Carlo Felice Manara, Geometra e Maestro

Antonio Lanteri

June 14, 2012

Desidero innanzitutto ringraziare l'Istituto per l'onore che mi ha fatto chiedendomi di commemorare, insieme agli illustri colleghi Pier Carlo Nicola e Alberto Quadrio Curzio, la figura di Carlo Felice Manara a poco più di un anno dalla sua scomparsa. Data la molteplicità dei suoi interessi e la complessità della sua figura scientifica trovo molto opportuno che Manara sia ricordato a più voci. Per quanto mi compete quale suo allievo nell'ambito della Geometria e per quanto mi è possibile come cultore di questa disciplina, mi soffermerò sulla sua figura di scienziato e di Maestro in questo campo.

1. LA CARRIERA ACCADEMICA

Carlo Felice Manara è mancato il 4 maggio 2011 a Milano.

Nato a Novara il 31 marzo 1916 si era laureato in Scienze Matematiche presso l'Università degli Studi di Milano, nel 1939, sotto la guida di Oscar Chisini. Con lui Manara ha formato e sviluppato la sua figura di scienziato e di studioso. Libero docente dal 1949, fu poi Assistente di ruolo e Professore incaricato presso la Facoltà di Scienze M. F. N. dell'Università di Milano. Vincitore di concorso, nel 1951 fu chiamato a ricoprire la Cattedra di Geometria analitica con elementi di proiettiva presso la Facoltà di Scienze M. F. N. dell'Università di Modena.

A Modena, il prof. Manara ricoprì la carica di Preside della Facoltà di Scienze M. F. N. dal 1954, fu Prorettore dell'Università e tenne anche incarichi di insegnamento presso l'Accademia Militare.

Nel 1956 si trasferì all'Università di Pavia e nel 1959 all'Università degli Studi di Milano dove rimase fino al momento del suo collocamento fuori ruolo nel 1986, prima come titolare di Geometria e poi, dal 1970, di Istituzioni di Geometria superiore. Nel 1991 fu nominato Professore Emerito dell'Università degli Studi di Milano.

A Milano Manara fu anche Preside della Facoltà di Scienze M. F. N. dal 1967 al 1970, anni difficili per l'Università italiana. Egli svolse questo compito con mano ferma e con grande buon senso, ponendo sempre attenzione alle istanze più serie degli studenti.

Molti furono anche gli impegni svolti da Manara al servizio della Scuola e della Istituzione Universitaria, al di fuori della sua naturale sede di afferenza. Dell'intensa attività svolta da Manara presso l'Università Cattolica, culminata con il conferimento della Laurea "honoris causa" in Filosofia, hanno già detto i colleghi che mi hanno preceduto.

Come Presidente della Commissione del CEPES (Centre européen pour l'enseignement supérieur) dell'UNESCO (della quale era stato nominato membro verso il 1975) Manara partecipò a tre Conferenze generali presso la sede di Bucarest. Nel periodo 1982-84 fece anche parte del Consiglio Direttivo dell'IRRSAE (Istituto Regionale di ricerca, sperimentazione e aggiornamento educativi) della Lombardia. Nel triennio 1971-74 fu membro del Comitato Ordinatore della Facoltà di Scienze M. F. N. dell'Università della Calabria e dal 1971 al 1977 di quello dell'Università Cattolica nella sede di Brescia.

Numerosi sono i riconoscimenti che Carlo Felice Manara ha avuto per la sua attività di scienziato e di studioso. Era Membro di questo Istituto (Socio corrispondente dal 1961, Membro effettivo dal 1975), Membro della Accademia di Scienze, Lettere e Arti di Modena (Socio effettivo dal 1975, Emerito dal 2001), Membro della Académie Internationale de Philosophie de Sciences di Bruxelles dal 1978, Medaglia d'oro di Benemerito della Scuola, della Cultura e dell'Arte dal 1975.

2. MANARA GEOMETRA

Il campo di ricerca in cui Manara ha esordito e ha svolto una parte significativa del suo lavoro scientifico è quello della *Geometria algebrica* nell'indirizzo della Scuola italiana.

Il tema fondamentale sviluppato dalla Scuola di Chisini a Milano, di cui Manara è stato esponente di primo piano, è quello dei piani multipli e delle loro curve di diramazione ed è su questo che desidero soffermarmi in particolare, sia per la sua rilevanza, sia per gli sviluppi che ha avuto recentemente. Questo studio nasce dall'esigenza di comprendere, in forma globale, il fenomeno della diramazione per funzioni algebriche di due o più variabili, fenomeno della geometria complessa che in dimensione 1 è governato dal classico teorema di esistenza di Riemann.

