CONVEGNO NAZIONALE DI «NUOVA SECONDARIA»

Relazione del prof. **Carlo Felice Manara**
Ordinario di istituzioni di geometria superiore - Università di Milano - sul tema:

«Matematica»

29 novembre 1985

On peut avoir trois principaux objets dans l'étude de la verité: l'un de la découvrir quand on la cherche; l'autre, de la démontrer quand on la possède; le dernier, de la discerner d'avec le faux quand on l'examine.

(B. Pascal, *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader)*

1. L'insegnamento della matematica come avviamento alla formazione scientifica. La situazione della matematica nel curriculum scolastico dei nostri giovani ha qualche cosa di paradossale. Infatti si afferma da tutte le parti che la matematica è assolutamente necessaria, che non si può escludere da nessun curriculum scolastico. Ma d'altra parte essa viene troppo spesso considerata come una materia per così dire «di servizio»; spesso come uno strumento insostituibile per molte altre materie e per molte applicazioni, ma che limita la propria giustificazione appunto al servizio che essa può rendere. Pertanto la matematica viene insegnanta come un insieme di procedure a volte non pienamente giustificate, oppure come un insieme di formule non dimostrate, che si adoperano secondo certe regole senza domandarsi il perché.

Questo atteggiamento, anche troppo diffuso, si è ulteriormente aggravato in tempi recenti, a causa della diffusione della moda dell'informatica; moda che ha provocato una estesa richiesta di insegnamento di questa materia. Ma occorre confessare che spesso questo insegnamento viene tendenzialmente ricondotto all'addestramento alla applicazione di programmi e soprattutto alla richiesta di risposte da parte della macchina, sorvolando sulle motivazioni e sulle dimostrazioni.

Noi pensiamo invece che la matematica abbia un radicale valore formativo per la personalità dei discenti; e pertanto pensiamo che l'insegnante accorto ed avveduto possa dirigere il proprio lavoro, insegnando la matematica, proprio nella direzione che fa di questa materia un elemento indispensabile per la formazione razionale e scientifica. In altre parole, noi pensiamo che la matematica dovrebbe essere considerata come la struttura portante di una vasta regione della cultura attuale delle nazioni civilizzate; e con il termine «cultura» intendiamo indicare qui non un insieme di tradizioni, usi, costumi e addirittura abitudini, come spesso oggi si fa, ma come il fondamento di un porsi razionale di fronte al mondo, alla natura ed all'uomo.

Nelle pagine che seguono cercheremo di provare, nei limiti del possibile, il nostro assunto e cercheremo anche di mettere a fuoco almeno alcuni dei problemi didattici che si presentano quando si adotti questa concezione della matematica.

2. La matematica come una struttura portante della scienza moderna. Non crediamo che siano necessarie tante parole per confermare la tesi sulla importanza della matematica nella scienza moderna; ci limitiamo a riportare qui un classico passo di Galileo, che esprime questo nostro pensiero con chiarezza esemplare. Scrive Galileo nel *Saggiatore*: «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'Universo), ma non si può intender se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto».

Non si può negare che queste affermazioni di Galileo abbiano trovato conferma nella storia della scienza più recente: infatti la matematica si è dimostrata lo strumento concettuale ed espressivo più efficace per la descrizione dei fenomeni, per la formulazione delle ipotesi, per la deduzione rigorosa; i successi della fisica moderna dimostrano queste nostre tesi in modo che crediamo inconfutabile. Ma vorremmo osservare che anche le altre scienze della natura dimostrano di subire l'influenza della metodologia matematica; anche quelle non ancora completamente matematizzate, anche quelle che — a parere di qualcuno — sono forse difficilmente matematizzabili. Ci sembra di poter scorgere i sintomi di questo fatto nella tendenza alla adozione di simbolismi convenzionali e soprattutto nella diffusione del metodo assiomatico, che si presenta come il quadro ideale di riferimento per ogni scienza che voglia analizzare senza preclusioni i propri punti di partenza, saggiare i propri principi ed adottare dei metodi di deduzione ineccepibili.

Molto si potrebbe aggiungere per confortare il nostro pensiero; ma crediamo che questi pochi cenni siano sufficienti per dimostrare che la matematica costituisce una struttura portante della mentalità scientifica di oggi; e, quando si pensi quale sia il posto che la scienza ha nella nostra mentalità e nella nostra vita quotidiana, pensiamo che si possa tranquillamente parlare di componente fondamentale della nostra cultura, proprio utilizzando il termine nel senso che abbiamo sopra precisato.

Da queste premesse scaturiscono abbastanza facilmente alcune conseguenze, per quanto attiene al posto che la matematica prende nei curricula delle varie scuole e soprattutto nei riguardi della didattica di questa scienza; le stesse premesse, poi, ci aiutano nella operazione di analizzare il posto che la matematica ha nei programmi ufficiali di insegnamento, programmi che — in certo modo — svelano la posizione delle autorità scolastiche rispetto alla cultura attuale.

