CARLO FELICE MANARA

TOPOLOGIA

Estratto dal vol. I del

REPERTORIO DI MATEMATICHE

a cura di M. VILLA

PADOVA

CEDAM - CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI

1969

IV

TOPOLOGIA

DI

CARLO FELICE MANARA

1. - Introduzione. — Le origini della Topologia si fanno risalire abitualmente agli studi di B. RIEMANN sulle superficie (che portano ancora oggi il nome di riemanniane) che Egli escogitò per rappresentare in forma geometrica il comportamento delle funzioni di una variabile complessa. Tuttavia alcuni teoremi classici, che risalgono al secolo XVIII, sono senza dubbio da ascriversi alla Topologia, sia per quanto riguarda i contenuti che per quanto attiene ai metodi di dimostrazione: alludiamo per es. al teorema di EULERO, riguardante i poliedri che oggi vengono chiamati euleriani, ed al classico risultato riguardante il problema che viene richiamato abitualmente con la denominazione di « problema dei ponti di Köenigsberg ».

Il progresso della Matematica che si ebbe nella seconda metà del sec. XIX e soprattutto l'influenza delle idee che sono alla base del classico « Programma di Erlangen » di Klein (ved. Art. V, n. 14) condussero gradatamente allo studio delle proprietà topologiche delle figure considerate come invarianti rispetto alle trasformazioni di un determinato gruppo, e precisamente rispetto alle trasformazioni che hanno la proprietà di essere biunivoche e continue.

Per es. il famoso teorema di EULERO sui poliedri, testè ricordato, afferma che, indicato con V il numero dei vertici, con F il numero delle faccie e con S il numero degli spigoli di un poliedro convesso sussiste tra i tre numeri la relazione

$$F - S + V = 2\,. \tag{1.1}$$

Orbene, appare evidente che questa proprietà non dipende dal fatto che le faccie del poliedro siano piane e che gli spigoli siano rettilinei; può benissimo sussistere anche qualora si immagini una superficie chiusa bilatera e si immagini un « reticolato » tracciato su di essa. Ovviamente tale reticolato deve essere tale da avere come « faccie » delle porzioni di superficie del tipo « pezzo », tali cioè da potersi pensare ottenute mediante deformazione continua, senza lacerazioni e duplicazioni, da un cerchio; i « lati » devono essere archi di linea regolare, non intersecantisi tra loro in punti diversi dai « vertici », e privi di singolarità.

Allora il teorema espresso dalla (1.1) può essere generalizzato nel seguente:

$$F - V + S = 2 - 2p \tag{1.2}$$

essendo p un numero intero che non dipende dal reticolato considerato, ma soltanto dalla superficie e che viene chiamato « genere » della superficie stessa.

Si accetta come un dato della intuizione il fatto che tale carattere numerico non varia quando si sottoponga la superficie ad una deformazione continua, senza lacerazioni o duplicazioni.

Oltre al teorema citato, tra i risultati classici che riguardano questioni di Topologia, ricordiamo la scoperta della esistenza di superficie « unilatere » ovvero « non orientabili », i risultati riguardanti i « nodi » e le « trecce » nello spazio tridimensionale, e quelli riguardanti i « grafi » (che qualche Autore chiama « singrammi »); ricordiamo infine la massa di studi collegati con il classico « problema dei quattro colori ». Si fa risalire alle ricerche ricordate (alcune delle quali hanno dato origine ad interi capitoli della Topologia moderna) la origine di quella che oggi è chiamata Topologia algebrica; tra i fondatori di questo ramo della Topologia è abitualmente annoverato H. POINCARÉ, per le Sue memorie sulla « Analysis situs ».

Ciò che abbiamo detto fin qui fa intuire abbastanza bene il modo in cui si concepiva, fino a qualche decennio fa, questa dottrina: quasi come una « Geometria qualitativa », cioè come una sistemazione logica delle proprietà delle figure che risultano essere invarianti qualora si immagini ogni figura realizzata con materiale infinitamente deformabile e la si sottoponga ad una deformazione continua che non faccia intervenire lacerazioni o duplicazioni: in tal modo le nozioni classiche della Geometria elementare, che sottintendono l'invarianza rispetto al gruppo dei movimenti rigidi e delle similitudini, non risultano applicabili; tuttavia qualche proprietà delle figure si conserva: si ha per es. che due curve dello spazio tridimensionale, che si immaginano realizzate materialmente mediante fili infinitamente estendibili e flessibili, rimangono annodate, ovvero concatenate tra loro qualunque sia la deformazione a cui vengono sottoposte, purchè tale deformazione non giunga sino a lacerare qualcuna delle curve. Analogamente, come già abbiamo detto, un « reticolato » tracciato su una superficie conserva il numero dei suoi

« lati » delle sue « faccie » e dei suoi « vertici » qualora la superficie stessa venga deformata, senza lacerarla o senza far entrare in contatto due punti che prima erano separati.

Vedremo che nelle concezioni moderne della Topologia si giunge ad inquadrare rigorosamente quel concetto di deformazione continua che nelle trattazioni classiche era lasciato alla intuizione, la quale lo traeva dalla esperienza esterna; si giunge quindi a formalizzare in modo ineccepibile la ricerca di quegli invarianti che sono stati considerati argomento di studio proprio della Topologia fin dai primi passi dello sviluppo di questa scienza.

Vogliamo qui ricordare un altro campo di ricerca della Matematica del secolo scorso che abitualmente si considera come origine di un secondo ramo importante della moderna Topologia: vogliamo alludere al campo delle ricerche sul continuo. In questo ordine di idee si suol far risalire l'origine di quel ramo della Topologia che viene abitualmente indicato come « Topologia degli insiemi di punti » (Point-set Topology) alle ricerche di G. CANTOR sulla teoria degli insiemi.

Lo svolgimento del pensiero matematico moderno si attua in un modo tale da conferire alla Topologia una importanza sempre crescente. Essa appare ogni giorno di più come il coronamento degli studi che si iniziarono nel secolo scorso e che portarono il rigore nella Analisi matematica classica, e come la scienza che permette di esprimere in forma compatta e coerente le nostre conoscenze fondamentali sullo spazio che ci circonda.

In questo ordine di idee è comprensibile il fatto che alcuni espositori non si accontentino di considerare la Topologia come « Geometria qualitativa » ma addirittura la chiamino « Matematica qualitativa », volendo indicare così il fatto che la Topologia può essere considerata come fondamento tanto della Geometria classicamente intesa, che della Analisi matematica, quasi precedendo, per queste due scienze, gli sviluppi che portano alla introduzione dei concetti di numero e di misura.

2. — Nelle esposizioni elementari di Topologia si usa prender le mosse dalla osservazione del fatto che tra le nozioni fondamentali della Analisi matematica sta quella di *limite* e che questa a sua volta si può ritenere basata sul concetto di *distanza*. Invero si consideri, a titolo di esempio, il campo dei numeri reali, che indicheremo con il simbolo R; per introdurre un linguaggio del quale ci varremo anche nel seguito, riferendoci alla nota immagine geometrica, parleremo anche di R come della *retta reale*, e di un elemento $x \in R$ come di un *punto* sulla retta reale.

Considerata una successione di punti di R

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{2.1}$$

come è noto, secondo la abituale definizione, si dice che la successione (2.1) tende al limite y e si scrive:

(2.2) $$\lim_{n\to\infty} x_n = y$$

se, comunque si scelga un ε reale positivo, esiste un indice $\bar{n}$, funzione di ε, tale che la relazione

(2.3) $$| y - x_n | < \varepsilon$$

valga qualunque sia l'indice n purchè sia

(2.4) $$n > \bar{n} \ .$$

Questa ben nota definizione traduce in modo rigoroso la nozione che, in modo vago ed impreciso, veniva talvolta espressa dicendo che i punti della successione (2.1), al crescere dell'indice n, *si avvicinano indefinitamente* ad y. Precisamente ci interessa osservare che per esprimere questa circostanza dell'*avvicinamento* ci si serve del valore assoluto della differenza

(2.5) $$| y - x_n |$$

tra il punto limite y ed il punto x_n della successione.

Osserviamo che la (2.5) dà una applicazione del prodotto cartesiano $R \times R$ sull'insieme dei numeri reali non negativi (ved. Art. II, n. 5), tale che il valore della funzione (2.5) può essere assunto come misura della *distanza* tra due punti.

Analoghe considerazioni possono essere svolte quando si consideri una n-pla ordinata di numeri reali:

(2.6) $$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \qquad (x_i \in R)$$

come un punto x di uno spazio numerico ad n dimensioni R^n (ved. Art. V, n. 10). Considerata una successione di punti cosiffatti

(2.7) $$x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^r,\ \ldots$$

si suol dire che un punto $y \in R^n$ è *punto limite* per la successione (2.7) se si può definire una proprietà di *avvicinamento indefinito* del punto della successione (2.7) al punto y, la quale si esprime in modo perfettamente analogo a quella precedente, essendo tuttavia ora la distanza tra il punto $y \in R^n$ dato da

$$y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$$

ed il punto x^i della successione, espressa da

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k^i)^2}\,. \tag{2.8}$$

Pertanto, anche questa volta, la (2.8) stabilisce una applicazione del prodotto cartesiano $R^n \times R^n$ nei reali non negativi che è atta a dare una immagine della *distanza* ovvero anche della *vicinanza* di due punti.

È facile constatare che in termini analoghi si possono enunciare anche le classiche proprietà che riguardano le funzioni reali di una o di più variabili reali, che vengono trattate nei corsi elementari di Analisi matematica.

Come è noto, nelle trattazioni abituali, dal concetto di *distanza* ora ricordato, tra due punti di uno spazio numerico R^n, si passa facilmente al concetto di *intorno* di raggio δ (positivo) di un dato punto $y \in R^n$; si definisce così l'insieme dei punti $x \in R^n$ tali che la loro distanza da y è inferiore al δ considerato.

Infine, dal concetto di intorno di un punto $y \in R$, si passa alla definizione di *punto limite* o *punto di accumulazione* di punti di un insieme $\mathfrak{J}$ di R^n; in tal modo si passa facilmente alla definizione di insieme *chiuso*, di insieme *aperto*, di *frontiera* di un insieme ecc.

Precisamente ricordiamo che un punto $y \in R^n$ si dice *punto limite* ovvero *punto di accumulazione* per un insieme $\mathfrak{J}$ se in ogni intorno di y esistono punti di $\mathfrak{J}$; il punto y si dice *interno* ad $\mathfrak{J}$ se esiste almeno un intorno di y i cui punti appartengono tutti ad $\mathfrak{J}$; il punto y si dice *esterno* rispetto ad $\mathfrak{J}$ se esiste almeno un intorno di y tale che nessun punto di esso appartiene ad $\mathfrak{J}$; infine y si dice *punto di frontiera* per $\mathfrak{J}$ se in ogni intorno di y esistono punti appartenenti ad $\mathfrak{J}$ e punti non appartenenti ad $\mathfrak{J}$.

Poste queste definizioni, si chiama *chiuso* un insieme $\mathfrak{J}$ se ad $\mathfrak{J}$ appartiene ogni suo punto di accumulazione, aperto nel caso contrario.

3. — Abbiamo visto nel n. precedente come, considerato lo spazio R^n i cui elementi sono le n-ple ordinate di numeri reali

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{3.1}$$

la nozione di punto limite di una successione di punti e quella di punto di accumulazione di un insieme $\mathfrak{J}$ (così come le altre che riguardano le funzioni continue e gli ulteriori concetti usualmente trattati dall'Analisi matematica classica) sono essenzialmente basate sulla nozione di *distanza* tra due punti x ed y di R^n essendo tale distanza definita abitualmente secondo la formula

$$(3.2) \qquad d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} .$$

Queste considerazioni conducono ad una prima facile generalizzazione di questi concetti e portano alla introduzione del concetto di *spazio metrico* (cfr. Art. V, n. 7).