Passando alle dimensioni superiori, ci possiamo riferire per semplicità al caso di due variabili, cioè alle superfici algebriche. Ogni superficie algebrica proiettiva complessa non singolare S si può immergere isomorficamente nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^5$ a 5 dimensioni e di qui, per proiezione da un piano $\Lambda \subset \mathbb{P}^5$ su di un piano sghembo con esso, si ottiene un *piano multiplo*, cioè una mappa $f : S \to \mathbb{P}^2$ (che è un *morfismo* oppure soltanto una *applicazione razionale* a seconda che Λ sia in posizione generica o meno rispetto ad S) di un certo grado m. Il luogo di diramazione è una curva algebrica piana B, in generale irriducibile, che per $m \geq 3$ risulta dotata di punti singolari. Fattorizzando f attraverso una prima proiezione in $\mathbb{P}^3$, che ha per immagine una superficie in generale singolare e restringendosi in modo opportuno all'ambito affine, si può descrivere la situazione tramite la funzione algebrica $z(x, y)$ implicitamente definita da un'equazione della forma

$$F(x, y, z) = z^m + a_1(x, y)z^{m-1} + \ldots + a_{m-1}(x, y)z + a_m(x, y) = 0, \tag{1}$$

con x, y, z complessi e $a_i(x, y)$ polinomi nelle variabili x ed y, di grado i e dove m è il grado di S se Λ è generico. Al variare di (x, y) nel piano affine complesso a cui ci si è ristretti, variano anche le diverse radici della (1) e quindi le controimmagini via f, che per (x, y) non appartenente a B sono esattamente m. Per una scelta di Λ sufficientemente generale, accade che in ciascuno dei punti non singolari di B due soltanto delle controimmagini via f vengano a coincidere tra loro, le ulteriori

$m-2$ rimanendo distinte, che B abbia solo nodi e cuspidi come punti singolari e che in un nodo quattro controimmagini vengano a collassare a due a due, rimanendo distinte le altre $m-4$, mentre in una cuspide siano tre le controimmagini che vengono a collassare insieme, rimanendo distinte le altre $m-3$.

Ad esempio, proiettando una superficie cubica liscia di $\mathbb{P}^3$ su di un piano da un punto generico si ottiene un piano triplo la cui curva di diramazione è una sestica avente come punti singolari soltanto sei cuspidi, disposte lungo una conica.

Il problema di caratterizzare le curve di diramazione tra le curve algebriche piane è una questione sottile che ha occupato molti autori, a partire da una famosa memoria di Enriques [5], in particolare, B. Segre, O. Zariski, ed anche Chisini e la sua Scuola.

Le prime ricerche di Manara, sviluppate in collaborazione con Chisini, riguardano appunto la caratterizzazione delle curve di diramazione di certi piani tripli [2]. La peculiarità dei piani tripli è che per $m = 3$ la curva di diramazione B non possiede nodi ma soltanto cuspidi. I piani tripli considerati da Chisini e Manara sono di una classe particolare, da loro chiamata "semplice": essi si ottengono proiettando su un piano la superficie S' (proiezione in $\mathbb{P}^3$ della superficie S originale) da un punto singolare isolato di molteplicità $d-3$, supposto esistente, dove d è il grado di S (e pertanto f è soltanto una mappa razionale se $d \geq 4$). In tal caso, la (1) va rimpiazzata con l'equazione seguente:

$$F(x, y, z) = a_{d-3}(x, y)z^3 + a_{d-2}(x, y)z^2 + a_{d-1}(x, y)z + a_d(x, y) = 0, \tag{2}$$

dove gli a_i sono polinomi di grado uguale all'indice. In questa situazione, l'espressione esplicita che l'equazione di B viene ad assumere suggerisce la costruzione di alcune curve algebriche piane, sue covarianti proiettive (aggiunte di vari gradi) e si evidenziano subito delle relazioni tra il grado di S, il grado di B e il numero delle sue cuspidi. La caratterizzazione di B come curva di diramazione viene allora fornita attraverso queste relazioni numeriche, alcune relazioni di equivalenza lineare che coinvolgono il gruppo delle cuspidi e certi altri gruppi di punti e opportune proprietà delle serie lineari corrispondenti.