Infatti, se accettiamo l'idea che la matematica costituisca un fondamento di una larga fetta della nostra cultura, ci pare giusto che questa materia sia insegnata in ogni livello di scuola, come di fatto avviene. Ma forse il fatto che essa sia menzionata nei programmi di ogni livello scolastico è più il segno della obbedienza ad una necessità della vita civile associata che quello di una convinzione a proposito delle idee che abbiamo esposto nel paragrafo 1.

In altre parole, si direbbe che nella mente dei più (e forse anche del legislatore) la matematica si presenti come una specie di «male necessario», come un ingrediente — per molti spiacevole — dell'insieme di conoscenze che la comunità nazionale deve insegnare per condurre i giovani a «leggere, scrivere e far di conto»; e purtroppo, anche nei livelli superiori di scuola, la matematica viene spesso insegnata con un atteggiamento analogo.

Si direbbe infatti che nei programmi della scuola media siano stati inclusi certi capitoli perché c'è stato chi ha detto, per esempio, che «... non si può fare a meno dell'algebra elementare, oppure delle equazioni di II grado, oppure della trigonometria».

Il risultato di questa impostazione è che si trovano molti adulti i quali dichiarano che durante la loro vita professionale ne hanno fatto sempre a meno e che quindi non capiscono perché durante la scuola media abbiano dovuto sobbarcarsi ad una fatica mentale che a loro non ha portato alcun frutto. Ed anche troppo spesso si odono dei professionisti, o delle persone che hanno conseguito delle qualifiche accademiche, che si lamentano per il fatto che la scuola, media oppure universitaria, non ha loro insegnato nulla di «utile».

Ci sarebbe da discutere a lungo sull'argomento della «utilità» delle cose che la scuola insegna; volendo riprendere il discorso a proposito dei problemi della didattica dell'insegnamento della matematica, vorremmo anzitutto osservare che tali problemi possono essere visti secondo luci diverse e presentano degli aspetti che sono difficili da separare; ma riteniamo che una analisi, anche rudimentale, possa essere utile.

Un primo punto di vista è quello che viene rispecchiato dai programmi, e riguarda i contenuti, le cose che vengono insegnate.

Come abbiamo già detto, vi sono delle conoscenze di matematica che non possono essere trascurate, se la comunità nazionale vuol dare ai cittadini le nozioni oggi necessarie per la sopravvivenza.

Da questo punto di vista, la determinazione dei contenuti elementari pare che possa essere tranquillamente quella della scuola tradizionale. Invero la nostra opinione è che, soprattutto in età preadolescenziale, la mente del giovane debba fare notevolissimi sforzi per assimilare tutte le convenzioni di espressione che le sono presentate: la grammatica e la morfologia delle lingue, le convenzioni di rappresentazione dei numeri, le leggi delle operazioni aritmetiche ecc.

Si osserva da qualche parte — giustamente — che la memoria del giovane è molto più pronta e potente di quella dell'adulto; e forse questa osservazione ha indotto talvolta gli estensori dei programmi ufficiali d'insegnamento ad una introduzione «selvaggia» di nuovi argomenti, giudicati di volta in volta «irrinunciabili». Ma vorremmo anche osservare che, accanto ad una relativa facilità di ricordare, la mente del giovane ha anche una relativa povertà di esperienze, di «vissuto».

E quando parliamo di esperienza vissuta intendiamo ovviamente riferirci anche alle nozioni che l'allievo apprende colle altre materie di insegnamento e con docenti diversi da quelli che gli insegnano matematica.

Pertanto l'ampliarsi dell'universo di contenuti potrebbe portare ad una situazione in cui le strutture formali che vengono insegnate e che il giovane deve ricordare sono superiori alle necessità di dominare l'universo della sua esperienza.

Ne consegue che le strutture formali insegnate sono sì facilmente memorizzate, ma non sempre completamente recepite; e vengono quindi altrettanto facilmente dimenticate alla prima occasione.

In relazione a questi problemi didattici, vorremmo riprendere qui alcune idee che abbiamo esposto ripetutamente in varie occasioni; a tal fine vorremmo riattaccarci a quelle frasi di Galileo che abbiamo citato sopra e che presentano la matematica come il linguaggio di elezione della conoscenza scientifica del mondo; cioè — ripetiamo — come il mezzo più adatto per rappresentare i fenomeni, per enunciare le ipotesi, per trarre le conseguenze da queste. Se accettiamo questa concezione, noi pensiamo che sia opportuno accettare anche la procedura con la quale ogni linguaggio viene appreso; ci pare infatti di poter dire che l'apprendimento di una lingua, e soprattutto della lingua materna, avviene impiegando tale lingua per i bisogni elementari e si accresce man mano che si accresce l'universo dei bisogni, delle cose da descrivere, dei concetti da esprimere. Soltanto in un secondo tempo il bambino viene posto di fronte ad uno studio e ad una serie di informazioni che riguardano non le cose che egli dice, ma la struttura dei mezzi linguistici che egli impiega per dirle.