Si suol chiamare così un insieme S di elementi, che vengono convenzionalmente chiamati *punti*, tale che esista una funzione reale d, definita sul prodotto cartesiano $S \times S$ (cioè, in altre parole, una funzione delle coppie ordinate degli elementi di S) che viene chiamata distanza, e che gode delle seguenti fondamentali proprietà:
indicati con x, y, z degli elementi di S si ha

$$(3.3) \qquad d(x, y) \geqq 0 \quad ;$$

$$(3.4) \qquad d(x, y) = 0$$

è condizione necessaria e sufficiente perchè x ed y coincidano;

$$(3.5) \qquad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(3.6) \qquad d(x, y) \leqq d(x, y) + d(y, z) .$$

La relazione (3.6) viene abitualmente chiamata *diseguaglianza triangolare*, perchè si riduce alla ben nota relazione tra le lunghezze dei lati di un triangolo avente come vertici i tre punti x, y, z dello spazio ordinario quando la distanza tra i punti sia calcolata come insegna la Geometria elementare.

Dato uno spazio metrico S, sulla base della nozione di distanza, si definisce l'intorno di raggio r di un punto $x \in S$ come l'insieme dei punti y tali che si abbia

$$(3.7) \qquad d(x, y) < r .$$

Esempio 1. — Considerato lo spazio R^n, quando si assuma come distanza tra due punti x, y il numero reale dato dalla (3.2), l'intorno di raggio r di un punto x è costituito da tutti i punti contenuti nell'ipersfera avente centro in x e raggio r.

Lo spazio metrico R^n sul quale la distanza tra due punti è definita convenzionalmente dalla (3.2) viene anche chiamato *spazio euclideo* ad

n dimensioni ed indicato con E^n (cfr. Art. V, nn. 12, 16). Invero la (3.2) appare come la ovvia generalizzazione, al caso di n coordinate, della formula che fornisce la distanza tra due punti dello spazio abituale tridimensionale mediante le coordinate cartesiane ortogonali dei punti.

Notiamo tuttavia che quella definita dalla (3.2) non è l'unica funzione che applica il prodotto cartesiano $R^n \times R^n$ sui reali non negativi in modo da soddisfare alle proprietà (3.3) ... (3.6). Si può porre per es.

$$d(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \tag{3.8}$$

oppure anche

$$d(x,\ y) = \max\{\,|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\ \ldots\ |x_n - y_n|\,\}\,. \tag{3.9}$$

Ovviamente in questi due ultimi casi l'intorno di raggio r di un punto x non ha più il significato geometrico cui abbiamo accennato.

Esempio 2. — Si può definire una distanza tra i punti di uno spazio S ponendo che si abbia $d(x,\ y) = 0$ allora ed allora soltanto che i due punti coincidono e che sia sempre $d(x,\ y) = 1$ se i due punti sono diversi.

Si verifica immediatamente che per questa nozione di distanza così definita valgono le proprietà (3.3) ... (3.6) sopra enunciate.

Ovviamente lo *spazio* S che si considera può essere un insieme di elementi qualunque, e pertanto si può verificare da qui che le nozioni che stiamo costruendo hanno validità in un campo ben più vasto di quello a cui potrebbe far pensare il linguaggio geometrico che usiamo, secondo le convenzioni comuni.

Esempio 3. — Si consideri un intervallo $I = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ della retta reale R e sia C lo spazio i cui elementi sono tutte le funzioni reali continue nell'intervallo. Indicate con $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni cosiffatte, si può definire come loro *distanza* il numero seguente

$$d(f,\ g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|\,. \tag{3.10}$$

Esempio 4. — Si consideri lo spazio i cui elementi sono le successioni

$$x = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots\} \tag{3.11}$$

di infiniti numeri reali, soddisfacenti alla condizione che ogni serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \tag{3.12}$$

sia convergente. Anche in questo caso si può definire una distanza tra due punti mediante la formula

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2} \tag{3.13}$$

Lo spazio che così si ottiene dotato della funzione distanza data dalla (3.13) appare come l'immediata generalizzazione dello spazio euclideo ad n dimensioni. (Spazio delle coordinate di HILBERT).

Gli ultimi esempi che abbiamo trattati ribadiscono la validità della osservazione che abbiamo fatto a proposito dell'Esempio 2.

4. — Nei n^i. precedenti abbiamo visto come la Analisi matematica classica fondi i suoi concetti principali sul concetto di distanza e come questo possa essere esteso anche ad insiemi per i quali il linguaggio geometrico appare del tutto convenzionale.

Ritorniamo ora brevemente a considerare la definizione di « intorno » di un punto, che abbiamo richiamata nei n^i. precedenti e che abbiamo visto essere definibile in un qualunque spazio metrico S; si può osservare che per le definizioni e le trattazioni che interessano all'Analisi matematica l'enunciato seguente « la distanza tra il punto x ed il punto y (dello spazio metrico considerato) è minore di un numero reale δ positivo » può essere sostituito dal seguente: « il punto y appartiene all'intorno del punto x avente raggio δ ».

In altre parole si potrebbe dire che il fatto che un certo punto abbia da un altro una distanza minore di un certo numero reale positivo viene tradotto con la nozione logica di appartenenza del punto y ad un certo insieme, che è univocamente determinato dal punto x e dal numero δ.

Ciò suggerisce subito la immediata e fondamentale generalizzazione che porta a svincolarsi dal concetto di *distanza* e ad assumere come concetto fondamentale quello di *appartenenza* di un punto ad un insieme di una determinata classe. Si giunge così a generalizzare il concetto di spazio metrico con quello di spazio topologico.

Questo viene introdotto prescindendo dalla nozione di distanza tra due punti, con sistemi di assiomi che permettono di dare la massima generalità ai procedimenti ed alle nozioni della Analisi.

Una delle trattazioni assiomatiche che si possono dare è la seguente (cfr. Art. V, n. 2):

si chiama *spazio topologico* un insieme S di elementi (convenzionalmente chiamati *punti*) nel quale è assegnata una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi che sono sottoinsiemi di S.

Gli insiemi della famiglia $\mathcal{F}$ vengono detti *insiemi aperti* o anche brevemente *aperti* e pertanto la famiglia $\mathcal{F}$ viene chiamata anche una famiglia di aperti.

La famiglia $\mathcal{F}$ è tale che ogni punto $x \in S$ appartenga ad almeno un insieme di $\mathcal{F}$ e che siano soddisfatte inoltre le seguenti proprietà:

1) l'insieme S è un aperto;

2) l'insieme vuoto $\varnothing$ è un aperto;

3) l'intersezione di due (ed in generale di un numero finito di) aperti è un aperto;

4) l'unione di un numero qualsiasi di aperti è un aperto.

Il fatto che ogni punto $x \in S$ appartiene ad almeno un insieme della famiglia $\mathcal{F}$ viene espresso solitamente dicendo che la famiglia $\mathcal{F}$ *ricopre* lo spazio S od anche che costituisce una *copertura* dello spazio S.

Ovviamente la scelta della famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi che ricopre lo spazio può essere fatta in vari modi; in corrispondenza ad ogni famiglia che si sceglie si dice che si stabilisce una *topologia* su S.

In particolare, con riferimento agli esempi che abbiamo trattato nei n^i. precedenti, se lo spazio S è uno spazio metrico, si può stabilire che la famiglia di aperti che lo ricopre sia quella di tutti gli intorni di ogni singolo punto di S.

In particolare si dice che su S è stata stabilita una topologia banale (che qualche Autore chiama anche triviale) se la famiglia è costituita soltanto dall'insieme S e dall'insieme vuoto $\varnothing$.

Se d'altra parte la famiglia $\mathcal{F}$ è costituita da *tutti* i sottoinsiemi di S si suol dire che è stata stabilita su S la *topologia discreta*; lo spazio S è detto anche uno spazio *discreto*.

Si noti che la assiomatizzazione che abbiamo esposta non è la sola possibile: se ne può dare una equivalente mediante insiemi che vengono chiamati *chiusi* se soddisfano alle seguenti proprietà:

1) lo spazio S e l'insieme vuoto sono degli insiemi chiusi;

2) l'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso;

3) la intersezione di un numero qualunque di insiemi chiusi è un insieme chiuso.

Poichè la topologia su uno spazio S è determinata dalla scelta della collezione di sottoinsiemi di S che vengono chiamati aperti e che costituiscono una copertura di S stesso, si affaccia subito la questione della esistenza di diverse topologie e del confronto tra esse.

Siano σ e τ due famiglie di sottoinsiemi, che dànno luogo a due topologie su S. Si dice che σ è *più fine* di τ se si ha

$$\sigma \subset \tau$$

cioè se ogni aperto di σ risulta essere anche aperto per la topologia costituita da aperti di τ. Se avviene che si abbia contemporaneamente

$$\sigma \subset \tau \quad \text{ed anche} \quad \tau \subset \sigma$$

si suol dire che le due topologie, determinate dalle famiglie σ e τ, sono equivalenti.

Per es. si verifica immediatamente che con le varie definizioni di distanza date nel n. 3 per lo spazio R^n si ottengono topologie equivalenti.

È del tutto evidente che le nozioni che abbiamo introdotte per gli spazi topologici sono più generali di quelle che riguardano gli spazi metrici e dalle quali abbiamo prese le mosse; pertanto ogni spazio metrico è anche uno spazio topologico (quando si assumano come aperti quegli intorni dei punti che sono stati definiti a partire dalla nozione di distanza tra due punti, valida per lo spazio metrico); non è vero il viceversa. Nasce anzi la importante questione se la topologia di uno spazio possa essere generata dalla nozione di una distanza tra le coppie di punti dello spazio stesso; più precisamente uno spazio dotato di topologia si dice *metrizzabile* se su di esso può essere definita una nozione di distanza tale che la topologia che così si ottiene sia equivalente alla topologia che già esiste sullo spazio.

5. — I concetti di spazio topologico e di topologia stabilita su uno spazio da una famiglia $\mathcal{F}$ di aperti conducono immediatamente a porsi la domanda se sia possibile definire la topologia, stabilita dalla famiglia $\mathcal{F}$, mediante un'altra famiglia più ristretta di aperti.

Una famiglia $\mathcal{B}$ cosiffatta si chiama una *base* per la topologia stabilita dalla $\mathcal{F}$ se essa costituisce una copertura dello spazio S e se, considerati due aperti B_α e B_β della famiglia e considerato un punto p dello spazio appartenente alla intersezione dei due aperti suddetti

$$p \in B_\alpha \cap B_\beta$$

esiste un elemento B_γ della famiglia $\mathcal{B}$ che è contenuto a sua volta nella intersezione $B_\alpha \cap B_\beta$ ed al quale appartiene p.

Per es. quando si consideri il piano euclideo E^2 (cfr. Art. V, n. 16) e la famiglia di aperti costituiti dagli insiemi di punti interni ad ogni cerchio avente centro in un punto del piano stesso (che stabilisce sul piano la topologia determinata dalla nozione abituale di distanza) si può assumere come base della famiglia la famiglia degli insiemi di punti interni ai cerchi del piano aventi raggi misurati da numeri razionali.

Si può richiedere ulteriormente che data una base $\mathcal{B}$ per la topologia dello spazio S ogni aperto di $\mathcal{B}$ si possa ottenere come intersezione di un numero finito di insiemi di una famiglia $\mathcal{C}$. Se questo avviene, la famiglia $\mathcal{C}$ si chiama una *sottobase* per la topologia di S.