In una nota successiva [3] una simile caratterizzazione, annunciata in [4], viene presentata nel caso di piani tripli per i quali i polinomi in x, y che appaiono nella (2) soddisfano condizioni più generali, e qualche anno più tardi, Manara [10] ne fornisce anche un'estensione alle dimensioni superiori.

Sul tema delle curve di diramazione dei piani tripli e della loro caratterizzazione attraverso il gruppo dalle cuspidi, Manara ritorna poi ancora nel 1948 con una nota molto elegante [9] in cui si caratterizzano le curve di diramazione dei piani tripli "generali", riducendo questi birazionalmente ad avere diramazione lungo una curva B con equazione della forma $p^3 + q^2 = 0$, dove p e q sono polinomi in x, y, generici, di gradi $2h$ e $3h$ rispettivamente. Tali curve B hanno come singolarità esattamente $6h^2$ cuspidi, definite dal sistema $p = q = 0$ e in ciascuna di esse, la tangente cuspidale di B è la tangente alla curva di equazione $q = 0$. Da notare che per $h = 1$ si ottiene la sestica con sei cuspidi di cui si è detto più sopra.

Ma al centro dell'interesse di Chisini e della sua Scuola era la questione dell'equivalenza birazionale dei piani multipli generali aventi la stessa curva di diramazione. Nel 1944 Chisini [1] aveva stabilito un primo risultato in questa direzione, ma con tecniche di degenerazione che lo rendevano a suo giudizio insoddisfacente, in quanto limitative dell'ambito di applicabilità. Nella terminologia odierna, un rivestimento $f : S \to \mathbb{P}^2$ (morfismo) con curva di diramazione B si dice *generale* se B soddisfa le condizioni semplificative sopra indicate, anche se f non deriva necessariamente da una proiezione generica.

In questi termini, la congettura di Chisini afferma che *un rivestimento generale $f : S \to \mathbb{P}^2$ di grado $m \geq 5$ è univocamente determinato a meno di isomorfismi dalla sua curva di diramazione B.* La richiesta che sia $m \geq 5$ è motivata da un esempio, dovuto allo stesso Chisini, di due piani multipli diramati entrambi su una sestica B con nove cuspidi e nessun nodo, ma di gradi diversi: si tratta del piano quadruplo definito dalla proiezione generica della superficie di Veronese e di un piano triplo definito da una superficie geometricamente rigata che ha per curva base la curva ellittica duale della B.

Oggi è noto che l'asserzione di cui alla congettura è vera almeno per $m \geq 12$, come dimostrato da V. S. Kulikov [6] e A. Nemirovski [25]. Più recentemente Kulikov [7] ha anche stabilito che la congettura è vera se il rivestimento $f : S \to \mathbb{P}^2$ è definito proprio dalla proiezione della superficie S di $\mathbb{P}^5$ da un piano generico.

Anche Manara si è dedicato al problema dell'equivalenza birazionale, con l'obiettivo di evitare il metodo di degenerazione utilizzato da Chisini e le limitazioni che questo comportava. Avvalendosi di un suo studio antecedente sulla rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno delle singolarità ordinarie della curva di diramazione [8], ha dimostrato che, nel caso particolare in cui la curva B sia razionale e priva di flessi, sussiste un risultato di identità birazionale: in tale situazione la superficie S risulta essere rigata e la funzione algebrica definita dalla (1) è caratterizzata dal fatto che i valori da essa assunti in (x, y) rappresentano i coefficienti angolari delle rette tangenti a B condotte dal punto (x, y) [11]. In [18] ha studiato il problema per i piani tripli, riconducendolo all'esame del rivestimento indotto da f sulla retta generica di $\mathbb{P}^2$ e in [13] ha sperimentato l'utilizzo di questo diverso approccio sui piani multipli.

Un'altra questione affrontata da Manara è quella dell'esistenza di curve algebriche piane irriducibili che ammettono dati caratteri plückeriani [14], [15], [19]. L'esposizione [23], tenuta in occasione del 3ième Colloque de Géometrie Algébrique di Bruxelles (1959), offre una rappresentazione dello stato dell'arte dell'epoca sulle diverse questioni di esistenza (curve algebriche piane, piani multipli e spazi multipli) di cui Manara si è occupato e sui diversi metodi algebrici e topologici seguiti da molti autori per affrontarle.