In questo ordine di idee, quindi, noi penseremmo che l'insegnamento della matematica dovrebbe seguire il cammino che in ogni caso va dal concreto all'astratto, dalla intuizione della natura di un ente alla sua concettualizzazione precisa ed alla sua descrizione con i mezzi linguistici della scienza.

Analogamente, la soluzione dei problemi dovrebbe andare dalla creatività (che fa spesso intuire la soluzione nei suoi termini finali e mostra la strada che si sceglie spesso senza conoscerne la ragione) alla rigorosa dimostrazione con i mezzi della logica.

A ciò che è stato detto finora ci par di poter aggiungere anche qualche complemento a proposito del ruolo dell'esercizio nell'insegnamento della matematica in modo ragionevole. Può apparire abbastanza comprensibile il fatto che l'esercizio non riscuota sempre le simpatie di molti studenti; e ciò quando si tenga conto del fatto che spesso l'esercizio richiede impegno, costanza, perseveranza e pazienza; doti tutte che i giovani non sempre e non volontieri accettano di esercitare.

Se portiamo avanti il parallelismo tra l'insegnamento di una lingua e quello della matematica, ci convinciamo facilmente che, anche in quest'ultimo caso, come nel caso della lingua, l'esercizio costituisce parte integrante dell'insegnamento. Invero, nel caso della lingua la cosa è abbastanza scontata, ed ovviamente l'esercizio tende in modo quasi naturale a portare l'allievo a dire qualche cosa, cioè ad esercitare le proprie conoscenze in relazione a certi contenuti; e pare che nella didattica moderna l'esercizio linguistico puramente formalistico, rivolto soltanto alla acquisizione delle forme linguistiche, pur essendo essenzialmente necessario, tenda ad avere uno spazio sempre minore: le tediose ripetizioni di declinazioni e coniugazioni, gli elenchi litanianti di preposizioni e di forme irregolari, le memorizzazioni meccaniche di paradigmi verbali, pur essendo — ripetiamo — assolutamente necessari possono essere oggi meno pesanti di quanto non fossero nei nostri anni giovanili.

Nel caso della matematica, si direbbe che spesso la necessità di far conquistare ai giovani la manovra sicura di un linguaggio dalle regole rigorose, precise ed inesorabili induca spesso gli insegnanti in certe tentazioni che hanno talvolta risultati mortificanti per loro e per gli allievi. Intendiamo riferirci a certi esercizi tediosi e quasi senza scopo apparente; certi calcoli con parentesi entro altre parentesi, che sono a loro volta interne a parentesi, certe linee di frazione sopra e sotto altre linee di frazione, certe riduzioni di termini simili in polinomi lunghissimi e complicatissimi, certe acrobazie con le funzioni trigonometriche (acrobazie oggi rese praticamente inutili dopo la diffusione capillare dei piccoli calcolatori); insomma, certi esercizi puramente formali, quando sono troppo numerosi, paiono fatti apposta per annoiare e anche per scoraggiare l'allievo.

Conosciamo dei casi di giovani abbastanza dotati che sono stati distolti e disgustati dalla matematica perché il giudizio dell'insegnante sulle loro capacità risultava costantemente negativo, di fronte ad errori materiali ripetutamente introdotti nei calcoli di esercizio. E, correlativamente, conosciamo anche dei casi di giovani che hanno scelto gli studi di matematica in base a giudizi positivi basati quasi soltanto sulla abilità algoritmica nella esecuzione dei calcoli numerici o algebrici. Nel primo caso, un cambiamento ragionevole del tipo di esercizi proposti ha potuto riassicurare i giovani e ricondurli ad apprezzare il significato del ragionamento matematico, e addirittura a mettere in evidenza uno spirito di schematizzazione, un gusto del ragionamento astratto, una inventiva nelle soluzioni dei problemi che erano stati mortificati metodicamente dagli esercizi tediosi e sostanzialmente inutili; nel secondo caso, tutte queste qualità si sono dimostrate ampiamente e serenamente assenti, e quindi i soggetti hanno avuto la sgradita sorpresa di do-

