GLI INIZI DELLA TOPOLOGIA. IL CONTRIBUTO DI VANDERMONDE.

(Note dattiloscritte (1978) rieditate, marzo 2018).

1. Appare sempre interessante ricercare gli inizi di un fenomeno storico che è destinato nel seguito ad avere una grande importanza; in particolare appare interessante ricercare i momenti iniziali di certe scienze, o di certe branche di scienze già esistenti, ed analizzare come gli scienziati che hanno portato quei contributi fossero coscienti del fatto di aprire nuove strade e di indirizzare la scienza verso direzioni che prima non aveva preso. In questo ordine di idee, per esempio, R. DESCARTES (1596 – 1650), nel chiudere la sua *Géométrie*, dimostra di avere piena coscienza dell'importanza dei metodi da lui introdotti nella matematica, appunto in forza del fatto che quelli che egli presenta non sono soltanto dei risultati, ma soprattutto dei metodi, destinati a facilitare la scoperta di nuovi contenuti, ed a indirizzare le ricerche di geometria verso nuove direzioni.

Riteniamo quindi interessante presentare i primi sintomi della nascita di una branca della matematica che oggi ha un'importanza fondamentale nel corpus di questa scienza; intendiamo parlare della topologia, che è stata classicamente indicata con l'espressione *Analysis situs*, e la cui nascita si può localizzare verso la fine del secolo XVIII. Si suole far risalire l'inizio di questa branca della matematica alle ricerche di L. EULER (1707 – 1783), riguardanti il problema che viene chiamato *Problema dei sette ponti di Königsberg*. [In rete ad esempio si può vedere https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/Articoli/EuleroK%F6nigsbergGiorgioMainini.pdf]

Si tratta di un problema che potrebbe essere descritto come di geometria qualitativa, un problema cioè in cui le proprietà che interessano riguardano rapporti di contiguità e non le misure di elementi che intervengono nella trattazione.

Un'analisi molto posteriore ha cercato di mettere in luce i fondamenti psicologici di una distinzione di questo genere, distinzione che trova la sua radice nella genesi sensoriale dei diversi elementi percettivi che formano il contenuto della elaborazione logica propria della geometria. F. Enriques (tra gli altri) ha distinto le proprietà geometriche che hanno il loro fondamento nelle esperienze visive da quelle che hanno fondamento nelle sensazioni tattilo-muscolari, rilevando che le prime (quelle derivanti da sensazioni visive) portano alle proprietà topologiche ed a quelle inerenti alla geometria proiettiva, mentre le seconde (quelle che risalgono alle sensazioni tattilo-muscolari) portano sostanzialmente alle proprietà metriche, le quali a loro volta formano un capitolo fondamentale della geometria intesa in senso classico (euclideo).

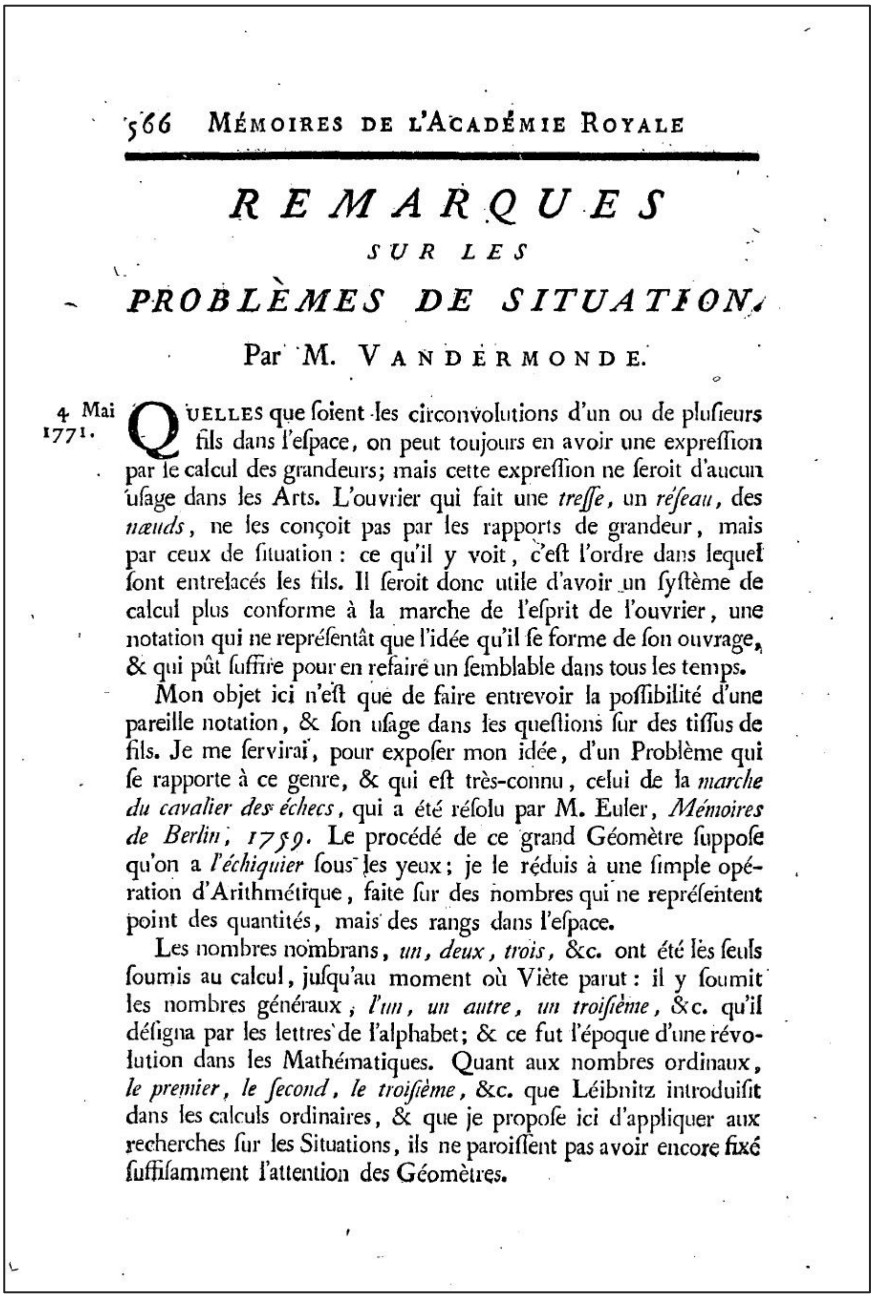
È noto che in epoca molto posteriore a quella che stiamo considerando F. KLEIN (1849 - 1925) introdusse una circostanza radicalmente importante nella geometra, ricollegando le branche di questa scienza ad una struttura algebrica, la quale rappresenta e traduce in certo modo l'analisi psicologica di cui abbiamo detto, e pone in modo rigoroso le relazioni tra le idee fondamentali di certi capitoli della geometria e certe nostre esperienze; cosa che - del resto - era già stata analizzata da H. L. HELMHOLTZ (1821 – 1894), senza tuttavia che si giungesse alla precisione ed alla chiarezza per le quali il "Programma di Erlangen" di Klein va giustamente celebre (H. L. Helmholtz, Opere scelte, a cura di V. Cappelletti, UTET, Torino, 1967).

