Acc. Naz. Sci. Lett. Arti di Modena
Atti e Memorie
Ser. VIII, v. XV (2012), fasc. I

Antonio Lanteri*

CARLO FELICE MANARA, LA CONGETTURA DI CHISINI E LA GEOMETRIA DEI SISTEMI LINEARI

Dedicato alla memoria dei miei genitori

ABSTRACT.

The author remembers Carlo Felice Manara in the period ranging from the late Sixties to the early Eighties through memories of his apprenticeship. The paper describes some ideas about multiple planes and their branch curves, this being the main research theme addressed by Chisini and his School in Milan, where Manara was a prominent figure. The discussion includes an outline of recent developments and an attempt to put the subject in the general framework of the geometry of linear systems.

La figura di Carlo Felice Manara è stata mirabilmente delineata dal mio illustre collega Mario Marchi, Socio corrispondente di questa Accademia, nella prima conferenza di questo ciclo. Spero, tuttavia, non dispiaccia se inizierò questa esposizione aggiungendo qualche flash dai ricordi personali che ho di Manara, ricordi molto belli e significativi come possono essere quelli che legano un allievo (prima studente e poi laureato) ad un professore di grande fascino e statura intellettuale, di vasta cultura e di profonda umanità, un maestro nel senso più pieno della parola, quale era Manara. E belli, naturalmente, anche perché si riferiscono agli anni della mia giovinezza.

* Desidero ringraziare l'Accademia Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Modena per l'invito a parlare qui oggi, che mi permette di contribuire ad onorare il mio maestro Carlo Felice Manara. E l'occasione mi è resa ancora più gradita dal pensiero di essere qui, proprio dove molti anni fa (una sessantina ormai) Manara ha onorato con il suo servizio l'Ateneo di Modena e questa prestigiosa Accademia.

1. *Carlo Felice Manara nei miei ricordi di apprendista*

Innanzitutto vorrei ricordare l'impressione iniziale che ricevetti quando ero matricola all'Università di Milano e, al secondo semestre dell'anno accademico 1968-69, ebbe inizio il Corso di Geometria I. Le lezioni del Prof. Manara, a cui partecipavano spesso anche i suoi assistenti e collaboratori, mostrarono sin da subito la sua statura intellettuale non comune. Colpiva, soprattutto, l'eleganza delle sue lezioni, ma lasciavano il segno anche molte delle divagazioni con cui amava punteggiarle: ricordo ancora quella relativa al valore dell'invenzione del simbolo in relazione allo sviluppo storico della Matematica, con riferimento alle lunghe e verbose circumlocuzioni con cui venivano descritti i calcoli in assenza delle notazioni simboliche, ai tempi di Tartaglia. E ancora, divagazioni sul significato convenzionale nella scelta posizionale dell'operatore rispetto alla variabile nelle formule matematiche, sulla finalità del prendere degli appunti ad una lezione di Matematica, e poi la citazione di una famosa riflessione di Poincaré sulla distinzione dei matematici tra analisti e geometri, a sottolineare la diversità dello stile, che è spesso ancora più rilevante della diversità stessa della disciplina che il matematico si trova a trattare. Per quanto riguarda lo specifico del corso, l'eleganza del formalismo matriciale, che Manara trattava con mano leggera, mi affascinò fin da subito. E per diversi anni il suo libro *Lezioni di Geometria* [M6], che rifletteva il corso, è stato per me l'esempio paradigmatico della sinteticità coniugata alla chiarezza a cui tentavo di ispirarmi.

Poi vorrei ricordare l'impatto che ebbi al terzo anno con le sue lezioni basate sul libro di Robert C. Gunning *Lectures on Riemann surfaces* [Gu], occasionalmente presentato nel corso complementare di Geometria Differenziale. In realtà, il contenuto del corso aveva poco a che fare con la geometria differenziale, ma ai tempi (a.a. 1970-71), per i corsi complementari, e non soltanto a Milano, non si badava molto all'effettiva aderenza dei contenuti al nome del corso. Quell'anno poi i corsi vennero interrotti presto per via di una lunga occupazione studentesca e io mi ritrovai, con pochi compagni di studio, a dovermi arrabattare con quel testo molto difficile, che riproduceva un corso tenuto a Princeton soltanto pochi anni prima. Per di più era uno dei primi testi in lingua inglese in cui mi imbattevo nel corso dei miei studi universitari. La materia però era affascinante, sia per la centralità dell'argomento, di cui gli studi successivi mi avrebbero fornito ulteriori conferme, sia per la modernità della trattazione, basata sui metodi introdotti dalla scuola francese e ancora poco conosciuti in Italia.

E fu anche a seguito dell'impegnativo lavoro svolto per preparare quell'esame che maturai la decisione di chiedere la tesi al Prof. Manara. L'argomento che mi propose riguardava le grassmanniane e la sua ambizione era quella di arrivare a fornire una caratterizzazione integrale di queste varietà. Quello che invece, molto più modestamente, io riuscii a fare fu soltanto uno studio delle grassmanniane reali viste come varietà differenziabili, limitato essenzialmente all'ambito topologico algebrico. Questo però fu sufficiente per avere la sua approvazione. Una volta laureato ed assolto il servizio militare, ritornato come borsista alle "sudate carte" (per usare la famosa metonimia leopardiana), quello stesso studio mi consentì di riscoprire per via assolutamente elementare un risultato sull'orientabilità delle grassmanniane reali. Si trattava di un risultato già noto, ma che usualmente si dimostra con mezzi relativamente elevati (azione transitiva del gruppo ortogonale speciale sul fibrato delle orientazioni e analisi locale del gruppo di isotropia di un punto, cf. ad es. [D, p. 335]). La mia dimostrazione, invece, si basava semplicemente sulla combinatorica di un atlante finito della grassmanniana, costruito in maniera molto naturale. Manara fu molto prodigo di elogi per quel mio primo risultato scientifico. Il lavoro che scrissi, giudicato da Manara semplice ed elegante – complimento non da poco per chi lo ha conosciuto – fu la mia prima nota presentata all'Istituto Lombardo [L].

Del mio apprendistato con Manara fanno parte gli anni in cui, come contrattista, ho collaborato con lui sul piano didattico, contribuendo ad adattare il programma del libro di Gunning [Gu] di cui si è detto al corso di Istituzioni di Geometria Superiore, che ritengo divenne uno dei corsi più moderni e avanzati impartiti nelle varie università italiane in quegli anni (1975-1979). Il tema del corso erano le curve algebriche e le superfici di Riemann compatte, argomento appassionante, che in anni più recenti sarebbe stato il tema dominante di molti trattati, ma per portare gli studenti del terzo anno di corso ad un livello atto a consentire loro di leggere il libro di Gunning era necessario strutturare adeguatamente le esercitazioni del corso, sviluppando in esse un background algebrico e topologico non indifferente, così da rendere il corso nel suo complesso autocontenuto. Quel corso, nella versione così messa a punto, fu impartito per diversi anni, con leggere varianti che consistevano nell'apportare delle piccole migliorie di anno in anno. Una inevitabile conseguenza del lavoro fatto fu che per l'interesse suscitato dal corso, molti studenti brillanti chiesero la tesi al Prof. Manara. Arrivammo persino ad istituire un seminario dei laureandi, organizzato con riunioni settimanali in cui, volta per volta, oltre ad esporre a puntate il tema di studio prescelto per quell'anno, si faceva il punto sulle varie tesi in corso.