ver constatare che la matematica è qualche cosa di diverso e di più del semplice acrobatismo con le formule e con i simboli.
Giacché abbiamo iniziato il discorso relativo a quella parte fondamentale dell'insegnamento che è l'esercizio, ci permettiamo un'altra divagazione, per parlare del problema della verifica dell'apprendimento, ed in particolare di quel nodo cruciale costituito dagli esami.
A proposito della matematica ricordiamo le tradizionali prove di maturità del liceo scientifico di vari anni fa, in cui veniva costantemente presentato un problema geometrico che dava luogo ad un problema di equazioni di secondo grado contenenti un parametro. La discussione della equazione veniva regolarmente eseguita dai candidati mediante certi metodi standardizzati, in cui l'unica parte intelligente del programma veniva abitualmente ridotta ad una applicazione meccanica di procedure non capite e non assimilate. Ci vengono in mente certi esami di maturità recenti, nei quali, secondo una caterva di circolari ministeriali e di altre disposizioni, le interrogazioni debbono restringersi al programma svolto nell'ultimo anno di corso.
Come se la matematica potesse essere considerata un insieme di capitoli staccati, senza connessioni logiche tra loro. Naturalmente genitori e sindacalisti occhiuti vigilano perché queste disposizioni siano rispettate, e fanno da testimoni agli esami per evitare che nessun imprudente esaminatore osi sconfinare, anche se si tratta di domandare qualche cosa che sia strettamente attinente all'argomento di cui si parla. E se non è così fioccano le proteste, le lettere ai giornali, le proteste nelle interviste televisive, le minacce di ricorsi ai vari TAR regionali, i ricorsi effettivamente presentati.
Ora accade che, nella tradizione dello svolgimento dei programmi, all'ultimo anno, per esempio nel liceo classico, si svolge la trigonometria, e talvolta qualche altro breve capitolo per iniziativa di qualche insegnante di buona volontà; di conseguenza la preparazione all'esame di maturità diventa un inzeppamento di formule di trigonometria, una abbuffata ripugnante di cose non capite da quasi tutti, dimenticate subito dopo l'esame quando questo abbia un esito positivo, cosa che avviene — come si sa — nella enorme maggioranza dei casi, per circolare ministeriale.
È quasi inutile aggiungere che ci pare questo il modo più efficace per avvilire chi vorrebbe insegnare bene e chi avrebbe qualche voglia di imparare.

3. La matematica nella storia del pensiero scientifico. La dimensione umanistica della matematica. L'abitudine a considerare la matematica come una materia «di servizio», oltre a dare occasione ad un insegnamento spesso puramente addestrativo, trascura anche un aspetto profondamente formativo di questa scienza.
Ora, noi pensiamo che questo aspetto formativo non possa essere disgiunto dal significato umanistico dell'insegnamento della matematica; significato che può essere messo in luce dicendo che la matematica, come tutta la conoscenza scientifica del resto, è una grande avventura dell'uomo, avventura che si è sviluppata durante i secoli. Sarebbe un comportamento contrario alla retta interpretazione dell'ufficio della scuola, come istituzione che trasmette i più grandi valori di una comunità, insegnare una dottrina senza dare almeno qualche cenno del significato e della portata che questa ha avuto per chi ci ha preceduti sulla scena del mondo.
E vorremmo poter dire che la differenza tra l'uomo, che ha una storia, e l'animale, che ha soltanto una evoluzione biologica, sta anche nel fatto che l'animale trasmette alla propria prole un insieme di comportamenti a livello istintivo, mentre l'uomo trasmette un insieme di informazioni a livello concettuale.
Il nostro discorso si è spontaneamente spostato sul problema dell'insegnamento della matematica, inquadrato in una visione storica di questa scienza.
Va detto che, nelle avvertenze dei programmi ministeriali, vi sono sempre stati dei paragrafi dedicati a raccomandare l'inquadramento storico delle nozioni impartite. Ma, nella pratica, e nella concezione che è stata di moda in tempi recenti (secondo la quale la matematica cosiddetta «moderna» avrebbe dovuto rivoluzionare la concezione di questa scienza e ovviamente la didattica), la menzione di nozioni storiche era limitata alla citazione delle biografie dei grandi matematici, oppure — peggio ancora — alla esposizione di episodi aneddotici curiosi, di quelli che fanno pensare ai matematici come una classe di persone stravaganti e distaccate dalla vita comune e spesso dal buon senso.
E vi sono anche esempi di note storiche grottescamente compilate secondo grossolane direttive ideologiche: capita per esempio di leggere, in qualche libro non tra i meno diffusi, che Pitagora fu perseguitato dai preti suoi contemporanei perché con il suo teorema aveva «dimostrato» che Dio non esiste (!).
È chiaro che noi desidereremmo degli atteggiamenti di maggiore serietà storica da parte degli autori e crediamo di poter dire che forse le notizie storiche, adeguatamente presentate, possano essere di aiuto alla didattica, e possano servire a suscitare l'interesse dei discenti.
Ed in questo ordine di idee noi pensiamo che, accanto alle menzioni delle vite dei matematici più importanti, sia anche utile dare qualche idea della storia delle idee, della evoluzione delle teorie.
Noi pensiamo infatti che le varie teorie non siano comparse sulla scena all'improvviso, come delle trovate estemporanee di cervelli per l'appunto singolari come quelli dei matematici. Ma invece pensiamo che esista uno sviluppo del pensiero scientifico, sviluppo che vede continuamente porre nuovi problemi scaturiti dalla soluzione dei precedenti, con una dialettica costante di ricerca, di dubbi, di ritorni, di scoperte, di riscoperte, di errori anche, che costituisce una avventura unica ed appassionante.
Certe presentazioni della scienza trascurano completamente questi aspetti che — ripetiamo — possono anche servire per aumentare l'interesse degli allievi, radicando il loro studio, spesso difficile, in una solidarietà umana che è comprensione e valutazione positiva, al posto del sorridente disprezzo che è comune a chi pensa di essere in ogni caso superiore ai nostri padri.
Pensiamo che il presentare questi pensieri possa servire per dare agli allievi gli strumenti intellettuali per poter inserirsi meglio nella vita dello studio, ma anche in quella della professione. Ciò dovrebbe avvenire — crediamo — ogni volta che i giovani acquisiscono dei nuovi e potenti mezzi di espressione, ed insieme conquistano anche la consapevolezza della loro potenza e la coscienza del loro sviluppo storico.
Gli esempi che si potrebbero portare sono numerosi e potrebbero dare luogo a molti spunti di discussione e di azione.
Per esempio, è facile osservare che nelle trattazioni della geometria elementare si trova molto spesso il postulato di continuità, con tutte le sue conseguenze, a immediato contatto con un insieme di teoremi che ci vengono sostanzialmente dalla geometria euclidea.
È noto che, nello sviluppo storico della matematica, soltanto nella seconda metà del secolo scorso si è giunti ad una costruzione rigorosa del campo reale e, correlativamente, si è avvertito il bisogno di enunciare esplicitamente la proprietà di continuità della retta.
Prima di allora tale proprietà era considerata come «evidente», e come tale utilizzata nelle dimostrazioni, così come la analoga proprietà delle curve elementari (circonferenza, coniche ecc.).
Alla enunciazione esplicita della proprietà di continuità si è giunti dunque attraverso un travaglio che ha comportato anche lo sviluppo parallelo della analisi matematica, tutta la grande avventura della creazione del calcolo infinitesimale, la critica sui fondamenti della geometria, dell'aritmetica, delle stesse operazioni elementari della nostra mente, nei momenti della deduzione e della sistemazione di una visione teorica globale di un insieme di nozioni.
Vorremmo aggiungere qui che una visione dei capitoli della materia che coinvolga anche la sua dimensione storica