In quest'ordine di idee si potrebbe dire che la topologia, nei suoi inizi, mette in evidenza la ricerca di una razionalizzazione delle nostre esperienze, per quanto riguarda i rapporti spaziali dei solidi e in generale dei corpi che ci circondano, tenendo conto delle idee che trovano la loro origine nelle esperienze visive; non a caso queste ricerche vengono classificate dai geometri francesi dell'epoca sotto il nome di *Géométrie de situation*; espressione che potrebbe anche essere considerata come equivalente all'espressione euleriana *analysis situs*. Questo modo di esprimersi viene utilizzato in epoca lievemente posteriore da L. N. CARNOT (1753 - 1823), proprio in relazione a certi contesti in cui le operazioni di misura delle lunghezze, dei volumi e delle aree passano in seconda linea rispetto alle proprietà che riguardano soltanto la mutua posizione delle parti delle figure che si analizzano e quindi sono fondate sulle sole sensazioni visive.

2. Indipendentemente dalle considerazioni esposte, appare interessante ricordare il lavoro di Alexandre Théophile VANDERMONDE (1735 – 1796), pubblicato nel 1771 (Histoire de l'Académie Royale des Sciences - Paris. Pagg. 566-574).

Già il titolo della breve Memoria è significativo: *Remarques sur les problèmes de situation*. L'Autore inizia il suo lavoro con le frasi seguenti: "Quelles que soient les circonvolutions d'un ou de plusieurs fils dans l'espace, on peut toujours en avoir une expression par le calcul des grandeurs; mais cette expression ne seroit d'aucun usage dans les arts. L'ouvrier qui fait une tresse, un réseau, des noeuds, ne les conçoit pas par les rapports de grandeur, mais par ceux de situation; ce qu'il voit, c'est l'ordre dans le quel sont entrelacés les fils. Il seroit donc utile d'avoir un système de calcul plus conforme à la marche de l'esprit de l'ouvrier, une notation qui ne représentât que l'idée qu'il se forme de son ouvrage, et qui pût suffire pour en refaire un semblable dans tous les temps."

Il V. prosegue proponendo sostanzialmente un sistema di coordinate spaziali che potrebbe essere descritto nel modo seguente con linguaggio moderno: considerata una terna di assi coordinati cartesiani, si



566 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

REMARQUES
SUR LES
PROBLÈMES DE SITUATION.
Par M. VANDERMONDE.