Dal 1950 e fino al 1954, pur continuando a sviluppare temi di geometria algebrica [16], [21], in particolare quello concernente le trasformazioni puntuali regolari del piano e la loro approssimazione con trasformazioni cremoniane [12], [17], Manara rivolge il suo interesse anche ad altri aspetti della geometria. Di rilievo alcuni risultati che ottiene nell'ambito della geometria differenziale, in particolare quelli sulla caratterizzazione integrale di certe superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali [20] e quelli riguardanti gli invarianti proiettivi differenziali dello spazio [22].

Da ricordare infine anche la Nota [24], del 1991, in collaborazione con il collega Mario Marchi, dedicata ad una classe di geometrie di incidenza.

Del contributo dato da Carlo Felice Manara nel campo della matematica applicata allo studio delle realtà economiche e sociali è detto negli interventi dei colleghi, ma qui devo ricordare anche un altro campo di indagine che per Manara ha sempre rivestito un ruolo importante. Si tratta della riflessione sulla natura psicologica, sulle radici storiche ed epistemologiche del pensiero matematico nonché sulle sue procedure conoscitive.

In particolare, nel grande spazio dedicato alle riflessioni epistemologiche sulla Matematica e sulla Scienza più in generale, Manara ha riservato una attenzione speciale alla *geometria analitica*. Di questa disciplina e del suo uso in ambito iperspaziale va detto, innazitutto, che Manara era grande maestro, inequagliabile per l'eleganza con cui sapeva trattare i problemi. Mi piace ricordare a questo proposito un suo suggerimento rivolto a me e Marino Palleschi che ci permise di proporre una generazione proiettiva dello scroll quintico ellittico di $\mathbb{P}^4$ non ancora nota in letteratura (a dispetto delle molte proprietà di questa superficie descritte nel trattato di Edge).

Ebbene, per quanto riguarda la geometria analitica sul fronte storico-epistemologico, da un lato l'analisi di Manara concerne gli aspetti teorici e operativi di questo metodo di studio che ha rappresentato un punto di svolta rivoluzionario nella storia della dottrina geometrica, che prima dell'introduzione delle coordinate si era servita soltanto dei metodi deduttivi della logica verbale classicamente intesa. Da un altro altro lato, Manara guarda alla geometria analitica quale disciplina emblematica e rappresentativa di quella opera di "matematizzazione del mondo reale" che svolge la matematica moderna. Il suo metodo di rappresentazione può essere infatti applicato ad altri aspetti della realtà con cui ci troviamo ad interagire, sia essa fisica, economica o sociale. Da questo punto di vista si può anche comprendere la grande valenza educativa che Manara annetteva all'insegnamento della geometria analitica. I valori che con essa si trasmettono vanno infatti ben al di là del semplice apprendimento di uno strumento tecnico utile per risolvere dei circostanziati problemi geometrici.

E questo ci porta inevitabilmente a ricordare anche l'impegno di Manara verso coloro che, per professione, comunicano la matematica agli altri, in particolare alle giovani generazioni. In questo ambito egli è stato certamente un Maestro e una guida per diverse generazioni di insegnanti di ogni ordine scolastico. In questa sua attività ha contribuito per anni alla redazione del "Periodico di Matematiche" (attualmente organo ufficiale della Mathesis), di cui è stato anche Condirettore, con Modesto Dedò (1963-1970), ha collaborato a lungo con il Centro di Ricerche didattiche "Ugo Morin" di Paderno del Grappa ed è stato Membro (dal 1984) della Commissione Scientifica della rivista "L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate", organo dello stesso Centro di Ricerche. Inoltre ha fatto parte del Comitato Direttivo della rivista per insegnanti "Nuova Secondaria", fin dalla sua fondazione (nel 1983).

3. MANARA PROFESSORE E MAESTRO

Vorrei infine ricordare Manara come Professore e come Maestro, attingendo anche a momenti del mio apprendistato con lui.

