario partire da certi concetti primitivi e da certe proposizioni primitive, perche' non tutto si puo' definire e non tutto si puo' dimostrare; ma la scelta dei concetti primitivi e delle proposizioni primitive che li definiscono implicitamente e' lasciata all'autore della toeria, e viene da lui fatta per motivi che dipendono dai suoi gusti, dalla sua esperienza, dalla sua cultura e da altre circostanze che non impongono una scelta determinata, e fondata soltanto su basi strettamente razionali.

Per questa ragione G. Peano scelse di chiamare "proposizioni primitive" le proposizioni iniziali di una teoria, mostrando cosi' di pensare che la impossibilita' di dimostrarle dipendesse soltanto dall'ordine nel quale esse sono enunciate. Oggi si usa chiamare "Assiomi" o anche "Postulati"le proposizioni iniziali, non dimostrate ne' dimostrabili, di una teoria; il nome "Postulati" risale ad Euclide, che chiamo' in questo modo certe proposizioni iniziali dei suoi "Elementi". La scelta di questo nome, che significa "richieste" fa pensare che l'atteggiamento di Euclide non fosse quello di chi impone agli altri le proprie vedute, ma piu' modestamente richiede che esse vengano accettate, impegnandosi tuttavia a dimostrare le altre proposizioni che enuncera' in seguito. Il termine "assiomi" viene utilizzato anche in altre dottrine, e fa pensare a proposizioni che si pretendono evidenti in forza del loro stesso contenuto; il che non e' proprio l'atteggiamento assunto dagli studiosi di fondamenti della Matematica in questioni come queste. Tuttavia la trattatistica attuale impiega con frequenza sempre maggiore il termine "Assiomi", pur assegnando a questo termine il significato che Peano assegnava alla espressione "proposizioni primitive" e che forse Euclide assegnava al termine "Postulati".

Abbiamo visto che nella impostazione moderna dei fondamenti della Matematica la definizione dei concetti fondamentali viene data enunciando delle proposizioni primitive, le quali sono scelte dal trattatista e non imposte dalla evidenza dei loro contenuti; nascono di conseguenza alcune questioni molto importanti, delle quali daremo soltanto qualche cenno, essendo impossibile esporle in modo completo ed esauriente. Una prima questione riguarda la indipendenza del sistema di postulati che si enunciano, e che forniscono la definizione implicita degli enti di cui si parla; una seconda riguarda la compatibilita' o coerenza del sistema stesso.

La prima questione riguarda la indipendenza delle proposizioni primitive e conduce a domandarsi se veramente una proposizione che si enuncia come primitiva non possa in alcun modo essere dimostrata a partire da quelle che sono state enunciate prima di lei. Invero, se fosse possibile dimostrarla, essa dovrebbe essere inclusa tra i teoremi e non tra le proposizioni primitive. La seconda questione riguarda la compatibilita' o coerenza del sistema di proposizioni primitive e conduce a domandarsi se non esistano delle contraddizioni nascoste nel sistema di proposizioni primitive che si enunciano, e quindi conduce a domandarsi se sia possibile escludere che eseguendo un numero qualunque di deduzioni dalle proposizioni enunciate non si arrivera' mai ad una palese contraddizione. In tal caso infatti sarebbe vano sperare di costruire una teoria coerente partendo dalle proposizioni enunciate.

Ripetiamo che non ci e' possibile qui esporre in modo completo l'insieme di ricerche di logica che hanno avuto la loro origine nelle questioni ricordate. Ci limitiamo a dire che la questione veramente importante e' ovviamente la seconda, cioe' quella che riguarda la coerenza di un sistema di postulati che si enunciano. A questo proposito ricordiamo che una strada seguita da vari Autori per constatare la coerenza di un sistema di postulati e' quella di esibire un modello del sistema stesso, cioe' di presentare un insieme di enti che verificano i postulati stessi . Cosi' per esempio D. Hilbert, nell'opera riguardante i fondamenti di Geometria che abbiamo citato, interpreta i postulati che egli enuncia facendo ricorso ad elementi di opportuni campi numerici.

Si potrebbe ovviamente osservare che in questo modo la questione della compatibilita' non e' risolta completamente, ma e' scaricata sulle teorie algebriche che studiano i campi numerici. Tralasciando ogni ulteriore approfondimento, ci limitiamo ad osservare che in questo modo la questione di compatibilita' viene circoscritta e ridotta ad alcuni problemi veramente fondamentali, che coinvolgono il significato e la portata della nostra conoscenza, e l'analisi delle procedure fondamentali della nostra mente.

Milano, luglio 1988