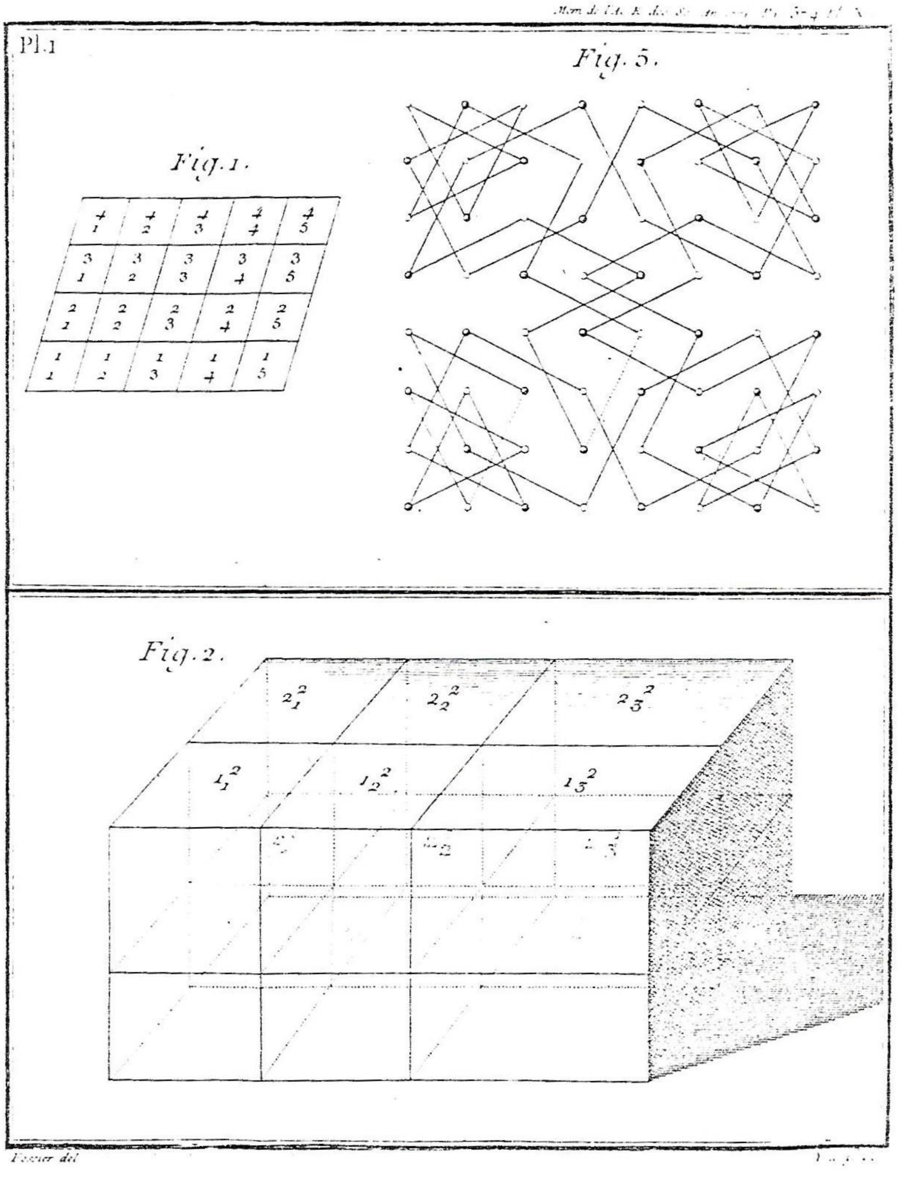
4 Mai 1771. QUELLES que ſoient les circonvolutions d'un ou de pluſieurs fils dans l'eſpace, on peut toujours en avoir une expreſſion par le calcul des grandeurs; mais cette expreſſion ne ſeroit d'aucun uſage dans les Arts. L'ouvrier qui fait une *treſſe*, un *réſeau*, des *nœuds*, ne les conçoit pas par les rapports de grandeur, mais par ceux de ſituation: ce qu'il y voit, c'eſt l'ordre dans lequel ſont entrelacés les fils. Il ſeroit donc utile d'avoir un ſyſtème de calcul plus conforme à la marche de l'eſprit de l'ouvrier, une notation qui ne repréſentât que l'idée qu'il ſe forme de ſon ouvrage, & qui pût ſuffire pour en refaire un ſemblable dans tous les temps.

Mon objet ici n'eſt que de faire entrevoir la poſſibilité d'une pareille notation, & ſon uſage dans les queſtions ſur des tiſſus de fils. Je me ſervirai, pour expoſer mon idée, d'un Problème qui ſe rapporte à ce genre, & qui eſt très-connu, celui de la *marche du cavalier des échecs*, qui a été réſolu par M. Euler, *Mémoires de Berlin*, 1759. Le procédé de ce grand Géomètre ſuppoſe qu'on a *l'échiquier* ſous les yeux; je le réduis à une ſimple opération d'Arithmétique, faite ſur des nombres qui ne repréſentent point des quantités, mais des rangs dans l'eſpace.

Les nombres nombrans, *un*, *deux*, *trois*, &c. ont été les ſeuls ſoumis au calcul, juſqu'au moment où Viète parut: il y ſoumit les nombres généraux, *l'un*, *un autre*, *un troiſième*, &c. qu'il déſigna par les lettres de l'alphabet; & ce fut l'époque d'une révolution dans les Mathématiques. Quant aux nombres ordinaux, *le premier*, *le ſecond*, *le troiſième*, &c. que Léibnitz introduiſit dans les calculs ordinaires, & que je propoſe ici d'appliquer aux recherches ſur les Situations, ils ne paroiſſent pas avoir encore fixé ſuffiſamment l'attention des Géomètres.

considera il reticolo dei punti a coordinate intere e positive: si ottiene così il risultato di reticolare lo spazio in tanti "cubetti", ciascuno dei quali è determinato da una terna di interi (figura 2). Egli prosegue poi rappresentando certe trecce spaziali con il suo metodo; e risolvendo anche in particolare un problema riguardante la scacchiera piana ed il salto del cavallo, o il movimento di altri pezzi del gioco degli scacchi.