A dispetto di un ambiente un po' chiuso quale era quello milanese negli anni '70 (almeno nella mia valutazione), Manara mi incoraggiò sempre nel cogliere le varie opportunità di crescita culturale che via via si presentavano: corsi estivi della Scuola Normale presso l'Università di Perugia e presso il Palazzone di Cortona, minicorsi invernali organizzati a Viareggio e a Bocca di Magra, corsi della Scuola di Perfezionamento a Firenze, corsi CIME. E proprio a seguito di un indimenticabile corso CIME (1977) con lezioni di Beauville, Bogomolov, Bombieri e Dolgachev, il mio interesse si concentrò sulle superfici algebriche. Erano gli anni in cui apparvero due trattati fondamentali per la geometria algebrica: il libro di Hartshorne [H] e quello di Griffiths e Harris [GH1]. In entrambi un sostanzioso capitolo era dedicato proprio alle superfici algebriche. Io ero interessato alla classificazione proiettiva di questi oggetti e più in generale allo studio combinato della loro geometria intrinseca ed estrinseca, la seconda essendo rappresentata da i loro invarianti proiettivi come il grado e il genere sezionale. Con il collega Palleschi, che condivideva il mio interesse per le superfici, avevamo organizzato un ciclo di seminari e ci eravamo messi a studiare le superfici nello spazio proiettivo 4-dimensionale $\mathbb{P}^4$, ispirati dalla lettura del libro di Hartshorne, da un suo suggerimento epistolare e anche da una congettura di cui avevamo appreso da Gherardelli (attribuita a Griffiths) sulla limitatezza della irregolarità delle superfici in $\mathbb{P}^4$. Ricordo che Manara, pur avendo ormai spostato la sua attenzione su altri aspetti della Matematica, in particolare quelli pedagogici, seguiva con molto interesse i progressi che andavamo facendo, incoraggiandoci e dando anche utili suggerimenti, uno dei quali a riguardo di una generazione proiettiva dello scroll quintico ellittico di $\mathbb{P}^4$, non ancora nota in letteratura. Più tardi, nel 1983 ebbi la soddisfazione di avere un lavoro pubblicato sul Crelle [LP] e ricordo le sue congratulazioni non rituali quando andai a portargli l'estratto.

Più avanti, diventato suo collega, ebbi modo in più occasioni di ammirare lo stile accademico di Manara, sia nei suoi interventi nelle riunioni di Dipartimento o di Facoltà, sia in prossimità del suo collocamento fuori ruolo. E questa ammirazione è viva oggi più che mai anche alla luce dei ruoli di responsabilità accademica che le varie circostanze mi hanno portato a dover assumere.

2. *Manara e il tema principale della Scuola di Chisini*

Manara ha iniziato il suo lavoro scientifico sotto la guida di Chisini, laureandosi in “Scienze Matematiche” nel 1939, e i suoi lavori più significativi fino al 1951 vertono sul tema principale di Chisini e della sua Scuola a Milano: quello dei piani multipli e delle loro curve di diramazione.

Per dare un’idea di questo argomento che riguarda le varietà di dimensione ≥ 2, in particolare le superfici, conviene prima spendere qualche minuto a ricordare la situazione analoga in dimensione uno, cioè per le curve. Ogni curva algebrica proiettiva non singolare (superficie di Riemann compatta) C si può descrivere come un rivestimento ramificato della retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1$, in questo modo: C si immerge isomorficamente in $\mathbb{P}^3$ (tramite un’immersione in $\mathbb{P}^N$ ed una successiva proiezione generica) come curva liscia di un certo grado d e da qui, per proiezione da una generica retta λ su una retta $\ell = \mathbb{P}^1$ sghemba rispetto ad essa, si ottiene un morfismo (applicazione olomorfa) $f : C \to \mathbb{P}^1$. Per il generico punto $p \in \mathbb{P}^1$, la fibra $f^{-1}(p)$ consiste di d punti distinti di C, quelli in cui C taglia il piano generato da p e λ, e la ramificazione avviene in un numero pari di punti, calcolato dalla formula di Riemann-Hurwitz, $b = 2(d + g - 1)$, dove g è il genere di C. L’immagine di questi punti via f costituisce l’insieme di diramazione e per la genericità di λ le antiimmagini distinte via f di ogni punto di diramazione sono $d - 1$. Per comprendere più analiticamente questa situazione possiamo fattorizzare la proiezione f su ℓ attraverso:

1) una proiezione da un punto generico di λ su un piano $\Pi = \mathbb{P}^2$ contenente la retta ℓ, che produrrà come immagine di C una curva algebrica piana $\overline{C}$, ancora di grado d, dotata di un numero finito di punti singolari, che però (per la genericità di λ e del punto scelto su di essa) sono soltanto nodi (punti doppi con tangenti principali distinte) e
2) una successiva proiezione di $\overline{C}$ da un punto opportuno di Π (il punto $\lambda \cap \Pi$) sulla retta ℓ.

Restringendoci all’ambito affine possiamo supporre che tutti i punti di diramazione siano al finito e che la curva $\overline{C}$ sia rappresentata da un’equazione algebrica della forma

$$(1) \qquad y^d + a_1(x)y^{d-1} + \cdots + a_{d-1}(x)y + a_d(x) = 0,$$

dove x e y sono numeri complessi e gli $a_i(x)$ sono polinomi di grado i nella variabile x. Inoltre possiamo supporre che la retta ℓ abbia come traccia affine l'asse delle x e che la proiezione di C su di essa avvenga dal punto all'infinito dell'asse delle y, cosicché la seconda mappa attraverso cui f si fattorizza è descritta da

$$\overline{C} \ni (x,y) \mapsto x \in \ell .$$

Ricordiamo a questo punto che l'asse delle x è in realtà il piano $\mathbb{C}$ della variabile complessa. Al variare di $x \in \mathbb{C}$, variano anche le diverse radici della (1) e si parla di funzione algebrica $y = y(x)$ per indicare la funzione a più valori definita implicitamente dalla (1). Per $x = x_0$ generico (cioè diverso dai punti di diramazione) tali radici sono esattamente d, a due a due distinte, diciamole $y_1(x_0),\dots, y_d(x_0)$. Inoltre, per la genericità di cui sopra, accade che in ciascuno dei punti di diramazione x_1, …, x_b due soltanto delle radici della (1) vengono a coincidere tra loro, le altre d – 2 rimanendo distinte. Va osservato che anche quando x *è* l'ascissa di uno dei nodi di $\overline{C}$ due radici della (1) vengono a coincidere, ma queste coincidenze non hanno alcun interesse ai fini delle antiimmagini di $f : C \to \mathbb{P}^1$, che, appunto, stanno su C e non sulla sua proiezione piana $\overline{C}$.

Ora, muovendo x lungo un cammino $x = \alpha(t)$ da x_0 ad uno dei punti di diramazione, ad es. a x_1 per fissare le idee (senza incontrarne altri), siano $y_i(x_0)$ e $y_j(x_0)$ le due radici di (1) che, seguite per continuità, vengono a collassare insieme al termine di α. Si verifica allora che, muovendo x lungo un cappio $x = \gamma(t)$ in $\mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_b\}$ con punto base x_0 che effettua un giro completo intorno al solo punto x_1, i d valori $y_1(x(t))$, …, $y_d(x(t))$ variano ritornando complessivamente in sé stessi, ma subendo la trasposizione (scambio) che coinvolge $y_i(x_0)$ *e* $y_j(x_0)$. Inoltre:

1) questo effetto è il medesimo se si opera con un altro cappio nella stessa classe di omotopia di γ e
2) percorrendo due cappi, uno appresso all'altro, diciamo il primo intorno a x_1 e il secondo intorno a x_2, la trasformazione che subisce l'insieme

(2) $$f^{-1}(x_0) = \{y_1(x_0), \cdots, y_d(x_0)\}$$

è la composizione delle trasposizioni indotte singolarmente dai due cappi.