potrebbe servire, in un ambito più vasto, a comprendere la tendenza della scienza moderna alla adozione del metodo assiomatico; impostazione che non è rivolta a dire delle banalità o ad imporre al prossimo i propri punti di vista, ma bensì a chiarire a se stessi ed agli altri i punti di partenza delle proprie concezioni, in modo che le eventuali contestazioni siano dirette nelle giuste direzioni.

Queste nostre idee, ed i desideri che ne conseguono, pongono un insieme di problemi didattici abbastanza difficili: ci pare infatti di udire le obiezioni che provengono da varie parti, e che sono sostanzialmente fondate sulla osservazione che le cose da insegnare sono molte, gli esercizi da svolgere sono pure molti e necessari, come si è detto, per il corretto impiego del linguaggio matematico.

Resta così ben poco tempo e rimangono ben poche energie ed interessi per dare anche delle notizie storiche; inoltre è noto che lo sviluppo delle teorie a volte è talmente aggrovigliato, pieno di idee inutili, di ritorni, di pentimenti, di errori, che le idee veramente semplici ed unificanti arrivano alla fine di un lungo travaglio ad illuminare ed a chiarire una situazione globale che prima appariva oscura e contorta.

È quindi praticamente impossibile seguire lo sviluppo storico delle teorie nell'insegnamento pratico.

Tuttavia, noi continuiamo a pensare che una soluzione a tutti questi problemi possa essere trovata: a nostro parere, infatti, la linea didattica più efficace dovrebbe seguire lo sviluppo del procedimento di apprendimento dei giovani, rinunciando a presentare subito le idee generalissime perché, anche se veramente semplici e illuminanti, spesso non vengono valutate in tutta la portata conoscitiva e quindi vengono lasciate inerti e non applicate; così, anche la visione storica, la genesi delle teorie attraverso i problemi concreti e vissuti, può essere utilizzata nella didattica pratica.

Pertanto, se l'insegnamento di una teoria che segua pedissequamente lo sviluppo storico di questa si presenta come impossibile, e forse poco efficace, pensiamo che sia pur sempre possibile presentare brevemente l'origine delle teorie esposte, in modo che i problemi trattati siano visti nella loro globalità. In questo modo si eviterebbe di ingenerare la impressione che le teorie matematiche siano del tutto fondate sul vuoto e siano delle elucubrazioni di cervelli anormali, che si addentrano in pensieri diversi dalle persone comuni, inseguendo delle chimere inutili.