Non è nostra intenzione analizzare qui le questioni proposte e risolte, né il valore delle soluzioni avanzate; ci interessa invece fare qualche osservazione di carattere storico, in coerenza con quanto abbiamo scritto poco fa a proposito della nascita di una nuova branca della matematica. Ci pare invero che dal passo che abbiamo citato emergano in modo più o meno chiaro le consapevolezze che ci interessa sottolineare.



Anzitutto il Nostro osserva esplicitamente che possono esistere dei problemi nei quali l'interesse preminente non è quello riguardante le misure delle grandezze geometriche (lunghezze, angoli, aree, volumi ed in generale tutte quelle che interessavano la geometria a quell'epoca), ma soltanto la reciproca posizione degli enti considerati. Possiamo anche osservare che la scelta di un sistema cartesiano non è strettamente collegata con l'ipotesi che questo debba avere necessariamente gli assi perpendicolari: infatti nella figura 1 allegata alla nota il sistema è scelto in modo da avere gli assi obliqui; inoltre la considerazione dei soli punti a coordinate intere, o meglio, il fatto di avere frazionato lo spazio in piccoli cubetti (figura 2) dimostra abbastanza chiaramente, a nostro parere, che nella visione intuitiva che l'A. si faceva, il filo che egli considera non ha importanza per la sua lunghezza o per la sua forma: ha solo importanza che questo penetri nel cubetto da una faccia determinata e ne esca da un'altra, pure ben determinata; in altre parole, il filo nell'interno potrebbe essere comunque deformato senza che cessi la validità della trattazione, così come questa non è inficiata dal fatto che la scacchiera sia perfettamente quadrata, con caselle quadrate, oppure abbia le caselle rappresentate da parallelogrammi. Si potrebbe vedere in queste intuizioni il germe della ricerca di invarianti, che in seguito C. F. GAUSS sviluppò da pari suo con la determinazione degli invarianti di annodamento di due circuiti nello spazio tridimensionale, e che dette luogo da una parte alla trattazione kleiniana classica e dall'altra a quella branca della topologia che porta oggi il nome di teoria dei nodi e delle trecce.

In secondo luogo è interessante il fatto che il Nostro si dia direttamente alla ricerca di un sistema di simboli, di notazioni, che possa dar luogo ad un *calcolo*, prendendo questa parola nel senso più generico del termine. Infatti lo scopo dichiarato del V. è non soltanto quello di poter rappresentare convenzionalmente le trecce e gli annodamenti, ma anche e soprattutto quello di poter utilizzare le leggi proprie delle convenzioni adottate (quella che si potrebbe chiamare la sintassi interna dei simboli) per potere scoprire altre proprietà delle configurazioni studiate, o anche al limite scoprirne delle nuove.

3. Da quanto appare nelle biografie del VANDERMONDE non pare che egli abbia ulteriormente sviluppato tali idee; né pare che gli storici che si sono occupati di questo Autore abbiano fatto attenzione a quanto fossero importanti il valore ed il significato di queste sue idee. Infatti il NIELSEN [(Niels Nielsen, *Vandermonde*, in *Géomètres Français sous la revolution* (Copenhagen, 1929)] dedica molto spazio ed attenzione alla Memoria del Nostro rivolta alla risoluzione delle equazioni algebriche, problema di cui si occupava a quel tempo anche J. L. LAGRANGE (1736-1813), e che doveva trovare una risposta in certo modo definitiva nelle ricerche di P. RUFFINI (1765-1822), H. ABEL (1802 – 1829) e poi di E. GALOIS (1811 – 1832). Ma il NIELSEN non dedica alcun interesse alla nota da noi illustrata, della quale si libera con le poche parole seguenti (nostra traduzione): …*Passiamo sotto silenzio la piccola nota dedicata a certi problemi di situazione*.

Non intendiamo con questo giudicare gli storici, ma semplicemente far rilevare come spesso lo sviluppo posteriore della scienza può gettare delle luci diverse sui giudizi storici, mettendo in evidenza la fecondità di certe intuizioni e l'importanza di certi inizi che a prima vista potrebbero essere giudicati trascurabili e indegni di attenzione. Del resto la posizione non è

comune a tutti, perché CARNOT richiama fugacemente VANDERMONDE proprio a proposito di queste sue ricerche pionieristiche di topologia.

Alcuni riferimenti:

VANDERMONDE. È citato da Karl FINK (Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementarmathematik (Tubinger - 1890) (MI-Ist. Mat. V-95). Cita Vandermonde con i nomi di Charles Auguste (e non Alexandre Théophile). Tuttavia le date di nascita e morte coincidono (1735-1796), così lo stato di Direktor des Conservatoire pour les Arts et Métiers al momento della morte. (Cfr. N° 144 a pag. 244). Probabilmente si potrebbe pensare che essendo il Vandermonde un rivoluzionario arrabbiato, abbia cambiato i suoi nomi di Alexandre Théophile negli altri più “rivoluzionari” di Charles Auguste.

KLEIN F. Vorlesungen über die Entwiklung der Mathematik in 19 Jahrhundert. Chelsea. New York. 1917.

MI Ist. Mat. V 768 Non nomina neppure il Vandermonde.