Ricordiamo a questo punto che la retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1$, di cui l'asse delle *x* è la traccia affine, è topologicamente una sfera; pertanto rimuovere da essa i *b* punti di diramazione di *f*, fa sì che il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_b\})$ risulti il quoziente del gruppo libero generato dalle classi dei cappi $\gamma_1, \ldots, \gamma_b$ con punto base x_0 contornanti rispettivamente i punti $x_1, \ldots, x_b$, rispetto all'unica relazione $\prod_{i=1}^{b} \gamma_i = 1$. Ciò traduce il fatto che la composizione di tutti questi cammini in ordine opportuno è un cammino omotopo a zero.

Si può allora riassumere quanto sopra in modo più formale, dicendo che in corrispondenza del rivestimento ramificato $f : C \to \mathbb{P}^1$ si ha un omomorfismo, detto *monodromia* di *f*,

$$\mu_f : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_b\}) \to \mathfrak{S}_d,$$

dal gruppo fondamentale della retta proiettiva complessa privata dei *b* punti di diramazione al gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_d = \mathrm{Aut}(f^{-1}(x_0))$, visto come gruppo delle trasformazioni dell'insieme (2). La irriducibilità di *C* comporta inoltre che tale omomorfismo sia transitivo, cioè la sua immagine operi transitivamente su $f^{-1}(x_0)$. Con questa terminologia, il *teorema di esistenza di Riemann* (1857) afferma che dato un sottoinsieme finito $B \subset \mathbb{P}^1$ di cardinalità pari ed un omomorfismo transitivo $\mu : \pi(\mathbb{P}^1 \setminus B) \to \mathfrak{S}_d$ esiste un'unica curva algebrica *C* (o superficie di Riemann compatta) con un rivestimento $f : C \to \mathbb{P}^1$ di grado *d* diramato su *B* ed avente monodromia $\mu_f = \mu$.

In dimensione due (o maggiore), la situazione, pur potendosi descrivere in modo abbastanza simile, si rivela assai più delicata. Sia *S* una superficie algebrica proiettiva complessa non singolare (l'analogo 2-dimensionale complesso della curva *C*). È possibile immergere isomorficamente *S* in $\mathbb{P}^5$ e di qui, proiettandola da un piano generico $\Lambda \subset \mathbb{P}^5$ su di un piano sghembo con esso, ottenere un *piano multiplo*, cioè un rivestimento ramificato $f : S \to \mathbb{P}^2$ di un certo grado *d* (il grado che ha *S* in $\mathbb{P}^5$), ma ora il luogo di diramazione è una curva algebrica $B \subset \mathbb{P}^2$, in generale irriducibile, che per $d \geq 3$ risulta dotata di punti singolari. Per di più, mentre nel caso 1-dimensionale una scelta anche non generica del centro di proiezione λ produce sempre un *morfismo* $C \to \mathbb{P}^1$, cioè una mappa definita in tutti i punti di *C*, qui una scelta non generica del centro di proiezione Λ può portare ad avere come $f : S \to \mathbb{P}^2$ non un morfismo, ma soltanto una *mappa razionale* (e in tal caso il grado *d* del rivestimento è minore di quello della superficie). Certamente questa differenza di situazioni era ben presente ai geometri classici, ma va riconosciuto che la terminologia moderna, non disponibile al tempo in cui lavoravano Chisini e la sua Scuola, consente una maggiore chiarezza.

Supposto Λ generico, restringendoci in modo opportuno all'ambito affine, possiamo anche qui descrivere la situazione tramite un'equazione algebrica della forma

(1') $$F(x,y,z) = z^d + a_1(x,y)z^{d-1} + \cdots + a_{d-1}(x,y)z + a_d(x,y) = 0\,,$$

con x, y, z complessi e $a_i(x, y)$ polinomi nelle variabili x ed y, di grado i. Al variare di (x,y) nel piano affine complesso a cui ci siamo ristretti, variano anche le diverse radici della (1'), che per $(x,y) = (x_0,y_0)$ generico (cioè non appartenente alla parte affine di *B*) sono esattamente *d*, diciamole $z_1(x_0, y_0)$, …, $z_d(x_0, y_0)$, cosicché

(2') $$f^{-1}((x_0,y_0)) = \{z_1(x_0,y_0),\cdots,z_d(x_0,y_0)\}.$$

Notiamo, en passant, che con la rappresentazione data dalla (1'), *B* risulta essere solo una componente di $\mathcal{D}$, la chiusura in $\mathbb{P}^2$ del luogo ottenuto proiettando sul piano (x, y) quello costituito dalle soluzioni del sistema

$$F(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0$$

(contorno apparente). Chiaramente $\mathcal{D}$ ha grado $d(d-1)$, ma contiene come componente doppia anche l'immagine piana della curva doppia nodale *N* giacente su $\overline{S} \subset \mathbb{P}^3$, la superficie immagine di *S* in $\mathbb{P}^3$ attraverso cui *f* si fattorizza, che è descritta dall'omogeneizzata dell'equazione

(1'): dunque $\mathcal{D} = B + 2f(N)$. Naturalmente $f(N)$ non ha interesse ai fini del nostro discorso, dato che noi cerchiamo le antiimmagini via f dei punti di $\mathbb{P}^2$ su S e non sulla sua proiezione $\overline{S} \subset \mathbb{P}^3$.

Inoltre, per la genericità di cui sopra, accade che in ciascuno dei punti non singolari di B due soltanto delle radici della (1') vengano a coincidere tra loro, le altre $d - 2$ rimanendo distinte, ma nei punti singolari di B si hanno ulteriori coincidenze: in particolare, in un nodo (punto doppio ordinario localmente descritto da $xy = 0$, cioè con tangenti principali distinte) sono quattro le radici che a coppie vengono a collassare in due, mentre rimangono distinte le restanti $d - 4$; in una cuspide (punto doppio localmente descritto da $y^2 - x^3 = 0$, in cui si ha un'unica tangente principale) sono tre le radici che vengono a collassare insieme, mentre rimangono distinte le altre $d - 3$. In punti singolari peggiori si può ovviamente intuire che le radici collassino ulteriormente. Tuttavia, in ipotesi di genericità (ad es. della proiezione che ha prodotto il piano multiplo) si può supporre che la curva di diramazione B abbia come singolarità soltanto nodi e cuspidi.

E qui si evidenzia subito una netta distinzione con il caso 1-dimensionale, in cui, come si è visto ogni insieme finito di cardinalità pari può essere luogo di diramazione. Infatti, non tutte le curve algebriche piane di grado pari aventi come singolarità soltanto nodi e cuspidi possono essere luogo di diramazione per un piano multiplo. Ad esempio, partendo dalla superficie cubica liscia $S \subset \mathbb{P}^3$, per proiezione da un punto che soddisfa le richieste di genericità formulate si ottiene un piano triplo la cui curva di diramazione, B, risulta essere una sestica avente sei cuspidi come sole singolarità, e per di più questi sei punti giacciono su una conica. Ebbene, la condizione caratteristica perché una sestica piana dotata di sei cuspidi sia curva di diramazione per un piano multiplo è esattamente che le sei cuspidi giacciano su una conica. I problemi che si pongono allora nel naturale intento di generalizzare alle superfici quanto visto per la dimensione uno sono:

a) caratterizzare le curve di diramazione dei piani multipli, cioè determinare le condizioni che una curva algebrica piana dotata di soli nodi e cuspidi deve soddisfare per essere la curva di diramazione di un piano multiplo;
b) decidere se un piano multiplo sia univocamente determinato (a meno di isomorfismi, o di trasformazioni birazionali) dalla propria curva di diramazione.