Si pensi, per esempio, alla trigonometria, che nasce da uno dei problemi fondamentali della geometria euclidea, ed è fondata sui primi teoremi di questa: precisamente quelli che vengono abitualmente indicati come «criteri di uguaglianza dei triangoli». Si tratta, in altre parole, di risolvere i problemi più elementari della geometria dei movimenti rigidi, cioè di determinare le condizioni sotto le quali una figura è identificata da certi suoi elementi (non tutti, ovviamente) in modo da poter dedurre dai dati anche gli altri elementi che sono incogniti, ma la cui conoscenza ci interessa per varie ragioni: teoriche oppure soltanto pratiche.

In teoria queste informazioni si potrebbero ottenere con le procedure abituali della geometria elementare: costruzioni con riga e compasso. Ma molto spesso, nella teoria e nella pratica, è necessario avere delle informazioni più precise di quelle che possono essere fornite dalle costruzioni concrete; inoltre è utile avere delle informazioni che diano i risultati già codificati mediante numeri (cioè delle misure di angoli oppure i lati) senza che sia necessario percorrere una strada più lunga: costruzione degli elementi incogniti in base ai dati, e successiva codificazione mediante misura.

Inoltre, le necessità di certe scienze, per esempio della astronomia, rendono poco facili le costruzioni spaziali di enti sulla superficie sferica, ed ovviamente poco comode e poco precise le relative misure.

Nasce di qui la utilità, per non dire addirittura la necessità, della costruzione di tavole dei risultati, tavole che — come è noto — furono costruite già in epoca classica.

La difficoltà dei calcoli relativi ai problemi rese quasi necessario lo studio delle proprietà formali delle funzioni trigonometriche; la utilità della analisi separata degli elementi costitutivi la teoria (procedimento abituale in ogni scienza) rese quasi indispensabile la procedura di isolare le componenti logiche dei problemi (funzioni trigonometriche) e lo studio delle loro proprietà formali.

Non intendiamo proseguire ulteriormente in questa direzione; ci basti aggiungere che la esemplificazione che abbiamo dato potrebbe contribuire a mettere in pratica quella «interdisciplinarità» che viene spesso raccomandata ma raramente attuata; da parte nostra crediamo che la richiesta di interdisciplinarità si accompagni molto bene con i criteri didattici che abbiamo cercato di esporre finora, perché si allinea con quella gradualità di introduzione delle nozioni teoriche e con l'aderenza al vissuto dell'allievo che ci pare criterio fondamentale per una didattica efficace, ma soprattutto per una formazione solida delle menti.

Rimarrebbe da risolvere il problema della formazione storica, ed in generale umanistica, degli insegnanti, ai quali la nostra università di rado porge aiuto nella propria formazione in questo ordine di idee. Speriamo bene che, almeno per i corsi di laurea ad indirizzo didattico, le nostre strutture universitarie provvedano adeguatamente. Ma certo, si tratta di istituire una linea di ricerca e di didattica che non si può improvvisare, se si vuole svolgere un lavoro serio.

4. La scuola di fronte all'informatica. Problemi didattici vecchi e nuovi. Non vorremmo concludere questa breve analisi dei problemi dell'insegnamento della matematica senza fare un cenno di alcuni problemi recenti, che sono apparsi con la evoluzione della scienza e della tecnica, e di certi altri problemi che sono classici ma, appunto perciò, sempre attuali.

Il primo insieme di problemi è posto dalla presenza dei nuovi mezzi di calcolo e di elaborazione dell'informazione.

Ci pare del tutto evidente che la scuola, ed in particolare l'insegnamento della matematica, non possa ignorare la esistenza di questi nuovi potentissimi mezzi di calcolo. Il chiudersi negli schemi del passato sarebbe, oltre che sciocco, anche inutile, e priverebbe gli allievi di quelle conoscenze che sono utilissime, per non dire necessarie, in un numero sempre maggiore di professioni. Abbiamo già osservato in varie occasioni altrove che questo progresso tecnico pone dei problemi gravissimi alla scuola, la quale deve assimilare le possibilità che le si offrono senza lasciarsi sopraffare dalle mode, dalle parole d'ordine di una pubblicità interessata, o dalle ventate di opinioni.

Per quanto riguarda la matematica, siamo convinti che la utilizzazione di questi nuovi strumenti possa aiutare moltissimo l'insegnante nella formazione degli allievi, purché — beninteso — la utilizzazione sia intelligente.

Pertanto, di fronte a questi progressi spettacolari, riteniamo che sia più che mai necessario rivendicare il carattere della matematica, che ne fa una scienza della dimostrazione, della analisi logica delle idee e dei procedimenti deduttivi. Questi nuovi mezzi permettono, a nostro avviso, di rettificare l'immagine tradizionale della matematica, superando il vecchio *cliché* di dottrina che utilizza formule, per rafforzare l'immagine di una dottrina che studia e critica i procedimenti razionali. Ma vorremmo che non si passasse dalla supina applicazione di formule, date senza giustificazione e senza spiegazione, ed utilizzate senza critica, alla utilizzazione di apparati ancora più stupidi delle formule, la cui autorità diventerebbe quella di feticci il cui responso è inappellabile.