NdR. (1)

- La Memoria si può leggere in rete all’indirizzo:

https://www.scribd.com/document/355914469/0-Vandermonde-Alexandre-Theophile-1771-Remarques-sur-les-problemes-de-situation-Memoires-de-l-Academie-royale-des-sciences-p-566-pdf

- Per documentazione:

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Vandermonde.html

Un exemple de multidisciplinarité: Alexandre Vandermonde (1735-1796) [article] -Jacqueline Hecht-Population Année 1971 26-4 pp. 641-676
https://www.persee.fr/doc/pop_0032-4663_1971_num_26_4_5292

- Citiamo da http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830904438.html

“According to Maxwell, Vandermonde’s second paper was cited in one of Gauss’s notebooks, along with some work of Euler, as being one of two attempts to extend the ideas of Leibniz on the geometry of situation or analysis situs. The paper dealt with the knight’s tour and involved the number of interweavings of curves, which Gauss then represented by a double integral and associated with the study of electrical potential.”

- Si possono leggere nel Sito altri cenni sulle idee del V. in: C. F. Manara. *Nodi, trecce, tessuti, un capitolo della geometria*. Tessitori di Carnia [Il sapere tecnico del ”Libro di Tacamenti” di Antonio Candotto (XVIII secolo)]. Goriziana, Gorizia, 1991, pp. 261-272
- Su Eulero, si può leggere nel Sito *Eulero matematico*. (Conferenza tenuta in un corso di Postformazione STS alla Scuola di Ingegneria del Cantone Ticino, nell'anno scolastico 1995/96)

NdR. (2) Le note dattiloscritte di CFM sopra rieditate, datate 1978, divennero l'introduzione della tesi di laurea di Graziella Mascheroni, discussa nel 1979 all'Università Statale di Milano, dal titolo: *Gli inizi della Topologia. Il contributo di Vandermonde.*

Léibnitz promit un *calcul des Situations*, & mourut ſans rien publier. C'eſt un ſujet où tout reſte à faire, & qui mériteroit bien qu'on s'en occupât.

(1.) Je conçois l'eſpace partagé en élémens finis & arbitraires, diſtingués par leur quantième; c'eſt-à-dire, 1.° que je conçois un eſpace plan, partagé par des parallèles en une ſuite de bandes, puis partagé de nouveau par une autre ſuite de parallèles qui coupent les premières; & que je diſtingue les différentes bandes par la dénomination de première, deuxième, troiſième, quatrième, &c. dans l'une & dans l'autre diviſion. Je puis déſigner alors un point déterminé, comme appartenant à l'un quelconque des parallélogrammes nés de cette double diviſion, en poſant ſimplement l'un au-deſſus de l'autre, deux nombres, dont l'un ſoit le quantième de la première diviſion, & l'autre, celui de la ſeconde. Ainſi ${}^{3}_{4}$, par exemple, appartient au parallélogramme qui eſt commun à la quatrième bande dans la première diviſion, & à la troiſième dans la ſeconde. *Voyez figure 1.* Je conçois 2.° un eſpace ſolide partagé d'abord par des plans parallèles en une ſuite de tranches, puis partagé de nouveau par une autre ſuite de plans parallèles qui coupent les premiers, & enfin partagé une troiſième fois par une nouvelle ſuite de plans parallèles qui coupent les uns & les autres; & je puis déſigner par 1^{2}_{3}, par exemple, un point déterminé, comme appartenant au parallélipipède commun à la troiſième tranche dans la première diviſion, à la deuxième tranche dans la ſeconde, & à la première dans la troiſième. *Voyez figure 2.*

(2.) En général, trois nombres aſſemblés ainſi, c^{b}_{a}, déſignant un certain lieu dans l'eſpace, comme compris entre des limites données, une ſuite de pareilles expreſſions c^{b}_{a}, $\mathrm{c}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{a}}$, γ^{β}_{α} . . . . . peut ſervir à aſſigner une route dans l'eſpace, ou bien le cours d'un fil; & ſuivant qu'on aura beſoin de plus ou moins de préciſion, on reſſerrera plus ou moins les limites, & l'on ſous-entendra plus ou moins de paſſages à travers les parallélipipèdes contigus.

C'eſt ainſi, par exemple, qu'en ſuppoſant le fil médiocrement

flexible & abandonné en liberté, excepté dans les points déſignés ci-après, on aura, ce me ſemble, une expreſſion ſuffiſante de la *treſſe, fig. 3,* au moyen de la ſuite

$$2^{3}_{2},\ 1^{2}_{3},\ 2^{1}_{3},\ 1^{1}_{1},\ 2^{2}_{1},\ 1^{3}_{2},\quad 2^{3}_{4},\ 1^{2}_{5},\ 2^{1}_{5},\ 1^{1}_{3},\ 2^{2}_{3},\ 1^{3}_{4}\ldots\ldots$$

On aura de même l'expreſſion d'un ſyſtème de *mailles de bas, fig. 4,* au moyen des ſuites

$$2^{4}_{1},\ 1^{3}_{1},\ 1^{2}_{1},\ 2^{1}_{1},\ 2^{1}_{2},\ 1^{2}_{2},\ 1^{3}_{2},\ 2^{4}_{2},\quad 2^{4}_{3},\ 1^{3}_{3},\ 1^{2}_{3},\ 2^{1}_{3}\ldots\ldots$$

$$2^{6}_{1},\ 1^{5}_{1},\ 1^{4}_{1},\ 2^{3}_{1},\ 2^{3}_{2},\ 1^{4}_{2}\ldots\ldots$$

$$2^{8}_{1},\ldots\ldots$$

&c.