Il problema a) ha ricevuto importanti contributi da Beniamino Segre (1930) [S] e da Oscar Zariski (1929) [Za], che ha spostato il problema sul calcolo del gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$, ma su di esso hanno lavorato molto anche Chisini e la sua Scuola studiando un gran numero di situazioni. La questione b), invece, è affrontata da Chisini in una nota del 1944 [C1] ed è il tema ricorrente di una serie di lavori successivi suoi e dei suoi allievi, Manara (con particolare riferimento ai piani tripli), Modesto Dedò, Ermanno Marchionna e Cesarina Tibiletti. Alla base di entrambe le questioni stanno le cosiddette *condizioni di invarianza* di Enriques (1923) [En], di cui diamo ora un cenno.

Consideriamo in $\mathbb{P}^2$ il fascio di rette $\{\ell_u\}_{u\in\mathbb{P}^1}$ per il punto $p_0 = (x_0,y_0)$ (ad es., se come punto si sceglie il punto all'infinito dell'asse y, si può supporre che la retta ℓ_u abbia equazione $x = u$); guardando alla curva $C_u = f^{-1}(\ell_u)$ (una sezione iperpiana della superficie S) e al rivestimento $f_u := f\big|_{C_u} : C_u \to \ell_u$, che è diramato lungo $\ell_u \cap B$ ci riduciamo alla situazione già incontrata in dimensione 1 (in particolare questo ci dice nuovamente che B deve essere una curva di grado pari, e la formula di Riemann-Hurwitz lega il suo grado b a d e al genere sezionale g della superficie $S \subset \mathbb{P}^5$; ma, come già osservato, essere di grado pari non è la sola condizione perché una curva possa essere di diramazione per un piano multiplo). Sia Γ l'insieme degli $u \in \mathbb{P}^1$ tali che $\ell_u \cap B$ non è costituito da b punti distinti. Se il punto base $p_0 = (x_0,y_0)$ del nostro fascio di rette è scelto genericamente, le rette critiche rispetto a B, cioè le ℓ_u con $u \in \Gamma$ sono soltanto quelle tangenti e quelle passanti per i nodi o per le cuspidi di B. Le condizioni di invarianza di Enriques possono esprimersi così. Considerato il rivestimento $f_u : C_u \to \ell_u$ con $u \in \mathbb{P}^1 \setminus \Gamma$ ramificato nei punti $p_1, \ldots, p_b$, in cui ℓ_u taglia B, sia s_i la trasposizione associata al punto p_i (cioè $s_i = \mu_{f_u}(\gamma_i) \in \mathfrak{S}_d$, dove γ_i è il cappio in $\ell_u \setminus \{p_1, \ldots, p_b\}$ con punto base p_0 che contorna il singolo punto p_i). Siano p_i e p_j i punti che per $u \mapsto u_c \in \Gamma$ vengono a coincidere in un solo punto $p \in B$. Allora le trasposizioni s_i e s_j sono così correlate:

I) $s_i = s_j$, se p è un punto di tangenza a B;

II) disgiunte (es. s_i scambia 1 e 2 e s_j scambia 3 e 4), se p è nodo di B;

III) concatenate (es. s_i scambia 1 e 2 e s_j scambia 2 e 4), se p è cuspide di B.

Enriques ha dimostrato che queste condizioni sono necessarie e sufficienti perché B sia la curva di diramazione di un piano multiplo. Purtroppo però questo non è espresso in termini di un omomorfismo di monodromia $\mu_f : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B) \to \mathfrak{S}_d$, come invece avviene nel caso 1-dimensionale. Spetta a Zariski il merito di avere puntato l'interesse sul problema di determinare il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ per una curva algebrica $C \subset \mathbb{P}^2$ [Za]. E il problema è molto difficile e sottile. Possiamo immaginare che le classi dei cappi γ_i (ancorché in ℓ_u) considerati più sopra nel caso $C = B$ svolgano il ruolo di generatori per $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$, e questo è vero, ma è difficile stabilire quali siano le relazioni. Ad esempio, per la sestica con sei cuspidi, C, curva di diramazione del piano triplo ottenuto proiettando sul piano la superficie cubica non singolare di $\mathbb{P}^3$ da un punto generico, si ha $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$, un gruppo non abeliano, ma esistono delle sestiche con sei cuspidi per le quali il gruppo fondamentale corrispondente è, invece, abeliano. Il lavoro di Zariski è stato ripreso poi negli anni '70 e '80 da Moishezon, Fulton, Deligne e altri ancora e oggi si sa che se C è una curva irriducibile di grado m, con soli nodi, allora $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) \cong \mathbb{Z}/m$.

Sempre con riferimento alla questione a), vorrei dare qualche cenno sul lavoro di Chisini e Manara pubblicato negli *Annali di Matematica* del 1946 in cui si caratterizzano le curve di diramazione di certi piani tripli [CM1]. La peculiarità dei piani tripli è che la loro curva di diramazione non possiede nodi ma soltanto cuspidi. I piani tripli considerati da Chisini e Manara sono di una classe particolare, da loro chiamata "semplice": il piano triplo si ottiene proiettando su un piano la superficie $\overline{S}$ (proiezione in $\mathbb{P}^3$ della S originale) da un punto singolare isolato di molteplicità $d - 3$, supposto esistente, dove d è il grado di $\overline{S}$. In questo caso occorre avvertire che f è soltanto una mappa razionale se $d \geq 4$. Per questi piani tripli, la (1') va rimpiazzata con l'equazione seguente:

$$(1'') \quad F(x,y,z) = a_{d-3}(x,y)z^3 + a_{d-2}(x,y)z^2 + a_{d-1}(x,y)z + a_d(x,y) = 0,$$

dove gli a_i sono polinomi di grado uguale all'indice. In questa situazione, proprio l'espressione esplicita che l'equazione della curva di diramazione B assume suggerisce la costruzione di alcune curve covarianti proiettive (aggiunte di vari gradi) della B stessa, per mezzo delle quali l'equazione di B può riesprimersi in una forma più semplice che evidenzia subito delle relazioni ($b = 4d - 6$ e $c = 3(d-1)(d-2)$) tra il grado d di $\bar{S}$, il grado b di B e il numero c delle sue cuspidi. La caratterizzazione di B come curva di diramazione è fornita attraverso: 1) questi legami tra i caratteri numerici, 2) delle relazioni di equivalenza lineare che coinvolgono il gruppo delle cuspidi e i gruppi in cui due delle curve covarianti risultano tangenti a B fuori dalle cuspidi e 3) opportune proprietà delle serie lineari corrispondenti. In una nota successiva (*ibidem*, 1947) [CM2] questa caratterizzazione viene anche estesa al caso di piani tripli per i quali i polinomi in x,y che appaiono nella (1") abbiano gradi in progressione aritmetica con ragione maggiore di 1. Sullo stesso problema di caratterizzare le curve di diramazione dei piani tripli attraverso il gruppo di punti costituito dalle cuspidi, Manara ritorna poi ancora nel 1948 con una nota sul *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* [M2]. In essa si fornisce una caratterizzazione dei piani tripli "generali", riducendoli birazionalmente ad avere diramazione lungo una curva B di equazione $p^3 + q^2 = 0$, dove p e q sono polinomi in x, y, generici, di gradi $2m$ e $3m$ rispettivamente. Tali curve B hanno come singolarità esattamente $6m^2$ cuspidi, definite dal sistema $p = q = 0$ e in ciascuna di esse, la tangente cuspidale di B è tangente alla curva di equazione $q = 0$. Da notare che per $m = 1$ si ritrova esattamente la situazione della sestica con sei cuspidi descritta poco più sopra.