Con l'avvento di questi nuovi strumenti, il panorama esteriore della matematica sta cambiando rapidamente: molti capitoli classici diventano rapidamente desueti, molti procedimenti collaudati non vengono più utilizzati; molti capitoli che si tramandavano nella tradizione didattica potrebbero essere dimenticati e superati. Per fare un esempio tra i tanti, molti esercizi sulle tavole logaritmiche, molte acrobazie formali sulle formule di trigonometria per condurle alla calcolabilità con logaritmi, potrebbero tranquillamente essere soppressi. Ma non vorremmo che fossero sostituiti con capitoli altrettanto privi di senso e di significato dedicati all'addestramento alla programmazione.

Questa deve diventare soprattutto un esercizio di logica e di analisi e non un addestramento alla utilizzazione supina dei mezzi di calcolo che possediamo.

Pertanto non possiamo nascondere la nostra perplessità in presenza della moda invadente, petulante, quasi ossessiva dell'informatica, che vorrebbe entrare nella scuola in modo incontrollato; sappiamo tutti che esistono interessi commerciali ed industriali ed anche ideologici perchè sia adottata in modo massiccio la informatica; questa pressione avviene sotto l'impulso di parole d'ordine che potrebbero addirittura essere qualificate come terroristiche: c'è chi dice, e stampa, e ripete, e proclama che chi non saprà dialogare con le macchine intelligenti sarà destinato ad essere l'analfabeta del futuro prossimo.

C'é chi proclama che in presenza di queste nuove macchine deve nascere una «nuova cultura»; c'è chi dice che occorre riformare completamente l'insegnamento di tutte le materie nella scuola, perché l'informatica ha costretto tutti a riformare tutto. Da parte nostra, di fronte a macchine molto potenti pensiamo che sia più che mai necessario il dominio di questi mezzi attraverso la comprensione e l'analisi critica. Pensiamo infatti che la conoscenza non possa essere ridotta all'accumulo delle informazioni, e che l'allenamento alla dimostrazione possa ovviare al pericolo che l'insegnamento si riduca all'addestramento a premere determinati bottoni, o ad applicare dei programmi fatti da altri, accettando acriticamente le risposte di un apparato stupido, eretto a rango di feticcio che dà sentenze inappellabili ed insindacabili.

Ci pare che la manovra intelligente e la utilizzazione indipendente ed attiva di questi strumenti potentissimi richieda proprio una indipendenza di giudizio ed una formazione alla logica superiori a quelle che pure erano richieste in precedenza: pensiamo infatti che queste macchine non ci dispensino dal pensare, ma anzi ci pongano dei problemi e delle responsabilità molto superiori a quelle che avevamo prima d'ora.

Ed invero, da tante parti si incomincia a mostrare qualche preoccupazione per la introduzione incontrollata di questi strumenti nella scuola e soprattutto per la invadenza e per la rozzezza culturale di coloro che intendono imporli ad ogni costo. A sentire certi entusiasti e sprovveduti esaltatori delle applicazioni universali di queste macchine cosiddette intelligenti, la critica letteraria non si potrebbe fare senza aver prima fatto l'analisi statistica dei termini, delle frasi, delle forme verbali che ogni autore utilizza; e spesso si pretende quasi di ridurre la critica a queste nozioni preliminari della conoscenza dei testi. Sarebbe una posizione analoga a quella di chi volesse ridurre l'analisi di un quadro, per esempio, alla analisi chimica dei colori ed alla analisi spettrografica delle emissioni luminose; oppure volesse ricondurre l'analisi del messaggio artistico trasmesso da un quadro alla analisi neurofisiologica dei circuiti del cervello che presiedono al fenomeno della percezione.

A questo proposito ci pare che sia degno di attenzione e di meditazione un pensiero di B. Pascal, che fu, oltre che grande matematico e filosofo, anche inventore della prima macchina calcolatrice che la storia ricordi. Dice Pascal: «*La machine d'arithmetique fait des effets qui approchent plus de la pensée que tout ce que font les animaux; mais elle ne fait rien qui puisse faire dire qu'elle a de la volonté, comme les animaux*».

Pensiamo che non si possa meglio precisare la posizione della mente umana di fronte alla macchina, che è velocissima, ha una memoria straordinaria, ma non potrà mai sostituire l'uomo in ciò che egli ha di specifico: la sua spontaneità, la sua creatività. Pertanto pensiamo che competa alla scuola non soltanto l'insegnare ad utilizzare questi nuovi mezzi, ma soprattutto a dominarli. Si fa quindi sempre più importante il ruolo di un insegnamento della matematica che sia formativo più che addestrativo.