On doit ſentir qu'il ne faudroit pas beaucoup de complication dans des expreſſions de ce genre, pour qu'il devînt impoſſible d'y ſuppléer par un diſcours ou par un deſſin; & je ferai voir ci-deſſous, comment, par un procédé mécanique, on pourroit toujours reproduire & ſe repréſenter l'eſpèce de tiſſu qu'elles indiqueroient.

Voici maintenant un eſſai de l'uſage de cette façon de noter dans les queſtions auxquelles les circonvolutions de fils peuvent donner lieu.

(3.) Faire parcourir au *cavalier* toutes les caſes de l'*échiquier* ſans paſſer deux fois ſur la même, ſe réduit à déterminer une certaine trace du *cavalier* ſur l'*échiquier*, ou bien, en ſuppoſant une épingle fixée au centre de chaque caſe, à déterminer le cours d'un fil paſſé une fois autour de chaque épingle, d'après une loi dont nous allons chercher l'expreſſion. *Voyez fig. 5.*

(4.) ${}^{b}_{a}$ déſignant une caſe quelconque de l'*échiquier*, a & b ne peuvent avoir pour valeur que l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Deux poſitions immédiatement ſucceſſives d'une *pièce* du jeu d'*échecs*, étant ${}^{b}_{a}$. ${}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{a}}$, la *marche* de cette *pièce* eſt une condition entre a & a, b & b.

La

La *tour*, par exemple, poſée ſur la caſe ${}^{b}_{a}$, peut aller de-là ſur toute caſe ${}^{b}_{(a+m)}$, ou bien ${}^{(b+m)}_{a}$, m étant un nombre entier poſitif ou négatif, tel que $a + m$, ou $b + m$ ne ſoit ni < 1, ni > 8.

Le *fou* poſé auſſi ſur cette caſe ${}^{b}_{a}$, peut aller ſur toute caſe ${}^{(b+m)}_{(a\pm m)}$.

Le *cavalier* peut aller de ${}^{b}_{a}$ en ${}^{(b\pm 1)}_{(a\pm 2)}$, ou en ${}^{(b\pm 2)}_{(a\pm 1)}$: & ainſi des autres *pièces*.

(5.) Faire parcourir au *cavalier* toutes les caſes de l'*échiquier* ſans paſſer deux fois ſur la même, c'eſt donc ranger de ſuite les ſoixante-quatre termes

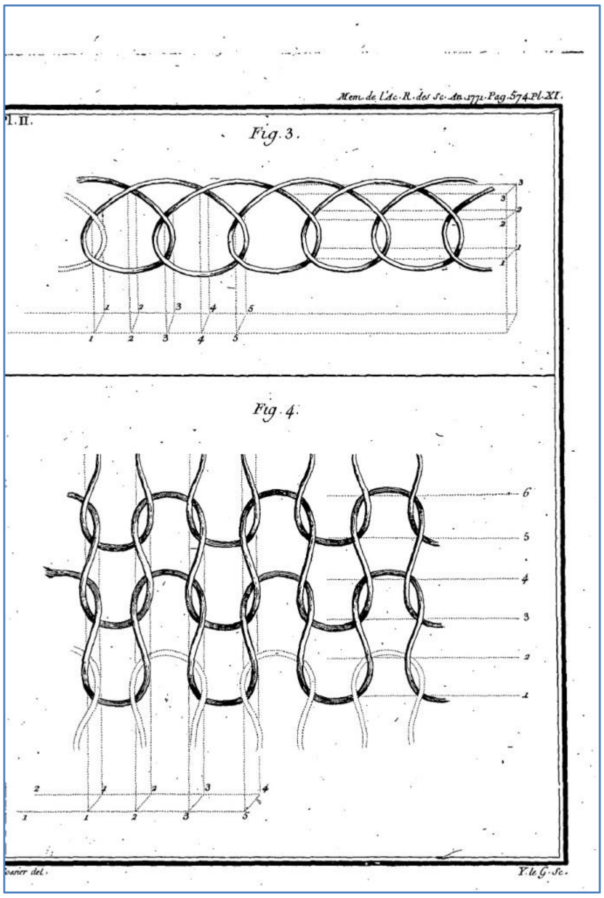
$${}^{1}_{1}\ {}^{1}_{2}\ {}^{1}_{3}\ {}^{1}_{4}\cdots\ {}^{2}_{1}\ {}^{2}_{2}\ {}^{2}_{3}\cdots\cdots\ {}^{3}_{1}\ {}^{3}_{2}\cdots\cdots\cdots\ {}^{8}_{8}\cdots$$

dans un ordre tel qu'il règne par-tout cette loi entre deux termes contigus, que la différence entre les nombres ſupérieurs étant 1, la différence entre les inférieurs ſoit 2, ou la différence entre les nombres ſupérieurs étant 2, celle entre les inférieurs ſoit 1: *Voyez l'exemple ci-après, article (11).*

(6.) On pourroit prendre une ſuite de ſoixante-quatre termes, tous indéterminés, ${}^{b}_{a}$, ${}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{a}}$, ${}^{\beta}_{\alpha}$, ... & en impoſant un certain nombre de nouvelles conditions, pour diminuer le nombre d'alternatives entre les valeurs à donner aux lettres a, a, α, . . . b, b, β, . . . on pourroit traiter ce Problème par analyſe; je ne m'occuperai point de cette conſidération, il ſuffit qu'on remarque qu'en effet ceci ramène la queſtion à l'analyſe ordinaire.