3. *La congettura di Chisini*

Per quanto riguarda il problema b) possiamo formulare la congettura di Chisini in termini moderni come segue. Sia S una superficie algebrica proiettiva non singolare e sia $f : S \to \mathbb{P}^2$ un morfismo finito di grado $d \geq 3$. Diciamo che $f : S \to \mathbb{P}^2$ è un piano multiplo *generale* se:

1) la sua curva di diramazione B è irriducibile ed ha per punti singolari soltanto nodi e cuspidi,

2) $f^*B = 2R + C$, dove R *(divisore di ramificazione* di f, o *curva di contatto* nella terminologia classica) è una curva irriducibile e non singolare e C è una curva ridotta,

3) $f|_R : R \to B$ è di grado 1 (in altre parole R *è* la *normalizzazione* di B).

Diciamo inoltre che un piano multiplo generale è *definito da una proiezione generica* (DPG) se il morfismo f è definito dalla proiezione da un sottospazio lineare generico dello spazio proiettivo in cui S è immersa isomorficamente. In tal caso, chiaramente, il grado d del piano multiplo è esattamente il grado di S.

Va osservato che la nozione di piano multiplo generale contempla anche la situazione (più estesa di quella dei piani multipli DPG) in cui $f^{-1}(\ell)$, con ℓ retta di $\mathbb{P}^2$, non è una sezione iperpiana per alcuna immersione proiettiva di S. Nella terminologia corrente il *fibrato lineare* $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ è cioè *ampio e globalmente generato*, ma non necessariamente *molto ampio*, come invece accade per i piani multipli DPG. Va notato peraltro che nella nozione di piano multiplo generale si inquadra anche il caso in cui nella visione classica il piano multiplo è definito da una mappa razionale, pur di rimpiazzare S con un suo opportuno scoppiamento.

La *congettura di Chisini* suona allora così. Sia $f : S \to \mathbb{P}^2$ un piano multiplo generale di grado $d \geq 5$ e sia B la sua curva di diramazione. Per ogni altro piano multiplo generale $f' : S \to \mathbb{P}^2$ (di grado arbitrario) con la stessa curva di diramazione B esiste un isomorfismo $\psi : S \to S'$ tale che $f = f' \circ \psi$.

L'ipotesi che sia $d \geq 5$ è strettamente necessaria, come illustra l'esempio portato dallo stesso Chisini di due piani multipli con $d \leq 4$ aventi la stessa curva di diramazione, ma non birazionali [C1]: si tratta della proiezione generica $f : S \to \mathbb{P}^2$ su un piano della superficie di Veronese $S \subset \mathbb{P}^5$, che è un piano 4-uplo avente come curva diramazione una sestica B con nove cuspidi e nessun nodo. Dato che la curva duale $B^\vee$ di B è una cubica liscia, utilizzando una costruzione generale, illustrata più sotto, si ottiene anche un piano triplo $f' : S' \to \mathbb{P}^2$ diramato lungo B e, per costruzione, S' risulta essere una superficie geometricamente rigata di base $B^\vee$, e quindi non razionale. Dunque S ed S' non possono essere birazionali.

La costruzione generale è la seguente [Ca, §3]. Sia $B \subset \mathbb{P}^2$ una curva algebrica dotata di soli nodi e cuspidi, la cui duale $B^\vee \subset \mathbb{P}^{2\vee}$ è una curva liscia, di grado m. In $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2\vee}$ si consideri un generico elemento T del sistema lineare $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2\vee}}(1,1)|$. T è una varietà liscia tridimensionale che eredita dalle proiezioni di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2\vee}$ sui fattori due strutture di fibrato

$p : T \to \mathbb{P}^2$, $q : T \to \mathbb{P}^{2\vee}$, entrambi con fibra $\mathbb{P}^1$. Posto $S' = T \cap q^{-1}(B^\vee)$ si ha che S' è un fibrato in $\mathbb{P}^1$ su $B^\vee$ (superficie geometricamente rigata di base $B^\vee$). Interpretando T come la varietà di incidenza $\{ (a,\ell) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2\vee} \mid a \in \ell \}$ abbiamo che

$$S' = \{ (a,\ell) \mid a \in \ell, \ell \in B^\vee \},$$

mentre $p^{-1}(a) = \{ (a,\ell) \mid \ell \ni a \} = \{ (a,\ell) \mid \ell \in L_a \}$, dove L_a è la retta di $\mathbb{P}^{2\vee}$ che parametrizza le rette del fascio per a. Fissato $a \in \mathbb{P}^2$, ne viene che

$$f'^{-1}(a) = p^{-1}(a) \cap S' = \left\{ (a,\ell) \middle| \ell \ni a, \ell \in B^\vee \right\} = \left\{ (a,\ell) \middle| \ell \in L_a \cap B^\vee \right\}.$$

Ciò mostra che $f' : S' \to \mathbb{P}^2$ è un morfismo finito avente grado $L_a \cdot B^\vee = \deg B^\vee = m$, e nel caso specifico in esame è appunto $m = 3$. Inoltre, B ne è la curva di diramazione. Infatti, essendo $B^\vee$ non singolare, le m antiimmagini di a via f' risultano non tutte distinte se e solo se la retta L_a è tangente a $B^\vee$, il che per bidualità equivale a dire che $a \in B$. La descrizione del piano multiplo $f' : S' \to \mathbb{P}^2$ è data da Chisini interpretando la funzione algebrica corrispondente $z(x,y)$ come la funzione a più valori che rappresenta il complesso dei coefficienti angolari delle tangenti a B condotte dal punto $a = (x, y)$.

Chisini (1944) [C1] dimostra l'esistenza di una mappa birazionale tra S ed S' sotto un'ipotesi tecnica alquanto pesante: che sia possibile far degenerare il piano multiplo in modo che la sua curva di diramazione B degeneri ad una curva doppia spezzata tale che tre sue componenti irriducibili non passino per uno stesso punto e a ciascuna componente sia associata una trasposizione. A questo proposito, in relazione all'esempio precedente Chisini osserva che variando con continuità il piano quadruplo ottenuto per proiezione della superficie di Veronese, la sestica di diramazione viene a degenerare in tre rette contate due volte non passanti per uno spesso punto, alle quali risultano associate le trasposizioni che scambiano rispettivamente (1,2), (1,3) e (1,4). Risulta quindi soddisfatta anche l'ipotesi tecnica di cui sopra. Chisini dubita però della reale necessità di questa ipotesi [C1, p. 16], e in un lavoro successivo in cui estende il risultato agli spazi multipli pone il problema [C2, p. 6] (che ha originato la cosiddetta congettura di Chisini) di trovare una dimostrazione diversa, proprio al fine di evitare la fastidiosa ipotesi tecnica sulla degenerazione della curva di diramazione. In una nota in calce alla pagina è detto, peraltro, che un autorevole maestro dubita della validità del supposto teorema generale.