Per es. se si considera la topologia del piano euclideo E^2 che si ottiene mediante la definizione di distanza che è data dalla (3.9), ogni intorno di un punto x qualunque, di raggio δ, è dato dai punti interni al quadrato che ha centro in x, lati paralleli agli assi delle coordinate e di lunghezza 2δ. È subito visto che anche in questo caso una base per la topologia considerata è fornita dai quadrati per cui δ è razionale ed una sottobase è fornita dai semipiani del piano E^2.

Si consideri infine un sottoinsieme X di uno spazio S; qualora S sia uno spazio topologico, poichè su di esso è stata definita una topologia mediante una famiglia $\mathcal{F}$ di aperti, è possibile anche stabilire una topologia su X, considerando come aperti di X gli insiemi che sono intersezioni di X stesso con gli insiemi della famiglia che determina la topologia di S. La topologia così ottenuta si chiama anche *topologia relativa* (del sottospazio X).

Così per es. considerato il piano euclideo E^2 e la topologia stabilita su di esso quando si assuma come famiglia di aperti quella degli insiemi formati dai punti interni ai cerchi di E^2, si può ottenere una topologia relativa su una retta r di E^2 considerando come aperti di r le intersezioni di r stessa con gli aperti della topologia di E^2. Si verifica immediatamente che si ottiene così la abituale topologia sulla retta, quando si assumano come aperti gli intervalli (aperti) di punti della retta.

6. — Abbiamo detto che la topologia costruita su uno spazio S a partire da una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi aperti che ne costituisce una copertura e che soddisfa alle condizioni esposte nel n. 3 costituisce una generalizzazione dei concetti fondamentali della Analisi matematica classica. Questa considerazione è stata suggerita dalla osservazione che abbiamo fatta, che cioè la introduzione del concetto di intorno di un punto x permette di sostituire l'enunciato « il punto y ha da x una distanza minore di δ » con l'enunciato: « il punto y appartiene all'intorno di x di raggio δ ». La nozione logica di appartenenza di un punto ad (almeno) un determinato insieme dipendente da x può quindi essere estesa anche al caso in cui lo spazio S che si considera risulta essere tale che non si possa definire su di esso una nozione di distanza tra due punti, ma si possa soltanto definire una famiglia $\mathcal{F}$ di aperti che ne dia una topologia.

È possibile così costruire una estensione del concetto di convergenza di una successione di punti e di punto di accumulazione di un insieme.

Invero si convenga di chiamare *intorno* di un punto x ogni aperto della famiglia $\mathfrak{F}$ che contiene x stesso; allora considerata una successione

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{6.1}$$

di punti dello spazio S, il punto x sarà detto *limite* della successione quando, scelto comunque un intorno di x, esiste un indice $\bar{n}$ tale che ogni punto della successione il cui indice n è maggiore di $\bar{n}$ appartenga all'intorno suddetto.

Analogamente, considerato un insieme X di punti di S, un punto x sarà detto *punto di accumulazione* di punti dell'insieme X (o anche brevemente punto limite dell'insieme) se in ogni intorno di x esistono punti dell'insieme stesso diversi da x.

Si possono così estendere anche ad uno spazio topologico S le abituali nozioni di insieme chiuso e di chiusura di un insieme.

Invero si può definire chiuso, anche in questo caso, un insieme X che contiene ogni suo punto di accumulazione. Indicato poi con il simbolo ∂X l'insieme formato da tutti i punti di accumulazione di un insieme X, si può chiamare *chiusura* di X ed indicare con $\bar{X}$ l'insieme

$$\bar{X} = X \cup \partial X\ . \tag{6.2}$$

Pertanto la condizione che un insieme X sia chiuso può essere espressa con la formula

$$X = \bar{X}\ . \tag{6.3}$$

Si dimostra poi, con una dimostrazione del tutto analoga a quella elementare abituale, che la operazione di chiusura, ripetuta due volte, non porta ad un insieme nuovo rispetto a quello già definito; si ha cioè

$$\bar{\bar{X}} = \bar{X}\ . \tag{6.4}$$

Invero consideriamo un punto y che appartenga all'insieme $\bar{\bar{X}}$, chiusura della chiusura di X; per definizione in ogni intorno di Y di y, cioè in ogni insieme della famiglia $\mathfrak{F}$ che costituisce una copertura dello spazio topologico S e che dà luogo alla topologia sullo spazio S, esiste almeno un punto z che appartiene alla chiusura di X; ma poichè $z \in Y$, Y stesso può anche essere considerato come un intorno di z e pertanto, ancora per definizione ad Y appartiene almeno un punto di X. Pertanto ad ogni intorno Y di y appartiene almeno un punto di X, cioè y appartiene alla chiusura $\bar{X}$ di X.

Qualora si chiami aperto un insieme che non è chiuso, indicando con il solito simbolo CX l'insieme complementare di un insieme X (rispetto allo spazio S) si dimostra facilmente che il complementare di un insieme chiuso è un insieme aperto; in altre parole dal sussistere della (6.3) si trae che CX è un insieme aperto.

7. — Le prime nozioni di Topologia su uno spazio, che abbiamo brevemente introdotte nei n[i]. precedenti, si rivelerebbero scarsamente feconde se non potessero essere prese come base per la costruzione di una teoria delle corrispondenze tra punti di due spazi, corrispondenze che possano essere analizzate mediante le nozioni stesse. Si verifica invece che la fecondità delle nozioni è data appunto dalla possibilità di estendere mediante esse il concetto di funzione, di continuità, e gli altri concetti che sono fondamentali per l'Analisi matematica.

Si considerino due spazi X e Y e sia $f: X \to Y$ una applicazione tra X ed Y, ovvero, come si suol dire, una funzione definita su X ed a valori in Y. Considerato un sottoinsieme X' di X, indichiamo con

$$Y' = f(X')$$

l'insieme di elementi di Y ognuno dei quali è immagine di qualche elemento di X'.

L'ipotesi che l'applicazione f sia suriettiva (Art. II, n. 3) viene allora tradotta con la formula

$$Y = f(X)$$

la quale esprime che l'immagine dell'intero spazio X è l'intero spazio Y.

Considerato poi un sottinsieme Y' di Y, indichiamo con

$$f^{-1}(Y')$$

l'insieme degli elementi di X ognuno dei quali ha come immagine un elemento di Y'; tale insieme verrà anche chiamato *antiimmagine* di Y'. In particolare, indicato con y un punto di Y sarà

$$f^{-1}(y)$$

l'insieme degli elementi di X che vengono applicati in y, ovvero che hanno y come immagine.

Quindi se l'applicazione f stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi, l'insieme $f^{-1}(y)$ si riduce ad un unico elemento di X.

Si pensi ora stabilita su ognuno dei due insiemi X ed Y una topologia, che ne faccia degli spazi topologici: sorge la questione fondamentale di determinare come agisca l'applicazione f nei riguardi delle due topologie. La abituale nozione di *continuità* di una corrispondenza tra due insiemi viene generalizzata qui definendo come continua una applicazione se l'antiimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di X.

Per constatare come questa definizione stabilisca una effettiva generalizzazione della abituale nozione di continuità che è introdotta nei corsi classici di Analisi matematica elementare, si consideri per es. una funzione y reale della variabile reale x, definita in un intervallo $X \subset R$

$$X = \{x \mid x_1 < x < x_2\} .$$

Sia $x_0 \in X$ e sia

$$y_0 = f(x_0) ;$$

nelle definizioni elementari la continuità della funzione f in corrispondenza al valore x_0 viene definita nel seguente modo: la funzione f si chiama continua per $x = x_0$ se, prefissato un ε positivo arbitrario, esiste un δ (funzione di ε) tale che per ogni $x \in X$ per cui è

$$| x - x_0 | < \delta$$

sia

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon .$$

Questa definizione viene da alcuni Autori chiamata «la definizione ε, δ *della continuità*»; essa può venire ovviamente riformulata considerando le topologie che sulle due rette, alle quali appartengono rispettivamente i valori della «variabile indipendente x» e della «variabile dipendente y» sono stabilite dalla definizione data nel n. 2; in base a tale definizione la distanza tra due «punti» x ed x_0 è data dal valore assoluto della differenza

$$| x - x_0 |$$

ed analogamente la distanza tra due punti y ed y_0 è data dal valore assoluto della differenza

$$| y - y_0 | .$$

Allora, quando si consideri la definizione che abbiamo sopra ricordata, scegliere un ε positivo arbitrario significa scegliere un intorno (aperto) del valore $f(x_0) = y_0$ rispetto alla topologia fissata sulla retta delle y; la continuità sussiste, in base alla definizione, se ad ogni intorno aperto di raggio ε del punto $f(x_0)$ corrisponde un intorno aperto (di un raggio opportuno δ) del punto x_0 tale che ogni punto di questo secondo è applicato alla funzione f in un punto del primo.

È chiaro pertanto, da quanto abbiamo ora detto, che quando X ed Y siano due spazi metrici, la definizione di continuità della funzione f si dà nel modo abituale, cioè con le stesse parole che servono per la definizione nel caso della Analisi matematica elementare; è tuttavia superfluo osservare che la definizione stessa dipende essenzialmente dalla nozione di distanza che è stata stabilita sui due spazi metrici.

Quella che era considerata dalla Analisi matematica classica la definizione — per così dire — *naturale* di continuità era quindi frutto di una assunzione che si considerava « naturale » di distanza tra due punti.

Le analisi della Topologia hanno quindi ribadito la dipendenza della nozione di continuità di una funzione da quella di distanza tra due punti di uno spazio, ed hanno messo in evidenza la necessità di precisare quest'ultima perchè la prima abbia senso: inoltre, come si è visto, tali analisi hanno permesso di estendere queste nozioni agli spazi topologici, anche non metrizzabili.

8. — Si considerino ora tre spazi: X, Y, Z, su ognuno dei quali sia stata stabilita una topologia; sia $f : X \to Y$ una applicazione di X su Y e $g : Y \to Z$ una applicazione di Y su Z. Come è noto (cfr. Art. V, nn. 1, 6), è possibile definire il prodotto $f \circ g$ delle due applicazioni come quella applicazione che fa corrispondere al punto $x \in X$ il punto $g[f(x)] \in Z$.

Se si suppone che le due applicazioni siano entrambe continue (beninteso con riferimento alle topologie stabilite) si può dimostrare facilmente che la applicazione $f \circ g$ è pure continua.

Si consideri ora una applicazione $f : X \to Y$ dello spazio X sullo spazio Y che sia biunivoca: esista cioè la applicazione $f^{-1} : Y \to X$ di Y su X; si esprime questo fatto dicendo che la f è in particolare una *trasformazione* tra i due spazi (presso alcuni Autori si ha la espressione « *mappa bijettiva* ») (cfr. Art. II, n. 3). Sempre nella ipotesi che ognuno dei due spazi X ed Y sia dotato di una topologia, la trasformazione f si chiama *omeomorfismo* se essa è continua insieme con la sua inversa f^{-1} (cfr. Art. V, n. 6).

È del tutto chiaro che si può pensare ad un omeomorfismo dello spazio X su se stesso e che in particolare la trasformazione identica, cioè la trasformazione $i : X \to X$ tale che per ogni $x \in X$ si abbia

$$i(x) = x$$

è un omeomorfismo.

Si trae immediatamente da quanto è stato detto fin qui che esiste la possibilità di definire una legge di composizione degli omeomorfismi di uno spazio topologico X su se stesso in guisa che rispetto ad essa gli omeomorfismi stessi formino gruppo (cfr. Art. II, n. 11 e Art. V, nn. 1, 6): tale legge di composizione è data dal prodotto, sopra definito, di due applicazioni.