(7.) En cherchant à rapprocher de la forme ſymétrique, la trace cherchée du *cavalier*, on facilite la ſolution: c'eſt ſous ce point de vue que je vais la préſenter.

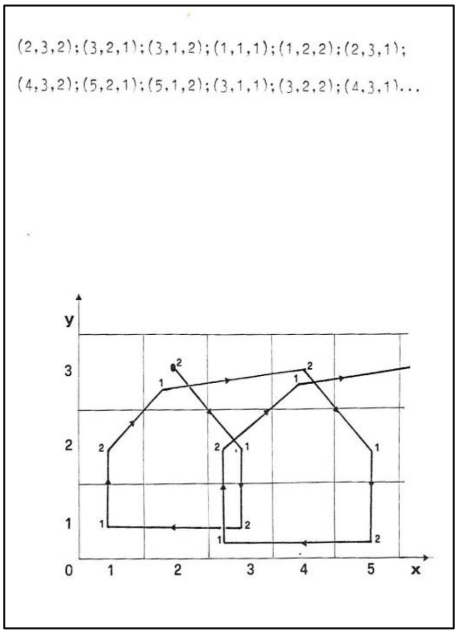
La trace du *cavalier* feroit une figure ſymétrique, ſi, changeant ici dans l'expreſſion de ſa *marche* 8 en 1, 7 en 2, 6 en 3,



La Tesi contiene un'introduzione storica sulla posizione del Vandermonde rispetto alla matematica dell'epoca, e un capitolo di approfondimento sul lavoro del V. citato.

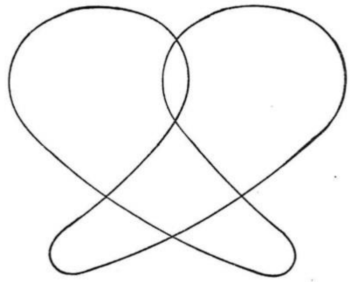
Viene fatto notare che il V. non dà alcuna indicazione circa la determinazione delle successioni che danno luogo rispettivamente alla treccia e alla maglia da calza, forse – viene suggerito – perché l'A. ha maturato le sue teorie avvalendosi più dell'intuizione che di un procedimento di calcolo rigoroso. Il procedimento di calcolo è invece presente nell'esempio successivo, che non riguarda gli annodamenti, ma il problema del "Salto del cavallo", di cui il V. dà un'ingegnosa soluzione. Si commenta che certamente il Vandermonde, come Eulero circa un trentennio prima, aveva intuito la nascita di nuovi metodi di ricerca geometrica, e la necessità di utilizzare simboli e notazioni attraverso un calcolo da applicare a situazioni più generali.

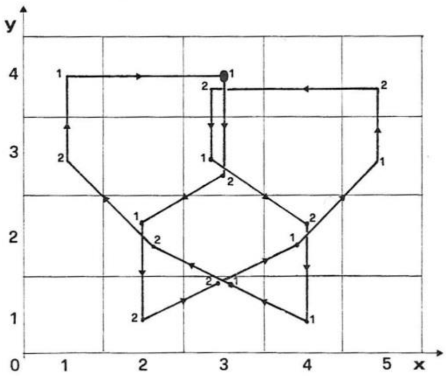
Per quanto riguarda la simbologia usata dal V., nella Tesi si propone di interpretare la terna di numeri interi c_a^b, che individua una posizione nello spazio interno al parallelepipedo limitato dai piani paralleli della triplice divisione corrispondenti ad a, b, c rispettivamente, come terna di coordinate (x, y, z) dello spazio in un sistema di assi cartesiani ortogonali, leggendo i numeri c_a^b dal basso in senso antiorario. La successione proposta dal V. sarà pertanto una successione (finita o infinita) di coordinate, ovvero una successione di punti che danno luogo all'annodamento considerato; si può visualizzare la rappresentazione proiettando gli annodamenti proposti dal V. su un piano xy e rappresentando la coordinata z con un numero a fianco di ogni vertice del nodo che ne determina l'altezza. Si avranno così per la Treccia la rappresentazione a sinistra, e per alcuni semplici nodi le notazioni proposte nelle figure delle pagine seguenti, che sono affiancate dalla rappresentazione con simbologia moderna. L'ultima figura si riferisce alla Maglia da calza.

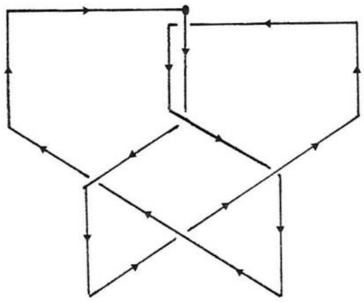


Rappresentazione di Vandermonde reinterpretata per la Treccia

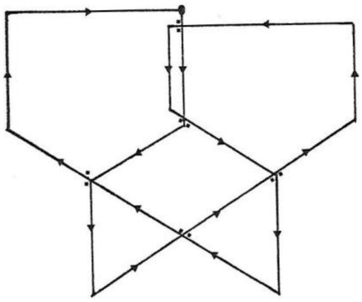
(3,4,1):(3,3,2):(2,2,1):(2,1,2):(3,1,2):(4,2,1):(5,3,1)
(5,4,2):(3,4,2):(3,3,1):(4,2,2):(4,1,1):(3,1,1):(2,2,2)
(1,3,2):(1,4,1):(3,4,1).