Anche Manara ha studiato il problema dell'equivalenza birazionale per i piani multipli con la stessa curva di diramazione, proprio con l'obiettivo di evitare il metodo di degenerazione utilizzato da Chisini e le limitazioni che questo comportava. Avvalendosi di un suo studio antecedente sulla rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno dei punti singolari ordinari della sua curva di diramazione (1945) [M1], nel caso particolare in cui B sia una curva razionale e priva di flessi, ha dimostrato che sussiste un risultato di identità birazionale e in tal caso la superficie S risulta essere una rigata [M3] (1949). In [M4], ha studiato il problema per i piani tripli, riconducendolo all'esame del rivestimento indotto da f sulla retta generica di $\mathbb{P}^2$ e poi ancora, in [M5] (1951), ha sperimentato l'utilizzo di questo diverso approccio sui piani multipli.

A proposito del lavoro di Chisini del 1944 [C1] si potrebbero fare anche altre considerazioni, soprattutto su un enunciato locale che, almeno per quanto è possibile immaginare, sta alla base della congettura, e che sulla base di quello che sappiamo oggi è errato. Tale enunciato afferma che dati due piani multipli $f: S \to \mathbb{P}^2$ e $f': S' \to \mathbb{P}^2$, di gradi arbitrari, aventi la stessa curva di diramazione B (irriducibile e con soli nodi e cuspidi) esiste un isomorfismo tra intorni tubolari U, U' delle rispettive curve di contatto R in S e R' in S' al di sopra di un intorno di B in $\mathbb{P}^2$. In effetti, in presenza di un tale isomorfismo, l'ampiezza della curva di contatto, combinata con risultati di analisi complessa sviluppati negli anni '60, permetterebbe di mostrare l'esistenza di un isomorfismo tra le superfici S ed S'. Ma questo varrebbe allora anche per $d \leq 4$, il che invece è in contrasto con l'esempio presentato più sopra.

A dispetto di ciò, possiamo comunque dire oggi che la congettura di Chisini è "essenzialmente" vera. Il risultato, nella formulazione data, è stato stabilito per $d \geq 12$ ed è dovuto a Kulikov [Ku1] (1999), essenzialmente, e a Nemirovski (2000) [N], per un brillante miglioramento tecnico. Per di più, recentemente Kulikov [Ku2] (2008) ha stabilito che l'isomorfismo ψ di cui alla congettura esiste per due piani multipli

DPG, purché nessuno dei due sia definito da una proiezione della superficie di Veronese. In altre parole, restringendosi ai piani multipli DPG, la congettura non solo è vera, ma, per di più, l'esempio prodotto da Chisini costituisce l'unica eccezione all'esistenza dell'isomorfismo ψ. C'è di che restare ammirati di fronte a un così grande intuito geometrico.

E c'è una domanda naturale che potremmo porci. Quali strumenti matematici, che Chisini e la sua Scuola non avevano, hanno permesso di arrivare a provare la congettura? Alcuni aspetti tecnici del lavoro di Kulikov connessi all'analisi topologica del fenomeno della diramazione in prossimità delle cuspidi ricordano molto da vicino l'analisi di Chisini. Possiamo notare però che certamente ha giovato un complesso di cose: innanzitutto nuove tecniche, come la consuetudine acquisita oggi nel lavorare su varietà astratte (ad es. il prodotto fibrato $S \times_{\mathbb{P}^2} S'$ dei due piani multipli $f : S \to \mathbb{P}^2$ e $f' : S' \to \mathbb{P}^2$, che gioca un ruolo cruciale nell'analisi di Kulikov), i progressi nella conoscenza delle azioni di gruppo, l'utilizzo di vari risultati della teoria delle superfici che si sono andati consolidando nel tempo ed infine direi anche la maggior chiarezza terminologica acquisita nella geometria algebrica contemporanea.

4. *Alcuni aspetti della geometria dei sistemi lineari*

Sia $f : S \to \mathbb{P}^2$ un piano multiplo con curva di diramazione *B* dotata solo di nodi e cuspidi come singolarità, come nell'impostazione classica; pensiamo quindi al morfismo *f* come definito dalla proiezione di $S \subset \mathbb{P}^5$ da un piano Λ in posizione generica, su di un piano. La curva duale $B^\vee$ di *B* parametrizza le rette ℓ di $\mathbb{P}^2$ che sono tangenti a *B* e quindi gli iperpiani di $\mathbb{P}^5$ contenenti Λ che sono tangenti ad *S*. Poiché le sezioni iperpiane singolari di una superficie liscia di uno spazio proiettivo sono tutte e sole quelle tagliate dagli iperpiani tangenti, si conclude che le curve $f^{-1}(\ell)$ corrispondenti alle rette ℓ tangenti a *B* sono esattamente gli elementi singolari della rete (sistema lineare 2-dimensionale) $f^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$. Per esempio, se ci riferiamo alla superficie di Veronese $S \subset \mathbb{P}^5$ considerata poco più sopra, tenuto conto che $\mathbb{P}^{5\vee}$ parametrizza le coniche del piano proiettivo, si ha che il luogo $\Delta \subset \mathbb{P}^{5\vee}$ dello spazio proiettivo duale che parametrizza gli iperpiani tangenti (la varietà duale) è il simmetrodide cubico, cioè l'ipersuperficie definita dalla condizione det $A = 0$, dove A è la matrice simmetrica 3×3 della conica corrispondente al punto variabile $\mathbb{P}^{5\vee}$. Tale varietà Δ è singolare lungo una superficie Σ e perciò il generico piano di $\mathbb{P}^{5\vee}$, non incontrando Σ, taglia Δ lungo una cubica piana non singolare. Se il piano con cui tagliamo è quello che corrisponde alla rete $f^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$ la curva che otteniamo è esattamente la cubica piana non singolare $B^\vee$.

Questo ci porta a parlare di sistemi lineari di curve su una superficie, o più in generale, di ipersuperfici su una varietà algebrica. Vorrei descrivere un aspetto della geometria dei sistemi lineari che si pone come un ponte tra lo studio delle ipersuperfici di diramazione di un solido multiplo, effettuato attraverso l'ipersuperficie duale (per il teorema di bidualità, la curva di diramazione B del piano multiplo $f : S \to \mathbb{P}^2$ è la curva duale di $B^\vee$, che è il luogo discriminante della rete $f^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$), e lo studio della dualità per varietà algebriche proiettive non singolari. In generale, dato un sistema lineare $\mathcal{L}$ su una varietà algebrica proiettiva non singolare X, se ne può considerare il *luogo discriminante* $\mathcal{D}(X, \mathcal{L})$, che è costituito dalle ipersuperfici del sistema lineare dotate singolarità, cioè

$$\mathcal{D}(X, \mathcal{L}) = \{Y \in \mathcal{L} \mid Y_{\text{sing}} \neq \emptyset\}.$$

Sia $X = S$, la superficie dell'esempio discusso più sopra. Se come $\mathcal{L}$ si prende il sistema lineare completo tagliato su S dagli iperpiani di $\mathbb{P}^5$ si ha $\mathcal{D}(X, \mathcal{L}) = \Delta$, la varietà duale di S; se invece si prende $\mathcal{L} = f^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$, si ottiene $\mathcal{D}(X, \mathcal{L}) = B^\vee$, la curva duale di B. Più in generale, quando $\mathcal{L}$ è il sistema lineare delle sezioni iperpiane di una varietà $X \subset \mathbb{P}^N$, allora $\mathcal{D}(X, \mathcal{L})$ è esattamente la varietà duale $X^\vee \subset \mathbb{P}^{N\vee}$. Lo studio delle varietà duali delle varietà proiettive non singolari ha avuto un intenso sviluppo negli ultimi 30 anni (Kleiman [K], Zak [Z], Ein [El], [E2], Tevelev [T]), intrecciandosi con molti temi di studio nella geometria algebrica: aggiunzione, varietà difettive, spazi omogenei.