Si intravvede inoltre la possibilità di impostare lo studio degli spazi topologici secondo una visione analoga a quella introdotta dal KLEIN per la classificazione delle varie Geometrie, e che abbiamo ricordato nel n. 1. Precisamente la considerazione del gruppo degli omeomorfismi di uno spazio X su se stesso può permettere di mettere in evidenza certe proprietà degli insiemi di punti di X che potrebbero essere chiamate « proprietà topologiche » degli insiemi stessi, e che risultano invarianti rispetto al gruppo ricordato degli omeomorfismi. Risulta così generalizzata e precisata, almeno in parte, la visione che si aveva della Topologia come « Geometria qualitativa », di cui abbiamo fatto parola nel citato n. 1; visione che era affidata alla intuizione la quale agiva sulla scorta di esperienze eseguite su corpi dello spazio esterno che si potessero manipolare sottoponendoli a deformazioni continue, tali però da non variare la relazione di « vicinanza » tra coppie di punti.

9. — Abbiamo visto che le nozioni ed i concetti di Topologia permettono di dare forma astratta e rigorosa a certe nozioni di « Geometria qualitativa » che erano basate sulla intuizione e di generalizzare tali nozioni anche a casi in cui l'intuizione non serve come fondamento di concetti geometrici, e precisamente ai casi di spazi topologici non metrizzazabili. Applicheremo queste nozioni, proseguendo nello stesso ordine di idee, per ritrovare molte tra le nozioni intuitive della nostra visione geometrica dello spazio abituale.

Si definisce *separato* uno spazio topologico S che consti della unione (nel senso insiemistico del termine) di due insiemi aperti e disgiunti, tali cioè da non avere punti in comune; si dimostra poi che la stessa condizione, cioè quella di essere separato, può esser espressa dicendo che lo spazio è la unione di due insiemi chiusi e disgiunti.

Si definisce poi *connesso* uno spazio quando non è separato; e si caratterizza uno spazio topologico connesso mediante la condizione necessaria e sufficiente che in esso i soli insiemi che sono contemporaneamente aperti e chiusi sono lo spazio stesso e l'insieme vuoto $\varnothing$.

Gli esempi più notevoli di spazi connessi sono offerti dalla Geometria elementare e dalla Analisi matematica elementare: sono connessi per es.:

a) lo spazio euclideo ad n dimensioni E^n, qualunque sia n, ed il complemento di un punto in uno spazio euclideo E^n, per $n > 1$.

b) la sfera ad n dimensioni nello spazio euclideo E^{n+1}, per $n > 0$, cioè l'insieme dei punti dello spazio euclideo le cui coordinate soddisfano ad una equazione del tipo

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 = 1 .$$

Si ha inoltre che la proprietà per un insieme di essere connesso è non soltanto una proprietà topologica, cioè invariante per il gruppo degli omeomorfismi, ma anche per applicazioni continue: precisamente si dimostra che ogni immagine di uno spazio connesso per una applicazione continua è ancora uno spazio connesso.

10. — Sia S uno spazio topologico e sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di insiemi aperti che ricopra S (nel senso precisato nel n. 4); si dice che S è *compatto* se in $\mathfrak{F}$ esiste una sottofamiglia *finita*

$$G = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \tag{10.1}$$

di insiemi che a sua volta ricopre interamente S.

Considerato poi un sottospazio X di S, questo si dice compatto se è compatto rispetto alla topologia indotta su di esso dalla topologia che vale in S (cfr. n. 5); pertanto X si dice compatto allora ed allora soltanto che *ogni* copertura di X con insiemi della famiglia $\mathfrak{F}$ che costituisce una copertura di S contiene una famiglia finita di aperti che ricopre X.

La nozione di spazio compatto e di sottospazio compatto di uno spazio S è di estrema importanza, perchè costituisce il fondamento topologico di importantissimi teoremi che vengono dimostrati nella Analisi matematica elementare; precisamente si ha:

a) è compatto ogni intervallo chiuso della retta reale R, cioè ogni insieme I di punti x dato da

$$I = \{x \mid a \leqq x \leqq b\} \tag{10.2}$$

beninteso rispetto alla topologia che è data sulla retta reale R dalla definizione di distanza tra due punti definita mediante la (2.5).

b) Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.

c) Ogni sottoinsieme compatto di uno spazio metrico è chiuso.

Uno spazio S si dice *numerabilmente compatto* (o contabilmente compatto) se ogni sottoinsieme infinito X di S ammette in S un punto di accumulazione.

A proposito della proprietà di uno spazio di essere compatto e di essere numerabilmente compatto si dimostra che esse si conservano per trasformazioni continue e quindi, a maggiore ragione, sono proprietà topologiche. Inoltre si ha che ogni spazio compatto è anche numerabilmente compatto.

Quando si ricordi ciò che è stato detto nel n. 3, si riconosceranno qui alcuni basilari teoremi che costituiscono il fondamento dei corsi elementari di Analisi matematica e precisamente il teorema che viene abitualmente chiamato di BOLZANO-WEIERSTRASS, che afferma la esistenza di almeno un punto di accumulazione per un insieme J di punti di uno spazio euclideo E^n quando i suoi punti siano infiniti e si trovino tutti a distanza finita, ed il teorema, che va spesso sotto i nomi di HEINE-PINCHERLE-BOREL-LEBESGUE da cui si deduce anche che ogni funzione reale di n variabili reali che sia continua in un insieme chiuso e limitato è ivi anche uniformemente continua.

11. — Si considerino certi n spazi

$$S_1,\ S_2,\ \dots,\ S_n \tag{11.1}$$

e si supponga che ognuno di essi sia dotato di una topologia; si consideri poi lo spazio

$$S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \tag{11.2}$$

che è prodotto cartesiano degli n spazi (11.1), cioè lo spazio S i cui punti x sono le n-ple ordinate di punti

$$x = [x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n] \tag{11.3}$$

ognuno appartenente rispettivamente ad uno degli spazi (11.1).

Consideriamo poi l'applicazione

$$\pi_j : S \to S_j$$

dello spazio S sullo spazio S_j che fa corrispondere al punto $x \in S$ il punto $x_j \in S_j$; tale applicazione viene abitualmente chiamata *proiezione.* Sia U un aperto in S_j; è possibile definire una topologia in S assumendo come *sottobase* (Cfr. n. 5) per essa l'insieme delle antiimmagini $\pi_j^{-1}(U)$ degli aperti degli spazi S_j; in altre parole è possibile definire una topologia in S assumendo come aperti in S degli insiemi che vengono applicati da ogni proiezione π_j in aperti nei singoli spazi (11.1).

A titolo di esempio, si consideri il piano euclideo E^2; esso può essere considerato come il prodotto cartesiano di due rette R_1 ed R_2

$$E^2 = R_1 \times R_2$$

ed ovviamente un punto $x \in E^2$ è dato dalla coppia ordinata

$$x = [x_1, x_2] \qquad (x_1 \in R_1, \quad x_2 \in R_2)$$

pertanto la prima e la seconda proiezione del punto $x \in E^2$ sono rispettivamente x_1 *ed* x_2:

$$\pi_1 x = x_1 \; ; \quad \pi_2 x = x_2 \, .$$

Indichiamo con U un aperto di R_1; poniamo cioè

$$U = \{x_1 \mid a < x_1 < b\} \; ;$$

si immagini stabilito sul piano E^2 un sistema di coordinate cartesiane (anche oblique) di guisa che x si possa pensare come il punto avente come coordinate rispettivamente x_1 ed x_2 nel senso della geometria elementare; allora l'antiimmagine $\pi^{-1}(U)$ è ovviamente data dalla striscia di punti compresa tra due rette, parallele all'asse delle coordinate x_2 e rappresentate rispettivamente dalle equazioni $x_1 = a$, $x_2 = b$.

È chiaro che queste antiimmagini formano una sottobase per la topologia di E^2, perchè questa può essere costruita assumendo come aperti i parallelogrammi con i lati paralleli agli assi (cfr. nn. 4, 5), ed ognuno di questi parallelogrammi si può chiaramente considerare come intersezione (nel senso insiemistico del termine) di due striscie, ognuna delle quali ha le coppie di lati paralleli ad uno degli assi.

La nozione di topologia per uno spazio che è prodotto di altri può essere ulteriormente generalizzata, anche al caso in cui lo spazio S sia prodotto di certi spazi che non sono in numero finito, con opportune convenzioni (Topologia di TYCHONOFF) su cui non ci soffermiamo perchè esulano dalla esposizione presente alla quale vogliamo mantenere il carattere di elementarità. Con una definizione cosiffatta di topologia per lo spazio prodotto è possibile dimostrare in generale il teorema, facilmente dimostrabile nel caso di uno spazio prodotto di un numero finito di altri, che il prodotto di spazi compatti è pure compatto.

12. — Di grande importanza per le applicazioni sono gli spazi topologici per i quali valgono i cosiddetti *assiomi di separazione* (Trennungsaxiomen); essi sono i seguenti:

Assioma T_0 - Dati due punti qualunque dello spazio topologico S almeno uno di essi è contenuto in un aperto che non contiene l'altro.

Assioma T_1 - Dati due punti di S, ognuno dei due è contenuto in un aperto che non contiene l'altro.

Assioma T_2 (detto anche Assioma di HAUSDORFF) - Dati due punti di S vi sono due aperti, che non hanno punti in comune, ognuno dei quali contiene uno dei due punti.

Si dimostra facilmente che questi assiomi impongono allo spazio delle condizioni sempre più restrittive, e che uno spazio che soddisfa uno di questi soddisfa anche ai precedenti.

Si verifica inoltre che in uno spazio che soddisfa all'assioma T_1 ogni punto, ed in generale ogni insieme finito è un insieme chiuso.

Infatti, considerato un punto p, ogni altro punto giace in un insieme aperto che non contiene p: pertanto l'insieme complementare di p è un insieme unione di aperti, cioè è un aperto; di conseguenza p è chiuso.

Abitualmente gli spazi che soddisfano alla condizione T_2 vengono chiamati spazi di HAUSDORFF.

Per tali spazi valgono numerose proprietà delle quali ci limitiamo ad esporre le più importanti:

Dato in uno spazio di HAUSDORFF un insieme compatto C ed un punto $p \notin C$, esistono due aperti disgiunti (cioè non aventi punti in comune) tali che l'uno contiene p e l'altro contiene C. Ne consegue che in uno spazio di HAUSDORFF ogni insieme compatto è anche chiuso. Più in generale si ha che dati in uno spazio di HAUSDORFF due insiemi compatti H e K esistono due aperti disgiunti l'uno dei quali contiene H e l'altro K.

Ovviamente si ha dalla definizione di spazio metrico che ogni spazio metrico è uno spazio di HAUSDORFF.

Si ha inoltre immediatamente che ogni sottospazio di uno spazio di HAUSDORFF è pure uno spazio di HAUSDORFF e che il prodotto di due (e quindi anche di un numero finito di) spazi di HAUSDORFF è pure uno spazio di HAUSDORFF.

13. — Si consideri ora uno spazio topologico S che soddisfi all'assioma T_1 (cfr. n. precedente) e si supponga inoltre che valga per esso il seguente

Assioma N - Dati due insiemi chiusi qualunque X, Y di S che siano disgiunti (cioè non aventi punti in comune), esistono due insiemi aperti U e V contenenti rispettivamente X ed Y e non aventi punti in comune; esistono cioè due insiemi U e V tali che si abbia

$$X \subset U\,; \qquad Y \subset V\,; \qquad U \cap V = \varnothing\,.$$

Se lo spazio S soddisfa all'assioma N (oltre beninteso all'assioma T_1) esso viene chiamato *normale*.