Io incontrai il Prof. Manara nel 1969, quando ero matricola del Corso di laurea in Matematica qui a Milano. Ricordo che le sue lezioni mostrarono, fin dall'inizio, una statura intellettuale non comune. Nei primi anni sessanta, utilizzando strumenti formali molto moderni per i tempi (il corso di Algebra era stato da poco introdotto nell'ordinamento del Corso di laurea in Matematica), Manara aveva messo a punto un corso di Geometria destinato alle matricole, di sinteticità e chiarezza esemplari. Il suo impianto, teso a illustrare la geometria n-dimensionale negli ambienti proiettivo, affine ed euclideo secondo la visione di Felix Klein, rimane tuttora assai valido. Le lezioni di Manara erano di un'eleganza straordinaria, e estremamente interessanti erano anche le divagazioni con cui amava punteggiarle. Ma ciò che mi conquistò alla geometria e mi indusse a chiedergli la tesi fu un suo corso sulle superfici di Riemann che seguii al terzo anno di corso. Dalla tesi, dopo la parentesi del mio servizio militare, scaturì anche la mia prima nota scientifica, che Manara mi onorò di presentare a questo Istituto. Avendo ottenuto un contratto di ricerca dall'Università, seguirono anni di intenso lavoro scientifico con giornate intere trascorse nei locali di Via Amadeo, in un seminterrato affittato dall'Ateneo per sopperire alla carenza di spazi e adattato a studi. Ricordo i numerosi seminari e le conversazioni con Manara davanti alla lavagna. Quello fu un periodo importante del mio apprendistato, anche sul fronte didattico. Nei molti anni in cui tenne l'insegnamento di Istituzioni di Geometria superiore, Manara sviluppò sempre argomenti centrali per importanza e di grande interesse, spaziando, nelle varie edizioni, dalla geometria algebrica alla geometria differenziale, appoggiandosi a testi di rilievo, sia classici che moderni. Il corso su "superfici di Riemann e curve algebriche", nelle varie edizioni impartite tra il 1975 e il 1979, può a buon diritto annoverarsi tra i più moderni e avanzati sull'argomento tenuti negli atenei italiani in quegli anni e ritengo un onore per me l'avere collaborato con lui sul piano didattico in questa esperienza. Qualche anno piú tardi, "liberatosi di me", per usare una espressione ironica con cui amava descrivere la situazione, dopo che io avevo intrapreso la mia strada, Manara tenne un'altra indimenticabile edizione del corso, dedicata alle superfici razionali e ai sistemi lineari di curve algebriche piane, ispirandosi alla visione classica offerta nel meraviglioso volume di Fabio Conforto.

Sono tanti i ricordi personali che ho di Manara, sia in ambito universitario (il suo incoraggiamento e i suoi consigli, il suo stile accademico e la sua signorilità) sia al di fuori di questo (il suo humour, i momenti conviviali con la presenza della cara Signora Margherita, il festeggiamento del suo novantesimo compleanno con i suoi collaboratori). Mi sia consentito soffermarmi soltanto su uno dei ricordi più recenti. Negli ultimi anni ho avuto il piacere di fagli visita a casa più volte, insieme al collega Pier Carlo Nicola. La sua conversazione era sempre brillante. In una delle ultime visite ricordo che ci intrattenne molto piacevolmente leggendoci un brano delle "Vite" del Vasari, opera che stava rileggendo in quel periodo. Si tratta del brano riguardante Filippo Brunelleschi che riferisce della discussione avvenuta nel 1418 tra i vari partecipanti al concorso pubblico bandito dall'Opera del Duomo di Firenze per il progetto di costruzione della cupola di S. Maria del Fiore. I diversi partecipanti avevano mostrato i loro disegni e i loro modelli e volevano vedere anche quelli del Brunelleschi, ma questi non aveva alcuna intenzione di mostrar loro i suoi e come giustificazione propose un gioco. Citando il Vasari: "che chi fermasse in sur un marmo piano un uovo ritto, quello facesse la cupola, che quivi si vedrebbe l'ingegno suo. Tolto dunque un uovo tutti quei maestri si provarono per farlo star ritto, ma nessuno trovò il modo. Onde essendo detto a Filippo ch'ei lo fermasse, egli con grazia lo prese e datoli un colpo del fondo in sul piano del marmo, lo fece star ritto. Rumoreggiando gli artefici che similmente avrebbono saputo fare essi, rispose loro Filippo ridendo che avrebbono anche saputo fare la cupola vedendo il modello o il disegno suo." Questo aneddoto fu in seguito attribuito a Cristoforo Colombo a proposito della scoperta dell'America, ed è diventato famoso in relazione a quest' ultimo. Ricordo il compiacimento con cui Manara, già novantenne, ci leggeva il brano del Vasari e l'ammirazione che lasciava trasparire per la battuta arguta del Brunelleschi. Manara aveva una sconfinata ammirazione per l'intelligenza umana, in tutte le forme in cui questa si manifesta, non solo nella creazione scientifica, ma anche nell'arguzia di una battuta. E questo si rifletteva anche nel suo temperamento spesso improntato a un'ironia sottile ma bonaria, esercitata nei confronti di sè stesso prima ancora che degli altri.