Vorrei menzionare in particolare il problema della classificazione delle varietà con difetto duale, che è un problema ancora aperto. Sia $X \subset \mathbb{P}^N$ una varietà algebrica proiettiva non singolare di dimensione

$\dim(X) = n$. L'oggetto duale $X^\vee \subset \mathbb{P}^{N\vee}$, che parametrizza gli iperpiani di $\mathbb{P}^N$ tangenti ad X, è una varietà algebrica proiettiva irriducibile dello spazio proiettivo duale, in generale una ipersuperficie, cioè $\dim(X^\vee) = N - 1$. Le varietà che fanno eccezione sono dette *varietà con duale degenere,* o *varietà con difetto positivo,* l'intero

$$\mathrm{def}(X) := N - 1 - \dim (X^\vee)$$

essendo chiamato *difetto* (*duale*). Ecco alcuni risultati noti.

(1) Se $n = 2$, cioè X è una superficie, allora $\mathrm{def}(X) = 0$ (Marchionna [Ma], 1955);

(2) se $\mathrm{def}(X) > 0$, allora $n - \mathrm{def}(X)$ è pari e ≥ 2 (teorema di parità di Landman, 1976, [K]);

(3) se $\mathrm{def}(X) = n - 2$ allora X è uno scroll (cioè una varietà fibrata in spazi lineari $\mathbb{P}^{n-1}$) su una curva algebrica non singolare (Lanteri-Struppa [LS1], Ein [E1], [E2], 1985; per $n = 3$ già Griffiths-Harris [GH2], 1979);

(4) per $n \leq 10$ si ha una classificazione completa delle varietà con difetto positivo (risultati di Ein [El], [E2], Lanteri-Struppa [LS2], 1987, Beltrametti-Fania-Sommese [BFS], 1992, Muñoz [MI], [M2], [M3], 1999; cf. [T, pp. 145-147]).

Per quanto detto più sopra, lo studio dei sistemi lineari dal punto di vista dei loro luoghi discriminanti si può riguardare come una estensione della teoria della dualità delle varietà proiettive. Naturale quindi rivisitare i problemi della dualità nel contesto più generale dello studio dei luoghi discriminanti. L'ipotesi naturale per ambientare questo studio è quella di considerare *sistemi lineari ampi e privi di luogo base* (o equivalentemente fibrati lineari ampi e globalmente generati). Fissando l'attenzione su tali sistemi lineari, ho avuto modo di iniziare queste ricerche con A.J. Sommese e M. Palleschi [LPS] nel 1996 e di portarle avanti poi in anni più recenti con R. Muñoz [LM1], [LM2], [LM3]. Per concludere questa presentazione vorrei dare almeno un cenno, se non dei risultati, almeno dei problemi che si incontrano cercando di estendere quanto menzionato prima a proposito delle varietà duali.

Sia X una varietà proiettiva non singolare e sia $\mathcal{L}$ un sistema lineare ampio e privo di punti base su X. Ciò equivale a richiedere che la mappa razionale $\varphi_{\mathcal{L}} : \to \mathbb{P}^N$ naturalmente associata ad $\mathcal{L}$ ($N = \dim(\mathcal{L})$) sia un morfismo (cioè definita dappertutto) e finita sull'immagine $\varphi_{\mathcal{L}}(X)$. Si ha $\mathcal{L} = \varphi_{\mathcal{L}}^{*}|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|$ e quindi una identificazione naturale tra $\mathcal{L}$ e $\mathbb{P}^{N\vee}$. Per le ipotesi fatte, il teorema di Bertini assicura che il generico elemento del sistema lineare $\mathcal{L}$ è non singolare, e quindi il luogo discriminante $\mathcal{D}(X, \mathcal{L})$ *è* descritto da un sottoinsieme algebrico proprio di $\mathbb{P}^{N\vee}$ (identificato con $\mathcal{L}$). A differenza del caso classico però, in generale $\mathcal{D}(X, \mathcal{L})$ non è irriducibile (per un esempio illuminante cf. [LM2, Example 3.2]).

In generale, la situazione è la seguente. Identificato $\mathcal{L}$ con $\mathbb{P}^{N\vee}$, consideriamo la varietà di incidenza

$$\mathcal{Y} := \{(x, Y) \in X \times \mathcal{L} \mid x \in Y_{\mathrm{sing}}\}$$

e le sue proiezioni $p_1 : \mathcal{Y} \to X$ e $p_2 : \mathcal{Y} \to \mathbb{P}^{N\vee}$. Chiaramente, $\mathcal{D}(X, \mathcal{L})$ è l'immagine di $\mathcal{Y}$ attraverso p_2. Come già ricordato, $\dim(\mathcal{D}(X, \mathcal{L})) < N$, per cui possiamo scrivere

$$\dim(\mathcal{D}(X, \mathcal{L})) = N - 1 - k,$$

dove l'intero $k \geq 0$ viene detto *difetto (discriminante),* $\mathrm{def}(X, \mathcal{L})$, di $(X, \mathcal{L})$.

Se $\varphi_{\mathcal{L}}(X) = \mathbb{P}^N$, cioè $N = \dim(\mathcal{L}) = \dim X = n$, allora $\varphi_{\mathcal{L}} : X \to \mathbb{P}^n$ è un solido multiplo. Supponiamo allora che $\varphi_{\mathcal{L}}(X) \neq \mathbb{P}^N$; allora la varietà duale $(\varphi_{\mathcal{L}}(X))^{\vee}$ è una sottovarietà irriducibile di $\mathcal{D}(X, \mathcal{L})$. Se il morfismo $\varphi_{\mathcal{L}}$ non ramifica (non cala di rango in alcun punto di X) allora $(\varphi_{\mathcal{L}}(X))^{\vee} = \mathcal{D}(X, \mathcal{L})$. Ma in generale non è così. Consideriamo i luoghi di X, detti di salto, in cui il rango del differenziale del morfismo $\varphi_{\mathcal{L}}$ cala progressivamente

$$\mathcal{I}_i = \{x \in X \mid \mathrm{rk}(d\varphi_{\mathcal{L}}(x)) \leq n - i\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

e poniamo $X_i = \mathcal{I}_i \setminus \mathcal{I}_{i+1}$ (dove per convenzione $\mathcal{I}_0 = X$ e $\mathcal{I}_{n+i} = \emptyset$). Si ottiene cosi una stratificazione

$$X = \bar{X}_0 \supset \bar{X}_1 \supset \bar{X}_2 \supset \cdots \supset X_n.$$

Notiamo che, per ogni i, $\mathcal{D}(X, \mathcal{L})$ contiene

$$\mathcal{D}_i = \overline{p_2 \circ p_1^{-1}(X_i)},$$

la chiusura di Zariski in $\mathbb{P}^{N\vee}$ del luogo degli elementi di $\mathcal{L}$ che hanno singolarità nei punti di X_i. Chiaramente, $\mathcal{D}_0 = (\varphi_{\mathcal{L}}(X))^{\vee}$ è irriducibile (e addirittura vuoto quando $\varphi_{\mathcal{L}}(X) = \mathbb{P}^N$, cioè quando abbiamo a che fare con un solido multiplo, ma in tal caso possiamo notare che $\mathcal{D}_1$ ne è esattamente la ipersuperficie di diramazione). Osserviamo invece che $\mathcal{D}_i$ può essere costituita da diverse componenti irriducibili per $i \geq 1$. Questo produce una decomposizione del luogo discriminante della forma

$$\mathcal{D}(X, \mathcal{L}) = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{D}_i$$

e possiamo definire un difetto per ciascuno degli strati ponendo

$$\mathrm{def}_i(X, \mathcal{L}) = N - 1 - \dim \mathcal{D}_\mathrm{i}.$$

Su quale di tutti questi difetti va dunque indirizzato lo studio per ritrovare un'analogia con la teoria classica? I risultati ottenuti sembrano suggerire che l'attenzione vada rivolta a def$(X, \mathcal{L})$. A questo proposito mi limito a menzionare quanto segue.