La nozione di spazio normale è di grande importanza per l'Analisi matematica elementare, perchè si dimostra che ogni spazio metrico è anche uno spazio normale. Inoltre sussiste per gli spazi normali la fondamentale proprietà che è anche enunciata dal seguente teorema (che viene abitualmente chiamato anche « Lemma di URYSOHN »): Condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio S sia normale è che, considerati due qualunque insiemi chiusi A e B dello spazio, esista una funzione f a valori reali, definita sull'intero spazio S, che applica S sull'intervallo chiuso I della retta reale definito da

$$I = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$$

in modo che si abbia

$$f(A) = 0 \; ; \qquad f(B) = 1 \, .$$

14. — Nei numeri precedenti abbiamo ripetutamente affermato che uno degli scopi della Topologia è quello di dare la massima generalità ai concetti della Analisi matematica; tra gli altri abbiamo considerato il concetto di limite per una successione di punti della retta reale R e per una successione di punti in uno spazio topologico; sia in particolare S uno spazio metrico e sia

$$d(x, \; y) \tag{14.1}$$

la distanza di due punti x ed y di S (cfr. n. 3).

Si dice che una successione di punti di S

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n, \; \ldots \tag{14.2}$$

è una *successione di* CAUCHY se, comunque si fissi un ε reale positivo, esiste un indice $\bar{n}$ tale che, per ogni coppia di indici m ed n che soddisfino alle condizioni

$$m > \bar{n} \, , \qquad n > \bar{n}$$

si abbia

$$d(x_m, \; x_n) < \varepsilon \, . \tag{14.3}$$

Come è noto, quando lo spazio S sia la retta reale R e si assuma come distanza tra due punti x, y la funzione

$$d(x, \; y) = | \, x - y \, | \tag{14.4}$$

(cfr. n. 2) ogni successione che ammetta un limite è una successione di CAUCHY e viceversa ogni successione di CAUCHY ammette un limite.

In generale, quando S è uno spazio metrico, può avvenire che non ogni successione di CAUCHY su punti di S ammetta un limite che appartiene ad S.

Un facile esempio si costruisce nel modo seguente: sia X l'intervallo aperto della retta reale R, costituito dai numeri maggiori di zero e minori di 1:

$$X = \{x \mid 0 < x < 1\}$$

essendo la distanza tra due punti data dalla (14.4). Ovviamente quando si consideri una successione monotona di numeri di X che abbiano come limite lo zero, la condizione perchè essa sia una successione di CAUCHY è soddisfatta, ma il limite della successione di punti di X non appartiene ad X, perchè è per ipotesi lo zero.

Quando avviene che uno spazio metrico contenga il punto limite di ogni successione di Cauchy di punti di S lo spazio stesso si chiama *completo.*

Si dimostra che è completo ogni spazio metrico compatto e che ogni sottospazio chiuso di uno spazio completo è pure completo.

È pure completo il prodotto di due (e quindi di un numero finito di) spazi completi, quando si assuma come topologia nello spazio prodotto quella che abbiamo definito sopra nel n. 11.

Ovviamente la proprietà di uno spazio topologico S di essere completo non è una proprietà topologica.

Basti pensare all'esempio che abbiamo trattato poco sopra: l'intervallo aperto X che abbiamo considerato può essere trasformato con una trasformazione continua nell'intera retta reale R, che è uno spazio completo.

Sia S uno spazio topologico e sia X un sottospazio di S. Come è noto, si dice che X è *denso* in S se ogni punto di S è punto di accumulazione di punti di X oppure appartiene ad X, cioè se si ha

$$S = \overline{X}\,.$$

Come esempio, si pensi alla retta reale R ed all'insieme dei punti razionali di R; come è noto, ogni punto di R o è razionale oppure è limite di una successione di punti razionali.

Sia ora X uno spazio metrico *non completo*; è possibile costruire uno spazio metrico S tale che X sia un sottospazio di S denso in S, in modo che la distanza di due elementi di X, misurata in S, coincida con la distanza degli stessi in X.

La costruzione dello spazio S si ottiene con una tecnica che risulta essere la immediata generalizzazione del procedimento che conduce a costruire l'insieme dei numeri reali a partire dal campo dei numeri razionali: precisamente si definisce tra le coppie di successioni di CAUCHY di punti dello spazio X una opportuna relazione di equivalenza (Art. II,

n. 2), e si assumono come elementi dello spazio S le classi di aquivalenza delle successioni di CAUCHY di punti di X (Art. II, n. 4), rispetto alla relazione di equivalenza definita.

15. — Le considerazioni che abbiamo esposto nei precedenti n^i. permettono ora di dare un preciso significato al concetto di « deformazione continua » il quale, sulla base di nozioni che venivano considerate come « intuitive », era posto a fondamento delle trattazioni classiche della Topologia così come abbiamo descritto nel n. 1; sulla base di questo concetto, la Topologia veniva considerata come una sorta di « geometria qualitativa » la quale si occupava delle proprietà delle figure che risultavano invarianti rispetto alle trasformazioni biunivoche e continue senza eccezioni delle figure stesse.

Per semplicità, ci limiteremo a considerare la deformazione continua di un circuito unidimensionale immerso in uno spazio metrico S. A tal fine, consideriamo l'insieme $I \times J$ prodotto dei due intervalli chiusi unitari I, J della retta euclidea, e poniamo

$$\begin{cases} I = \{t \mid 0 \leqq t \leqq 1\} \\ J = \{u \mid 0 \leqq u \leqq 1\}\,. \end{cases}$$

Sia f una applicazione continua di $I \times J$ in S; indichiamo con

$$(15.1) \qquad x = f(t,\ u) \qquad (x \in S,\ t \in I,\ u \in J)$$

il punto di S che l'applicazione f fa corrispondere alla coppia di valori t ed u e supponiamo che si abbia per ogni $u \in J$

$$(15.2) \qquad f(0,\ u) = f(1,\ u) = x_0\,.$$

Fissiamo un valore $\bar{u}$ di u e supponiamo che l'applicazione

$$(15.3) \qquad x = f(t,\ \bar{u})$$

non applichi l'intero intervallo I nel punto x_0; allora tale applicazione dà luogo ad un insieme di punti di S che è immagine continua dell'intervallo I e che rende nel modo più semplice l'idea del « circuito chiuso » immerso nello spazio S, avente il punto x_0 come punto di origine e di termine.

Gli infiniti circuiti che si ottengono assegnando nella (15.3) ad $\bar{u}$ tutti i valori appartenenti all'intervallo chiuso J hanno tutti, in forza delle (15.2), la proprietà di avere il punto x_0 come punto di origine e punto terminale; essi sono dei circuiti che si ottengono « deformando per continuità » il circuito dato dalla (15.3), sempre con la condizione che il circuito deformato abbia origine e termine in x.

In particolare se tra le funzioni (15.3) vi è una funzione che applica l'intero intervallo I nell'unico punto x_0, allora ognuno dei circuiti (15.3) si dice *contraibile* nel punto x_0.

Si dimostra facilmente che si può definire una relazione di « equivalenza » tra circuiti dello spazio S, relazione che ha le tre classiche proprietà: riflessiva, simmetrica e transitiva delle relazioni che abitualmente vengono designate con tale termine (Art. II, n. 2); precisamente tale relazione si ottiene definendo che essa interceda tra due circuiti quando essi siano deformabili con continuità l'uno nell'altro, qualora a questa operazione di « deformazione » venga assegnato il senso che è stato precisato nelle considerazioni che precedono.

Ovviamente si ha per es. in particolare che tutti i circuiti che sono contraibili nel punto x_0 sono tutti equivalenti tra loro.

È pertanto possibile definire una intera classe di circuiti che sono equivalenti ad un circuito dato; tale classe sarà detta anche « classe di equivalenza » relativa al circuito stesso (Art. II, n. 4).

16. — Consideriamo ora due circuiti, applicazioni continue dell'intervallo I nello spazio S, dati da due funzioni continue

$$x = \varphi(t)\,, \qquad x = \psi(t) \qquad (t \in I) \tag{16.1}$$

e supponiamo che entrambi i circuiti abbiano il punto x_0 come origine e come termine; siano dunque valide le relazioni

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = x_0\,. \tag{16.2}$$

Si può definire un terzo circuito, che si dirà « composto » con i primi due, costruendo una terza applicazione $\Phi(t)$ dell'intervallo I nello spazio S con la seguente legge

$$\begin{cases} \Phi(t) = \varphi(2t) & \text{per} \quad 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ \Phi(t) = \psi(2t-1) & \text{per} \quad 1/2 \leqq t \leqq 1\,. \end{cases} \tag{16.3}$$

È chiaro dalle (16.3) che il circuito appartenente ad S e dato dalla applicazione $\Phi(t)$ ha ancora come origine e termine il punto x_0.

Volendo descrivere il circuito definito dall'applicazione (16.3) in modo intuitivo, si potrebbe dire che esso si ottiene « percorrendo » prima il circuito dato dalla applicazione $\varphi(t)$ e in seguito il circuito dato dalla applicazione $\psi(t)$.

In particolare si può definire il circuito che corrisponde a quello definito dall'applicazione (16.1) percorso « in senso inverso » al precedente con la seguente applicazione:

$$\varphi^*(t) = \varphi(1 - t) \qquad (t \in I) \tag{16.4}$$

Si dimostrano i seguenti fatti:

a) l'operazione di « composizione » di due circuiti aventi entrambi il punto x_0 come origine e come termine è associativa; in altre parole considerata una applicazione $\varkappa(t)$ dell'intervallo I nello spazio S che sia continua e che soddisfi alle condizioni

$$\varkappa(0) = \varkappa(1) = x_0 \tag{16.5}$$

analoghe alle (16.2) che valgono per le $\varphi(t)$ e $\psi(t)$, convenendo di scrivere

$$\Phi = \varphi \circ \psi \tag{16.6}$$

per indicare che l'applicazione $\Phi(t)$ è ottenuta dalle (16.3), e convenendo di usare gli stessi simboli anche per le applicazioni che si ottengono con operazione analoghe mediante la $\varkappa(t)$, si ha

$$[\varphi \circ \psi] \circ \varkappa = \varphi \circ [\psi \circ \varkappa]; \tag{16.7}$$

b) considerate le classi di equivalenza (nel senso spiegato alla fine del n. precedente) alle quali appartengono due circuiti, ottenuti dalle applicazioni φ e ψ, la classe di equivalenza a cui appartiene il circuito composto dei due dipende *soltanto* dalle classi di equivalenza a cui appartengono i circuiti che entrano nella composizione;

c) in particolare si ha che se un circuito che corrisponde ad una applicazione $\varphi(t)$ viene composto in qualunque ordine con un circuito che è contrattibile nel punto x_0 la sua classe di equivalenza non varia;

d) infine si ha che componendo il circuito che corrisponde ad una applicazione $\varphi(t)$ con quello che corrisponde all'applicazione $\varphi^*(t)$ data dalla (16.4) si ottiene un circuito che è contraibile nel punto x_0.

I risultati che abbiamo esposto permettono quindi di costruire un gruppo (Art. II, n. 11) i cui elementi sono le classi di equivalenza dei circuiti che hanno x_0 come punto di « partenza » e di « arrivo ».

L'operazione di « composizione » del gruppo viene ad essere quella che fa corrispondere a due circuiti corrispondenti alle applicazioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ quella corrispondente alle applicazioni $\Phi(t)$ data dalle (16.3); inoltre l'elemento inverso del circuito corrispondente alla applicazione $\varphi(t)$ risulta essere il circuito corrispondente alla applicazione $\varphi^*(t)$ data dalla (16.4); ed infine l'elemento neutro del gruppo è costituito dalla classe di equivalenza cui appartengono tutti i circuiti che sono contraibili nel punto x_0. Questo gruppo viene abitualmente chiamato « gruppo di omotopia ad una dimensione » dello spazio S relativo al punto x_0.