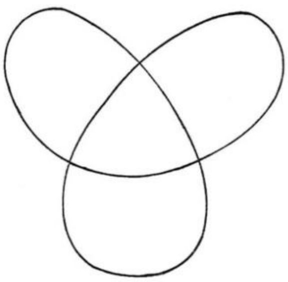


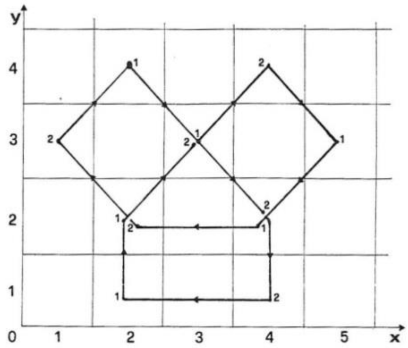
1º tipo

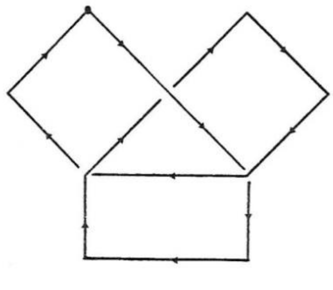


2º tipo

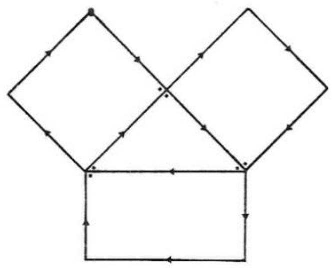
(2,4,1):(3,3,1):(4,2,2):(4,1,2):(2,1,1):(2,2,1):(3,3,2):
(4,4,2):(5,3,1):(4,2,1):(2,2,2):(1,3,2):(2,4,1).





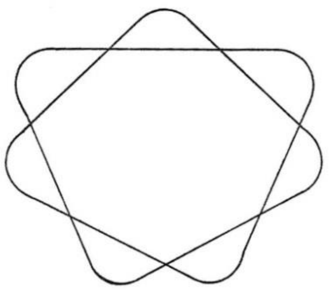


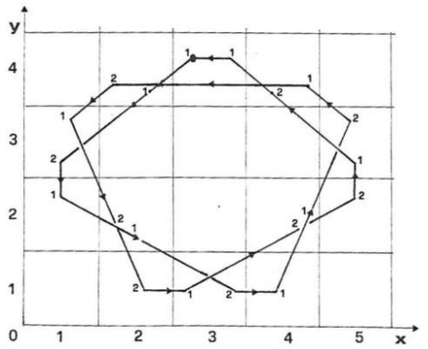
1º tipo

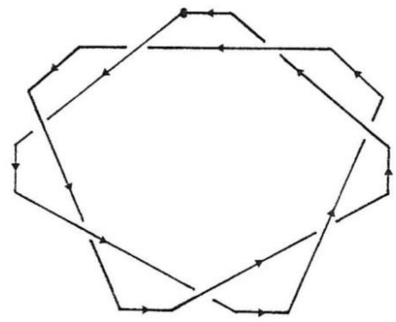


2º tipo

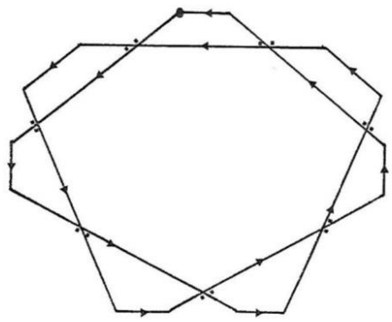
(2,4,1):(1,3,2);(1,2,1):(2,2,1):(3,1,2):(4,1,1)·(4,2,1):
(5,3,2):(4,4,1)·(2,4,2):(1,3,1):(2,2,2)·(2,1,2)·(3,1,1)·
(4,2,2):(5,2,2)·(5,3,1):(4,4,2):(3,4,1):(2,4,1).





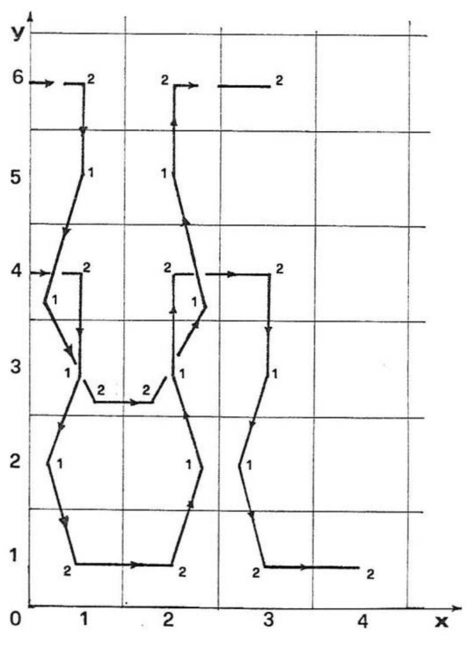


1º tipo



2º tipo

(142);(131);(121);(112);(212);(221);
(231);(242);(342);(331);(321);(312)
(162);(151);(141);(132);(232);(241).....



(2,3,2);(3,2,1);(3,1,2);(1,1,1);(1,2,2);(2,3,1);
(4,3,2);(5,2,1);(5,1,2);(3,1,1);(3,2,2);(4,3,1)...