Il discorso che riguarda l'insegnamento formativo della matematica, e la necessità di insegnare ad analizzare logicamente e a dedurre rigorosamente, più che ad applicare formule già date e procedimenti già stabiliti, ci conduce quasi spontaneamente a parlare di un capitolo dell'insegnamento della matematica che è classico ma che non per questo ci pare abbia perduto la sua validità e il suo valore formativo; intendiamo parlare della geometria.

Sappiamo bene che esiste una tendenza, diventata ormai molto frequente, alla eliminazione dello studio di questa dottrina; per esempio in certi progetti di programma che ci è capitato di consultare (programmi delle scuole per perito informatico) nei quali sono previste ore di insegnamento in numero maggiore a quello di tutte le altre scuole secondarie superiori, e nei quali la geometria non è neppure nominata.

Ci pare che questa trascuratezza sia abbastanza grave per varie ragioni, che cercheremo di presentare in poche parole.

Pare a noi infatti che la geometria, tanto nel suo «*status*» classico, come nei suoi sviluppi a noi più vicini (geometria proiettiva, geometria differenziale ecc.), si possa pensare, come argutamente diceva F. Enriques, come il «primo capitolo della fisica», cioè come il primo passo di una sistemazione razionale e coerente delle nostre esperienze sul mondo che ci circonda; e difatti si possono trovare nella geometria, allo stato — per così dire — nascente, proprio quelle procedure di astrazione, di schematizzazione, di idealizzazione che sono tipiche della conoscenza fisicomatematica.

Inoltre, la geometria, nella sua concezione classica, può essere considerata come un validissimo strumento di formazione al ragionamento rigoroso, che — in più — non richiede necessariamente l'impiego degli algoritmi dell'algebra o del calcolo infinitesimale, e quindi può stare a sé nel suo valore formativo, senza bisogno di preventivo sviluppo degli strumenti algoritmici. E nel suo aspetto di geometria analitica permette di dare una prima formazione all'impiego del linguaggio matematico nella descrizione e nella conoscenza della realtà, cioè un primo passo nella descrizione fisicomatematica del mondo che è una delle tappe più importanti del sapere scientifico di oggi.

Inoltre pensiamo che il trascurare o il mortificare l'insegnamento della geometria vada contro quei criteri didattici di buon senso che abbiamo cercato di presentare nelle pagine precedenti; criteri secondo i quali sarebbe bene partire dalle situazioni concrete in cui il discente vive ed opera per costruire le formalizzazioni astratte; e noi pensiamo che le esperienze che sono alla base della geometria siano tra le più semplici ed immediate che si presentano all'uomo. Il che è confermato anche dalla storia del pensiero, che ci presenta gli *Elementi* di Euclide come il primo trattato scientifico rigoroso che l'uomo possegga.

Considerazioni analoghe si potrebbero fare anche a proposito dei contenuti degli insegnamenti universitari che vengono classificati sotto la etichetta di «geometria». Ci rende perplessi, per esempio, il fatto che la geometria proiettiva venga spesso trascurata, oppure esposta come un capitolo dell'algebra lineare, e quindi completamente formalizzata in simboli, senza che sopravviva alcun elemento della problematica che in qualche modo presiedette alla sua nascita ed alla sua costruzione.

Infatti è facile accorgersi che la costruzione della geometria proiettiva è nata dalla necessità concettuale di generalizzare le trasformazioni della geometria elementare, e quindi fa parte di quella grande crisi della geometria del secolo XIX che portò anche all'analisi logica del concetto di uguaglianza ed anche al

sondaggio di certi procedimenti elementari, considerati «intuitivi» e per ciò stesso assolutamente chiari, con i quali si costruiscono le nostre teorie del mondo esterno.
L'idea di comprendere anche le operazioni di proiezione tra quelle trasformazioni ammesse per le figure geometriche ebbe una fecondità di cui soltanto dopo circa un secolo ci si accorse; fecondità che è provata, per esempio, dalla possibilità di unificare una grande quantità di proposizioni della geometria classica.
Questa capacità unificante della geometria proiettiva ne costituisce ad un tempo il fascino ed il valore conoscitivo; ma questi pregi vanno quasi interamente perduti se si insiste su una algebrizzazione ed una formalizzazione che nascondono quasi completamente la genesi di questo capitolo elegantissimo della matematica.
Molte altre cose si potrebbero dire; le taciamo per non allungare eccessivamente questo nostro intervento e ci limitiamo a ricordare che la immaginazione è una facoltà umana che spesso stimola alla ricerca di nuove verità ed indica la strada per nuove soluzioni di problemi, antichi e recenti.
E pensiamo che la geometria sia molto adatta ad educare i discenti a quell'equilibrio tra immaginazione e logica, tra invenzione e deduzione rigorosa che è sempre stato tipico dei grandi matematici, ed è una dote quanto mai utile anche per l'uomo comune che voglia esercitare le proprie facoltà superiori.