Sia ora un altro punto qualunque x_1 di S; se avviene che esista una applicazione continua dell'intervallo I nello spazio S

$$x = \gamma(t) \qquad (t \in I) \tag{16.8}$$

tale che si abbia

$$x_0 = \gamma(0) \; ; \qquad x_1 = \gamma(1) ; \tag{16.9}$$

allora i due gruppi di omotopia, quello relativo al punto x_0 e quello relativo al punto x_1 sono isomorfi (Art. II, n. 9). Se la circostanza che abbiamo sopra descritta si verifica quali che siano i due punti x_0 ed x_1 allora ovviamente tutti i gruppi di omotopia, relativi a tutti i punti S, sono isomorfi tra loro e sono isomorfi ad un unico gruppo che viene chiamato semplicemente « gruppo di omotopia unidimensionale » di S, senza più menzione del punto di partenza dei circuiti considerati. Tale gruppo di omotopia viene anche chiamato gruppo di Poincaré dello spazio topologico S.

Quando si verificano le circostanze che abbiamo sopra enunciate si suol dire che lo spazio S è connesso per archi (arc-wise connected); la descrizione intuitiva di questa particolarità dello spazio stesso viene data dicendo che, quali che siano due suoi punti x_0 ed x_1, esiste sempre una curva continua che ha origine in x_0, termine in x_1 ed appartiene ad S.

Si verifica che il gruppo di omotopia dello spazio euclideo E^n ad n dimensioni si riduce al solo elemento neutro; cioè, in altre parole ogni circuito chiuso è contraibile nella sua origine; la cosa non è più vera invece quando si consideri lo spazio euclideo E^n dal quale siano stati sottratti i punti appartenenti ad un sottospazio E^{n-2} ad $(n-2)$ dimensioni; questo è il caso che si presenta per es. quando l'ordinario spazio tridimensionale della geometria euclidea viene « tagliato » lungo una retta, caso questo che interessa la fisica elementare, nello studio dei campi magnetici generato da una corrente elettrica rettilinea.

Come si vede dalle poche considerazioni che abbiamo fatte, lo studio del gruppo di omotopia unidimensionale di uno spazio topologico appare di fondamentale importanza per le applicazioni; va osservato che in generale tale gruppo non è abeliano.

Svolgendo delle considerazioni che sono le ovvie generalizzazioni di quelle che sono state esposte sopra si giunge a definire il gruppo di omotopia di dimensione qualunque di uno spazio topologico; si dimostra che, quando la dimensione di un gruppo di omotopia sia maggiore di 1, il gruppo stesso è abeliano.

17. — Le considerazioni che svolgeremo nei n^i. che seguono sono dedicate alla esposizione dei principi di quella che viene chiamata « Topologia algebrica » e che si può considerare come lo sviluppo di quella branca della topologia di cui abbiamo parlato nella introduzione e che si rifà allo studio delle proprietà delle figure dello spazio considerato dal punto di vista delle deformazioni biunivoche e continue.

La espressione « Topologia algebrica » fa pensare immediatamente all'applicazione dei concetti e dei metodi dell'algebra moderna (detta anche algebra astratta) (Art^i. II, III) alla topologia. Effettivamente questa applicazione ha ottenuto nei periodi più recenti una grande estensione e ha ampliato il proprio campo includendovi insieme ad argomenti che in certo senso venivano considerati come tradizionalmente attinenti alla Topologia anche altri numerosissimi, che tradizionalmente si pensavano non strettamente collegati con essa.

In questa esposizione puramente elementare saremo costretti a limitarci agli argomenti tradizionali, facendo solo alcuni accenni totalmente schematici alle applicazioni più recenti della Topologia.

18. — Il più semplice concetto della topologia algebrica è quello di « simplesso » e si potrebbe presentare come una prima ed immediata generalizzazione del segmento sulla retta, del triangolo nel piano, del tetraedro nello spazio; invero esso, nello spazio R^n ad n dimensioni, appare come il poliedro avente n dimensioni e dotato del minimo numero di vertici (rispetto alla dimensione dello spazio in cui giace) perchè ciò sia possibile.

Consideriamo lo spazio R^n delle n-ple di numeri reali

$$x \in R^n \Leftrightarrow x = [x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n]$$

e supponiamo che esso abbia la struttura di uno spazio euclideo; pertanto supporremo che i numeri costituenti una n-pla si possano considerare come le coordinate di un punto dello spazio e che per i punti stessi valgano le proprietà che ad essi competono in quanto punti di uno spazio cosiffatto.

Quindi in particolare supporremo che siano validi i concetti di « iperpiano » dello spazio e di spazio lineare ad r dimensioni (Art. V, nn. 33, 34, 36): il primo è il luogo dei punti le cui coordinate soddisfano ad una equazione lineare del tipo

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x^j = b$$

ed il secondo è la intersezione di $n - r$ iperpiani le cui equazioni risultino essere linearmente indipendenti.

Siano ora dati $(n + 1)$ punti dello spazio

$$x_0, \; x_1, \; \ldots, \; x_{n-1}, \; x_n \tag{18.1}$$

e si supponga che essi siano in posizione tale che presi comunque r tra essi (con $r \leqq n$) essi non giacciano in uno spazio subordinato avente un numero di dimensioni minore di $(r - 1)$.

Indichiamo con

$$x_i^j \qquad \begin{cases} i = 0, 1, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{18.2}$$

le coordinate dei punti dati e si consideri l'insieme dei punti x dello spazio tali che le loro coordinate x^j $(j = 1, \ldots, n)$ siano espresse nella forma

$$x^j = \sum_{k=0}^{n} t^k x_k^j \tag{18.3}$$

nella quale gli $(n + 1)$ coefficienti t^k sono numeri reali soggetti alle condizioni

$$\begin{cases} t^k \geqq 0 & (k = 0, 1, \ldots, n) \qquad (18.4) \\ \sum_{k=0}^{n} t^k = 1 . & \qquad (18.5) \end{cases}$$

Simbolicamente le n formule (18.3) possono essere scritte nella forma

$$x = \sum_{k=0}^{n} t^k x_k \tag{18.3'}$$

sempre beninteso supponendo che i coefficienti reali t^k soddisfino alle (18.4) e (18.5).

L'insieme $\mathcal{S}$ dei punti x così ottenuti viene chiamato « simplesso » ad n dimensioni dello spazio euclideo ad n dimensioni e i punti (18.1) vengono chiamati « vertici » del simplesso $\mathcal{S}$.

È immediato osservare che se tra gli $(n + 1)$ coefficienti t^k alcuni, cioè rispettivamente uno, oppure due, oppure tre, oppure $(n - 1)$ sono posti uguali a zero, la (18.3') fornisce un simplesso che è rispettivamente ad $(n - 1)$, $(n - 2)$, $(n - 3)$, ... dimensioni, in quanto appartiene ad uno spazio euclideo che ha la dimensione corrispondente.

Di simplessi cosiffatti ne esistono rispettivamente

$$\binom{n+1}{1} \binom{n+1}{2} \cdots \binom{n+1}{n-1} ;$$

essi hanno per vertici quelli tra i punti (18.1) aventi gli indici uguali a quelli dei coefficienti t^k che *non* sono stati posti uguali allo zero. Questi simplessi vengono chiamati « faccie » del simplesso $\mathcal{S}$ con l'indicazione della dimensione che a ciascuna di esse corrisponde. In particolare talvolta le faccie ad una dimensione vengono chiamate « spigoli del simplesso $\mathcal{S}$ ».

Per estensione, i concetti che abbiamo ora esposti vengono definiti anche nel caso in cui n tra i coefficienti t^k siano posti uguali a zero (e quindi il rimanente sia posto uguale ad 1, in forza della (18.5);) i punti (18.1) sono chiamati faccie a zero dimensioni del simplesso $\mathcal{S}$.

Abbiamo supposto che lo spazio R^n possegga la struttura di uno spazio euclideo e quindi valga in esso l'abituale misura della distanza; si verifica allora immediatamente che i punti del simplesso $\mathcal{S}$ che appartengono alle faccie del simplesso stesso (quando questo abbia la dimensione n) sono punti della frontiera del simplesso; e viceversa, con riferimento alle formule (18.3), (18.4), (18.5) i punti x che corrispondono a valori dei coefficienti t^k *tutti* diversi da zero sono punti interni al simplesso $\mathcal{S}$, rispetto alla topologia stabilita nello spazio R^n.

19. — Consideriamo ora un simplesso $\mathcal{S}$ ad n dimensioni nello spazio R^n e siano

$$x_0, \; x_1, \; \ldots, \; x_n \tag{19.1}$$

i suoi vertici. È possibile assegnare al simplesso una orientazione quando si assegni ai suoi vertici un ordinamento; per es. quando si sia stabilito di distinguere ogni vertice con un determinato indice numerico, come è stato fatto, si può convenire che alla permutazione fondamentale

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (n-1),\ n \tag{19.2}$$

corrisponda l'orientazione del simplesso $\mathscr{S}$ che verrà chiamata *positiva*, e si conviene che la stessa orientazione venga assegnata quando si considerino i vertici secondo un ordine che si ottiene dalla permutazione fondamentale (19.2) con un numero pari di scambi, mentre si conviene di assegnare l'orientazione opposta, da chiamarsi *negativa*, ad ogni ordinamento dei vertici che corrisponda ad una permutazione che si ottiene da quella che è stata scelta come fondamentale mediante un numero dispari di scambi. Le due orientazioni verranno abitualmente indicate con i segni « + » e « — ».

Il simplesso $\mathscr{S}$, quando sia considerato come orientato, viene indicato con la enunciazione dei suoi vertici in un ordine stabilito; si conviene per es. di indicare con il simbolo σ^n il simplesso che ha per vertici i punti (19.1), considerato orientato positivamente quando si assuma la permutazione (19.2) come permutazione fondamentale e si scrive

$$\sigma^n = < x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n > . \tag{19.3}$$

Si considerino ora le $(n+1)$ faccie ad $(n-1)$ dimensioni del simplesso, faccie che indicheremo con i simboli

$$\sigma_0^{n-1},\ \sigma_1^{n-1},\ \sigma_2^{n-1},\ \ldots,\ \sigma_{n-1}^{n-1},\ \sigma_n^{n-1}\ ;$$

ognuna di queste faccie, come si è detto, si ottiene come un simplesso che ha per vertici soltanto n tra gli $(n+1)$ punti (19.1) che sono vertici del simplesso originario, e si ottiene quindi tralasciando un punto di σ^n. Se conveniamo di indicare con un accento circonflesso il vertice di σ^n tralasciato, il simplesso ad $(n-1)$ dimensioni che costituisce la faccia la quale si ottiene tralasciando il vertice di posto i-esimo sarà indicato con il simbolo

$$\sigma_i^{n-1} = \langle x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ \widehat{x_i},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n\rangle . \tag{19.4}$$

Si conviene di assegnare al simplesso indicato dalla (19.4), con i vertici dell'ordine in cui sono enunciati, l'orientazione data dal segno di $(-1)^i$.

Diremo che con questa convenzione si assegna al simplesso ad $(n-1)$ dimensioni che è faccia di σ^n l'orientazione *naturale* che ad esso compete, appunto in quanto faccia di σ^n, ed in conseguenza dell'orientazione stabilita su questo.