Per concludere vorrei riportare qui una frase molto significativa che compendia il modo in cui Manara ha svolto il suo ruolo di scienziato e di maestro. È una frase contenuta nella motivazione per la nomina a Professore Emerito dell'Università degli Studi di Milano, che appare nel verbale della seduta del 18 dicembre 1991 del Consiglio della Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali dello stesso ateneo. "Caratteristica peculiare di Manara, che ha costantemente informato la sua attività scientifica ed educativa e che attraverso l'insegnamento egli ha cercato di trasmettere agli allievi, è una visione del sapere e della ricerca della verità scientifica sempre inseriti in un progetto di crescita culturale e umana della persona."

Ebbene, dell'avere trasmesso loro questa visione, i numerosi allievi che ha avuto gli sono grati.

Bibliografia

[1] O. Chisini, Sulla identità birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione, *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)* 77 (1944), 1-18.

[2] O. Chisini, C. F. Manara, Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 25 (1946), 255-265.

[3] O. Chisini, C. F. Manara, Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli, II, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 26 (1947), 383-388.

[4] O. Chisini, C. F. Manara, Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli, *Boll. Un. Mat. Ital. (3)*, 3 (1948), 6-8.

[5] F. Enriques, Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione, *Ann. Mat. Pura Appl.* 1 (1924), 185-198.

[6] Vik. S. Kulikov, On Chisini's conjecture, *Izv. Math.* 63 (1999), 1139-1170.

[7] Vik. S. Kulikov, On Chisini's conjecture, II, *Izv. Math.* 72 (2008), 901-913.

[8] C. F. Manara, La rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno di una singolarità ordinaria della sua curva di diramazione, *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)* 78 (1944-45), 191-203.

[9] C. F. Manara, Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli, *Boll. Un. Mat. Ital. (3)* 3 (1948), 114-119.

[10] C. F. Manara, Sulle caratterizzazioni delle ipersuperficie di diramazione degli S_n tripli, *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)* 82 (1949), 140-142.

[11] C. F. Manara, Sulle curve di diramazione dei piani multipli, *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)* 82 (1949), 179-184.

[12] C. F. Manara, Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8)* 8 (1950), 103-108.

[13] C. F. Manara, Una condizione sufficiente per la identità birazionale di due piani multipli, *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)* 84 (1951), 663-666.

[14] C. F. Manara, Sur une demonstration d'irréductibilité, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 11 (1951), 675-676.

[15] C. F. Manara, Sulla esistenza di curve algebriche piane irriducibili aventi dati caratteri plueckeriani, *Boll. Un. Mat. Ital. (3)* 6 (1951), 9-14.

[16] C. F. Manara, Le condizioni perché due curve gobbe siano omologiche rispetto ad un centro assegnato, *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)* 84 (1951), 15-22.

[17] C. F. Manara, Sulle trasformazioni puntuali di un piano in un altro nell'intorno di un punto semplice della jacobiana, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 5 (1951), 40-53.

[18] C. F. Manara, Identità birazionale dei piani tripli aventi una stessa curva di diramazione, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 5 (1951), 54-65.

[19] C. F. Manara, Questioni di esistenza di curve algebriche piane con caratteri assegnati. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* 24 (1952-53), 66-77.

[20] C. F. Manara, Caratterizzazione integrale di certe superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8)* 17 (1954), 15-21.

[21] C. F. Manara, I gruppi ciclici di trasformazioni piane di Jonquières, *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)* 87 (1954), 115-129.

[22] C. F. Manara, Invarianti proiettivi differenziali nello spazio e curve W, *Boll. Un. Mat. Ital. (3)* 9 (1954), 237-240.

[23] C. F. Manara, Questions d'existence de variétés algébriques, 1960 *3ième Coll. Géom. Algébrique* (Bruxelles, 1959), pp. 95-106. *Centre Belge Rech. Math. Louvain.*

[24] C. F. Manara, M. Marchi, On a class of reflection geometries, *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 125 (1991), 203-217.

[25] A. Nemirovski, Kulikov's theorem on the Chisini conjecture, *Izv. Math.* 65 (2000), 71-74.