Per es. si consideri in un piano una terna di punti non allineati che indicheremo con x_0, x_1, x_2; consideriamo il simplesso orientato

$$\sigma^2 = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle \tag{19.5}$$

avente come vertici i punti suddetti; esso può essere illustrato considerando il triangolo avente come vertici i tre punti ed assegnando su di esso una certa orientazione, per es. convenendo di percorrerne il perimetro in un certo senso, indicato dall'ordine in cui i vertici sono enunciati. Il simplesso σ^2 a due dimensioni ammette le tre faccie seguenti

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_0^1 &= \langle x_1, x_2 \rangle \\ \sigma_1^1 &= -\langle x_0, x_2 \rangle = \langle x_2, x_0 \rangle \\ \sigma_2^1 &= \langle x_0, x_1 \rangle \end{aligned}\right. \tag{19.6}$$

Queste sono costituite dai tre segmenti che sono i lati del triangolo, e su ognuno di essi la convenzione che abbiamo stabilita assegna l'orientazione naturale che è concorde con quella che viene assunta abitualmente in base all'intuizione, in seguito alla convenzione usata per assegnare un segno al triangolo associando tale segno al verso di percorrenza del perimetro.

Ritornando al caso generale, si osservi che il simplesso orientato σ_i^{n-1} ad $(n-1)$ dimensioni che è faccia del simplesso σ^n può essere dotato di una sua orientazione, in quanto considerato come un simplesso a sè stante; tale orientazione è stabilita per es. a partire da un certo ordinamento fissato sui suoi vertici, oppure perchè il simplesso stesso è faccia anche di un altro simplesso ad n dimensioni, diverso da σ^n. Questa orientazione (per così dire « preesistente ») sul simplesso σ_i^{n-1} ad $(n-1)$ dimensioni può essere concorde oppure discorde con quella che ad esso compete in quanto faccia del simplesso σ^n. Si conviene pertanto di attribuire un *coefficiente di incidenza* al complesso σ^{n-1}, faccia di σ^n, attribuendo a tale coefficiente il valore $+1$ oppure -1 a seconda che l'orientazione esistente sul simplesso σ_i^{n-1} ad $(n-1)$ dimensioni è concorde oppure discorde con quella che ad esso compete in quanto faccia di σ^n, secondo le convenzioni stabilite.

Per riferirci all'esempio precedente, può avvenire che i lati del triangolo che ha vertici nei tre punti x_0, x_1, x_2 siano già stati orientati e che quindi le orientazioni stabilite dai versi di percorrenza che figurano nelle formule (19.6) siano concordi oppure discordi con quelle che sono già state stabilite sui lati del triangolo.

Per uniformità di notazione porremo nel seguito

$$\sigma^n = \sigma_0^n$$

ed indicheremo con il simbolo η^n_{0i} il *coefficiente di incidenza* del simplesso ad n dimensioni σ^n_0 con il simplesso ad $(n-1)$ dimensioni σ^{n-1} che ne costituisce la sua faccia; porremo anche

$$\eta^n_{0i}[\sigma^n_0, \ \sigma^{n-1}_i] . \tag{19.7}$$

Ovviamente il concetto di incidenza che qui è stato introdotto, come relazione che intercede tra il simplesso σ^n e le sue faccie, può essere generalizzato.

Abbiamo infatti osservato che, una volta fissato il simplesso ad n dimensioni σ^n, quando si considerano soltanto r tra i suoi vertici (con $r \leqslant n$) si possono costruire $\binom{n+1}{r}$ simplessi ad $(r-1)$ dimensioni, ognuno dei quali può essere convenientemente orientato.

È possibile pertanto definire dei coefficienti di incidenza per qualunque valore della dimensione r da 1 ad n; precisamente, considerati due simplessi σ^r_i ed σ^{r-1}_i al coefficiente di incidenza

$$\eta^r_{ij} = [\sigma^r_i, \ \sigma^{r-1}_i]$$

viene attribuito il valore zero se σ^{r-1}_j *non* è faccia di σ^r_i e viene attribuito il valore $+1$ oppure -1 a seconda che σ^{r-1}_j (essendo faccia di σ^r_i) possegga una orientazione concorde oppure discorde con quella che ad esso compete in quanto faccia di σ^r_i.

Si costruiscono pertanto n matrici i cui elementi sono $+1$, oppure -1 oppure zero, che vengono chiamate *matrici di incidenza* corrispondenti ad ogni valore della dimensione, da 1 ad n.

20. — Le considerazioni che abbiamo svolte nei precedenti n[i]. conducono direttamente alla costruzione di certi enti algebrici relativi ai simplessi, enti che vengono chiamati *catene simpliciali*. Queste si costruiscono estendendo in modo molto naturale l'operazione di «somma» ai simplessi di varie dimensioni; operazione che appare abbastanza evidente quando ci si riferisca alla illustrazione geometrica che abbiamo data di simplesso nello spazio euclideo ad n dimensioni.

Per dare alla definizione che vorremo conseguire una certa generalità (che non è tuttavia la massima possibile) consideriamo un gruppo abeliano G, che può essere finito oppure no (Art. II, n. 11); indicheremo come al solito con «$+$» l'operazione di composizione nel gruppo G e con «0» l'elemento neutro per tale operazione; per fissare le idee il Lettore può pensare per es. al gruppo J formato dai numeri interi rispetto all'operazione di somma (presa nel senso abituale di questo termine) oppure al gruppo finito degli interi modulo 2, costituito da due soli elementi: 0, 1, con le leggi di composizione

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0 \; ; \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1 \, .$$

Riferiamoci per semplicità ancora all'immagine dei simplessi di punti appartenenti allo spazio R^n. Considerato un intero m maggiore di zero e non superiore ad n, chiamiamo complesso simpliciale ad m dimensioni un insieme K di simplessi di punti appartenenti allo spazio R^n soddisfacenti alla condizione che due simplessi dell'insieme che hanno in comune una faccia non hanno in comune alcun altro punto fuori di quella eventuale faccia comune.

Consideriamo ora una applicazione, indicata simbolicamente con c_m, la quale fa corrispondere ad ogni simplesso σ^m del complesso K un elemento g del gruppo G; indicheremo questo fatto scrivendo:

$$c_m(\sigma^m) = g \tag{20.1}$$

con una scrittura che è ovviamente mutuata dal simbolismo delle funzioni dell'Analisi matematica.

Supponiamo ora che valga per l'applicazione c_m la condizione

$$c_m(-\sigma^m) = -c_m(\sigma^m) = -g \, . \tag{20.2}$$

Inoltre, considerate due applicazioni cosiffatte ed indicatele con c_m^1 e c_2^m poniamo per definizione

$$(c_m^1 + c_m^2)\sigma_m = c_m^1(\sigma^m) + c_m^2(\sigma^m) \tag{20.3}$$

essendo l'operazione indicata con « + » nel secondo membro la composizione nel gruppo G, ed essendo σ^m un qualunque simplesso ad m dimensioni di K. Chiameremo « catene m-dimensionali » sul complesso K le applicazioni definite su K a valori in G che soddisfano alle leggi formali (20.2) e (20.3). L'insieme di tutte le catene m-dimensionali di K verrà indicato con il simbolo $C_m(K, G)$.

Ovviamente la (20.3) assegna all'insieme delle catene m-dimensionali su K una struttura di gruppo abeliano, essendo l'operazione di composizione indicata con il simbolo « + » che è pure usato per indicare la composizione nel gruppo G; tale gruppo viene chiamato ***gruppo delle catene m-dimensionali di K a coefficienti in G***. Come ulteriore convenzione si stabilisce che se K non possiede simplessi ad m dimensioni, il corrispondente gruppo $C_m(K, G)$ sia formato dall'unico elemento zero.

Consideriamo ora un simplesso σ_0^m; chiameremo ***catena elementare*** relativa a σ_0^m quella applicazione c_m che fa corrispondere al simplesso σ_0^m un elemento g_0 del gruppo G e ad un altro simplesso qualunque ad m dimensioni l'elemento 0 di G; tale catena elementare viene indicata con il simbolo

$$g_0 \cdot \sigma_0^m \tag{20.4}$$

cioè come il prodotto *formale* dell'elemento g_0 del gruppo G e del simplesso σ_0^m.

Per es. nel caso particolare in cui il gruppo G coincida col gruppo J di tutti i numeri interi (relativi) l'elemento g è ovviamente un intero n e la (20.4) stabilisce la definizione del concetto di « multiplo » di un simplesso σ_0^m secondo l'intero (relativo) n.

Mediante la considerazione delle catene elementari una qualunque catena del gruppo $C(K, G)$ può essere rappresentata nella forma simbolica come somma di catene elementari

$$\sum_{i=1}^{\alpha_m} g_i \cdot \sigma_i^m \tag{20.5}$$

essendo α_m il numero dei simplessi ad m dimensioni che appartengono al complesso K.

Con ovvia generalizzazione di quanto è stato detto fin qui è possibile definire il gruppo di tutte le catene simpliciali definite su K rispetto a tutte le dimensioni; tale gruppo risulta essere ovviamente la somma diretta di m gruppi abeliani, se m è la dimensione massima dei simplessi che appartengono a K. È anche chiaro che si può ulteriormente estendere il concetto di catena considerando una opportuna convenzione per attribuire un « segno » ai singoli vertici e quindi considerando anche il gruppo delle catene di dimensione zero del complesso simpliciale K.

21. — Sia ora K un complesso simpliciale orientato, sia σ_0^m un simplesso ad m dimensioni che appartiene a K e sia

$$g_0 \cdot \sigma_0^m \tag{21.1}$$

la catena elementare che associa al simplesso σ_0^m l'elemento g_0 del gruppo G dei coefficienti e che associa ad ogni altro simplesso del complesso K l'elemento zero del gruppo G.

Chiamiamo *bordo* della catena (21.1) ed indichiamo con il simbolo $\partial(g_0, \sigma_0^m)$ la catena ad $(m-1)$ dimensioni definita da

$$\partial(g_0 \cdot \sigma_0^m) = \sum [\sigma_0^m, \sigma^{m-1}] g_0 \sigma^{m-1} \tag{21.2}$$

essendo la somma al secondo membro estesa a *tutti* i simplessi ad $(m-1)$ dimensioni che formano le faccie di σ_0^m, ognuno preso con l'orientazione naturale che ad esso compete in quanto faccia di σ_0 ed avendo indicato con il simbolo $[\sigma_0^m, \sigma^{m-1}]$ il coefficiente di incidenza tra σ_0^m e σ^{m-1} (cfr. n. 19).

In altre parole il bordo della catena elementare $g_0\sigma_0^m$ è la catena che si ottiene come somma delle catene elementari di dimensione $(m-1)$ che hanno valore g_0 su tutte le faccie di σ_0^m, orientate in modo naturale.

Si verifica immediatamente che il bordo della somma di due catene è la somma dei bordi di esse; in altre parole si può considerare il simbolo « ∂ » che abbiamo definito mediante la (21.2) come il simbolo di una corrispondenza univoca tra il gruppo delle catene ad m dimensioni e quello delle catene ad $(m-1)$ dimensioni; tale corrispondenza, per la proprietà rilevata or ora, è un omomorfismo.

Si chiama *ciclo* ad m dimensioni una catena ad m dimensioni che ha come bordo l'elemento neutro (lo zero) delle catene ad $(m-1)$ dimensioni. In base all'osservazione ora fatta, l'insieme dei cicli ad m dimensioni costituisce un sottogruppo del gruppo abeliano delle catene ad m dimensioni; tale sottogruppo è il nucleo dell'omomorfismo simboleggiato dall'operatore « ∂ » e precisamente il sottogruppo definito dalla proprietà che ogni suo elemento viene applicato nell'elemento neutro del gruppo corrispondente.

Si dimostra anche il seguente fondamentale Teorema: ogni bordo è un ciclo. In altre parole se una catena ad m dimensioni è il bordo di una catena ad $(m-1)$ dimensioni essa ha come bordo l'elemento neutro (lo zero) del gruppo delle catene ad $(m-1)$ dimensioni.

La dimostrazione di questa fondamentale proprietà è facile in base alla (19.4) che dà la definizione di faccia di un simplesso; la verificheremo qui nel caso particolare ed elementare che il gruppo G dei coefficienti delle catene sia il gruppo J degli interi (relativi) e che il complesso K si riduca ad un simplesso nello spazio abituale a tre dimensioni (tetraedro). Indicati con

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$$

i vertici e posto

$$\sigma_0^3 = \langle x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3\rangle\ ,$$

il bordo di σ_0^3 è ovviamente la catena

$$\langle x_1,\ x_2,\ x_3\rangle - \langle x_0,\ x_2,\ x_3\rangle + \langle x_0,\ x_1,\ x_3\rangle - \langle x_0,\ x_1,\ x_2\rangle$$

ed il bordo di questa è data dalla catena

$$\begin{aligned}&\langle x_2, x_3\rangle - \langle x_1, x_3\rangle + \langle x_1, x_2\rangle - \langle x_2, x_3\rangle +\\&+ \langle x_0, x_3\rangle - \langle x_0, x_2\rangle + \langle x_1, x_3\rangle - \langle x_0, x_3\rangle +\\&+ \langle x_0, x_1\rangle - \langle x_1, x_2\rangle + \langle x_0, x_2\rangle - \langle x_0, x_1\rangle\end{aligned}$$

che si verifica subito essere l'elemento zero delle catene di dimensione 1.

Pertanto, considerato il complesso simpliciale K ed un gruppo abeliano G, ad ogni dimensione m corrispondono tre gruppi: il gruppo $C_m(K,G)$ delle catene simpliciali ad m dimensioni, il gruppo dei cicli, che indicheremo con $Z_m(K, G)$ ed il gruppo dei bordi, che indicheremo con $B_m(K, G)$; ovviamente questi due ultimi gruppi sono pure abeliani e sono sottogruppi di $C_m(K, G)$ e precisamente si ha la relazione, qualunque sia la dimensione m:

$$C_m(K, G) \supseteq Z_m(K, G) \supseteq B_m(K, G)\,. \tag{21.3}$$

22. — In tutto quello che segue, fino ad esplicito eventuale avviso contrario, supporremo che il gruppo abeliano dei coefficienti sia il gruppo J degli interi relativi e che il complesso K sia fissato una volta per tutte; pertanto nei simboli che indicano i gruppi delle catene, dei cicli e dei bordi ad m dimensioni trascureremo di richiamare ogni volta il gruppo G ed il complesso K, scrivendo semplicemente C_m, Z_m, B_m rispettivamente.

È ora possibile nel gruppo dei cicli ad m dimensioni considerare il gruppo fattoriale (Art. VI, n. 5) rispetto al sottogruppo dei bordi; questa operazione, espressa con parole poco rigorose, conduce sostanzialmente ad «identificare» (come si suol dire) due cicli quando differiscono soltanto per un terzo ciclo che è un bordo. Si ottiene così un gruppo abeliano, il quale come si è detto risulta essere il gruppo fattoriale del gruppo dei cicli rispetto al sottogruppo dei bordi; tale gruppo viene indicato col simbolo H_m, ponendo quindi:

$$H_m = Z_m/B_m \tag{22.1}$$

e viene chiamato «gruppo di omologia ad m dimensioni» del complesso K.

Questo gruppo abeliano è di fondamentale importanza nello studio dei complessi simpliciali: esso in generale essendo un gruppo abeliano, ammette certi generatori (Art. VI, n. 13); cioè certi elementi mediante i quali, con combinazione lineare, si possono costruire tutti gli elementi del gruppo H_m. Tra questi generatori ve ne possono essere di quelli ciclici

(Art. VI, n. 3) e di quelli aciclici; **un elemento *a* del primo tipo è tale** che esista almeno un intero n tale che si **abbia**:

$$na = 0\,, \tag{22.2}$$

invece per un elemento del secondo tipo una relazione **del genere della** (22.2) non può mai sussistere.

Gli elementi del primo tipo generano un sottogruppo del gruppo m, che viene chiamato « gruppo della torsione » ad m dimensioni. In base ad un teorema fondamentale di Algebra sui fondamenti dei gruppi abeliani e degli spazi vettoriali (Art. III); il numero dei generatori del gruppo della torsione è un invariante del gruppo stesso rispetto ai cambiamenti degli elementi che si assumono come « elementi base » per la espressione di ogni altro elemento del gruppo.

Gli elementi del secondo tipo (aciclici) generano un gruppo libero; il numero dei generatori del gruppo viene chiamato *numero di Betti* ad m dimensioni del complesso.

Indichiamo ora con α_m ($m = 0, 1, \ldots, n$) il numero dei simplessi ad m dimensioni del complesso K.

Quindi il numero degli elementi generatori del gruppo libero abeliano delle catene ad m dimensioni di K è α_m. Indichiamo poi con ξ_m e con β_m il numero dei generatori dei gruppi Z_m e B_m rispettivamente. Supponiamo per semplicità che non esista torsione; in tal caso i gruppi stessi sono gruppi abeliani liberi.

Poichè l'omomorfismo tra gruppi che è generato dall'operazione « ∂ » porta un elemento del gruppo delle catene ad m dimensioni in uno del gruppo B_m e porta ogni ciclo nello zero (cfr. n. 21) si avrà

$$\alpha_m - \xi_m = \beta_{m-1} \qquad \text{per} \quad m > 0 \tag{22.3}$$

ed inoltre, poichè ogni vertice può essere considerato come elemento di una catena a zero dimensioni e può essere considerato come ciclo, si avrà anche

$$\alpha_0 = \xi_0\,. \tag{22.4}$$

Indichiamo ora con $p_m(K)$ il numero di Betti ad m dimensioni del complesso K. Poichè tale numero è il numero dei generatori del gruppo di omologia, che è il gruppo fattoriale del gruppo dei cicli rispetto a quello dei bordi, si avrà

$$p_m(K) = \xi_m - \beta_m \tag{22.5}$$

e quindi dalla (22.3)

$$\alpha_m = p_m(K) + \beta_m + \beta_{m-1} . \tag{22.6}$$

In particolare, se il complesso è ad n dimensioni non esistono catene che siano bordi ad n dimensioni; quindi si ha

$$\alpha_m = p_n(K) + \beta_{n-1} \tag{22.7}$$

come caso particolare della (22.6).

Dalle formule precedenti, sommando con segni alterni per i vari valori di m da zero ad n si ottiene la relazione

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j p_j(K) . \tag{22.8}$$

Il numero

$$\varkappa(K) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \alpha_j$$

viene chiamato «caratteristica di Eulero» del complesso: il teorema espresso dalla (22.8) generalizza in modo ovvio il classico teorema di Eulero sui poliedri, del quale abbiamo parlato nella introduzione.

23. — Ciò che abbiamo detto fin qui si riferisce a complessi simpliciali; appare tuttavia immediato pensare che la proprietà che abbiamo brevemente esposte si possano estendere anche ai luoghi di punti che si ottengano come trasformati di complessi cosiffatti mediante omeomorfismi.

Ci si riallaccia così alla concezione classica della Topologia, intesa come analisi delle figure mediante lo studio delle proprietà che sono invarianti per le trasformazioni biunivoche e continue.

Non intendiamo qui proseguire in questa direzione, bastandoci avere accennato alla cosa; ci interessa invece dare qualche cenno di altre estensioni dei concetti che abbiamo esposto fin'ora, estensioni che si ottengono mediante l'applicazione degli strumenti algebrici di cui ci siamo serviti. A tal fine consideriamo ancora il gruppo di *tutte* le catene del complesso K che abbiamo considerato nei n[i]. 20, 21, 22; esso ci si presenta come un gruppo abeliano, formato dalla somma diretta di certi $n+1$ gruppi che sono quelle catene delle varie dimensioni e dotato di un certo omomorfismo su se stesso; precisamente l'omomorfismo che associa ad ogni catena ad m dimensioni una certa catena ad $(m-1)$ dimensioni che è il suo bordo, con la condizione che è espressa dal teorema fondamentale enunciato alla fine del n. 21, cioè che ogni bordo è un ciclo e quindi viene portato nell'elemento zero da una successiva applicazione dell'operazione indicata dall'operatore « ∂ ».

Si suole esprimere questo fatto dicendo che l'operatore « ∂ » è *autonullifico* e si suole indicare questa proprietà con la formula seguente

$$\partial^2 = 0 . \tag{23.1}$$

Si è dimostrata di particolare fecondità l'idea di considerare un secondo operatore indicato per es. con « δ » il quale pure realizza un omomorfismo sul gruppo delle catene del complesso associando ad ogni simplesso ad m dimensioni di K una catena ad $(m + 1)$ dimensioni che viene chiamata « cobordo » del simplesso. Ovviamente una catena che ammette come cobordo l'elemento zero delle catene ad $(m + 1)$ dimensioni sarà chiamata « cociclo » e si dimostra che vale il teorema fondamentale che ogni cobordo è un cociclo e quindi l'operatore « δ » è autonullifico come l'operatore « ∂ ». Si può quindi parlare del gruppo di coomologia ad m dimensioni, definito come il gruppo fattoriale dei cocicli rispetto ai cobordi.

La fecondità dell'idea che abbiamo brevemente accennata sta nel fatto che questi concetti si possono applicare anche in campi che a prima vista appaiono molto lontani da quelli di cui abbiamo parlato in relazione alla particolare immagine geometrica data dai complessi simpliciali.

24. — A conclusione di quanto abbiamo detto fin qui vogliamo accennare ad un fondamentale teorema che è adottato come uno strumento fondamentale in moltissimi campi della Topologia e dell'Analisi matematica. Vogliamo dire del teorema abitualmente indicato come teorema del punto fisso o teorema di Brouwer. Nella sua forma originale questo teorema viene enunciato nel modo seguente: sia dato un simplesso $\mathcal{S}$ e sia φ una trasformazione univoca di $\mathcal{S}$ in se stesso, tale che considerato un punto P qualunque di $\mathcal{S}$, $\varphi(P)$ sia *interno* ad $\mathcal{S}$. Esiste allora almeno un punto fisso per la trasformazione cioè esiste almeno un punto $\overline{P}$ tale che si abbia

$$\overline{P} = \varphi(\overline{P}) .$$

Ovviamente l'enunciato che abbiamo dato e che si riferisce ad una trasformazione di un simplesso in se stesso può essere via via generalizzato, estendendolo in ipotesi che siano via via sempre meno restrittive, in modo da ottenere un risultato di grande generalità. Si intuisce facilmente tuttavia che un teorema di esistenza come quello che abbiamo enunciato possa essere applicato ai campi più svariati e costituisca il lemma fondamentale per le dimostrazioni di esistenza che occorrono. Valga per tutti il caso della dimostrazione dell'esistenza della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, che viene ricondotto alla dimostrazione dell'esistenza di un elemento unito per una trasformazione in sè di un opportuno spazio funzionale.

BIBLIOGRAFIA

La bibliografia della Topologia Generale e dei suoi capitoli specializzati è oggi imponente; tuttavia essa comprende prevalentemente opere in lingua non italiana. L'elenco che segue si riferisce ad opere in italiano, a livello elementare:

ALEKSANDROV, P. S.: *Topologia Combinatoria* (*Trad. di L. Lombardo Radice*), Einaudi, Torino (1957).

CONFORTO, F. - BENEDICTY, M.: *Introduzione alla Topologia* (*Consiglio Nazionale delle Ricerche - Monografie Matematiche n. 6*), Cremonese, Roma (1960).

PATTERSON, E. M.: *Topologia* (*Trad. di C. Guaraldo*), Cremonese, Roma (1966).

ZAMANSKY, M.: *Introduzione all'algebra e all'analisi moderna* (*Trad. di L. Muracchini*), Feltrinelli, Milano (1966).

STEB - Via E. Zago, 2 - Bologna - V, 1969