Innanzitutto si ha def$(X, \mathcal{L}) \leq n$, valendo il segno = se e soltanto se $(X, \mathcal{L}) = (\mathbb{P}^n, |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|)$ [LPS, Theorem 2.8]. Al di fuori di questo caso:

(1) se $n = 2$, cioè X è una superficie, allora def$(X, \mathcal{L}) = 0$;

(2) def$(X, \mathcal{L}) \neq n - 1$ e def$(X, \mathcal{L}) = n - 2$ se e soltanto se $(X, \mathcal{L})$ è uno scroll su una curva non singolare (cioè X si fibra in spazi lineari $\mathbb{P}^{n-1}$ su tale curva con gli elementi di $\mathcal{L}$ che tagliano degli iperpiani sulla fibra generica);

(3) def$(X, \mathcal{L}) \neq n - 3$ e per def$(X, \mathcal{L}) = n - 4$ si ha una descrizione quasi completa di $(X, \mathcal{L})$.

Questi risultati sembrano indicare che anche nell'ambito più generale delle coppie $(X, \mathcal{L})$ considerate qui possa valere un risultato di parità alla Landman, cioè che def$(X, \mathcal{L})$ abbia la stessa parità di n. Ma per il momento, questa è soltanto una congettura. Una seconda congettura che ad essa si ricollega [LPS] (1996) è che se def(X, $\mathcal{L}$) = k > 0, allora X è ricoperta da spazi lineari $\mathbb{P}^k$ sui quali le ipersuperfici di $\mathcal{L}$ tagliano degli iperpiani. Infatti, se questa seconda congettura fosse dimostrata, allora un risultato di Aluffi [A] (1995) implicherebbe la validità della prima.

RIASSUNTO

Dopo avere rievocato la figura di Carlo Felice Manara tra la fine degli anni 60 e i primi anni 80 attraverso ricordi di apprendistato, si presenta qualche idea sui piani multipli e le loro curve di diramazione, tema dominante delle ricerche coltivate dalla Scuola di Chisini a Milano, di cui Manara è stato esponente di rilievo. Si dà quindi un cenno di alcuni sviluppi che questi studi hanno avuto recentemente e si cerca infine di inquadrarli nell'ambito della geometria dei sistemi lineari.

BIBLIOGRAFIA

[A] P. ALUFFI, *Singular schemes of hypersurfaces*, Duke Math. J., 80 (1995), pp. 325-351.

[BFS] M. BELTRAMETTI, M.L. FANIA, A.J. SOMMESE, *On the discriminant variety of a projective manifold*, Forum Math., 4 (1992), pp. 529-547.

[Ca] F. CATANESE, *On a problem of Chisini*, Duke Math. J., 53 (1986), pp. 33-42.

[CI] O. CHISINI, *Sulla identità birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat., (3) 77 (1944), pp. 1-18.

[C2] O. CHISINI, *Sulla identità birazionale di due funzioni algebriche di più variabili, dotate di una medesima varietà di diramazione*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat., (3) 80 (1947), pp. 3-6.

[CM1] O. CHISINI, C.F. MANARA, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli, I*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 25 (1946), pp. 255-265.

[CM1] O. CHISINI, C.F. MANARA, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli, II*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 26 (1947), pp. 383-388.

[D] A. DOLD, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[El] L. EIN, *Varieties with small dual varieties, I*, Invent. Math., 86 (1986), pp. 63-74.

[E2] L. EIN, *Varieties with small dual varieties, II*, Duke Math. J., 52 (1985), pp. 895-907.

[En] F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*, Ann. Mat. Pura App., (4) 1 (1923), pp. 185-198.

[GH1] Ph. GRIFFITHS, J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley & Sons, New York, 1978.

[GH2] Ph. GRIFFITHS, J. HARRIS, *Algebraic geometry and local differential geometry*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., (IV) 12 (1979), pp. 355-432.

[Gu] R.C. GUNNING, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1966.

[H] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag New York, 1977.

[K] S.L. KLEIMAN, *Tangency and duality*, Proc. 1984 Vancouver Conference in Algebraic Geometry, Canadian Math. Soc. Conference Proc., vol. 6, 1986, pp. 163-225.

[Ku1] Vik. S. KULIKOV, *On Chisini's conjecture*, Izv. Math., 63 (1999), pp. 1139-1170.

[Ku2] Vik. S. KULIKOV, *On Chisini's conjecture, II*, Izv. Math., 72 (2008), pp. 901-913.

[L] A. LANTERI, *Un atlante differenziabile delle Grassmanniane reali e questioni di orientabilità*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 109 (1975), pp. 337-347.

[LM1] A. LANTERI, R. MUÑOZ, *Varieties with small discriminant variety*, Trans. Amer. Math. Soc., 358 (2006), pp. 5565-5585.

[LM2] A. LANTERI, R. MUÑOZ, *Discriminant loci of ampie and spanned line bundles*, J. Pure Appl. Algebra, 212 (2008), pp. 808-831.

[LM3] A. LANTERI, R. MUÑOZ, *Low dimensional discriminant loci and scrolls*, Indiana Univ. Math. J., 58 (2009), pp. 2205-2225.

[LP] A. LANTERI, M. PALLESCHI, *About the adjunction process far polarized algebraic surfaces,* J. reine angew. Math., 352 (1983), pp. 15-23.

[LSI] A. LANTERI, D. STRUPPA, *Some topological conditions for projective algebraic manifolds with degenerate dual variety: connection with $\mathbb{P}$-bundles*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8) 77 (1984), pp. 155-158.

[LS2] A. LANTERI, D. STRUPPA, *Projective 7-folds with positive defect*, Compositio Math., 61 (1987), pp. 329-337.

[LPS] A. LANTERI, M. PALLESCHI, A.J. SOMMESE, *On the discriminant locus of an ample and spanned line bundle*, J. reine angew. Math., 477 (1996), pp. 199-219.

[M1] C.F. MANARA, *La rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno di una singolarità ordinaria della sua curva di diramazione*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat., (3) 78 (1944-45), pp. 191-203.

[M2] C.F. MANARA, *Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli*, Boll. Un. Mat. Ital., (3) 3 (1948), pp. 114-119.

[M3] C.F. MANARA, *Sulle curve di diramazione dei piani multipli*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat., (3) 82 (1949), pp. 179-184.

[M4] C.F. MANARA, *Identità birazionale dei piani tripli aventi una stessa curva di diramazione*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 5 (1951), pp. 54-65.

[M5] C.F. MANARA, *Una condizione sufficiente per la identità birazionale di due piani multipli*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat., (3) 84 (1951), pp. 663-666.

[M6] C.F. MANARA, *Lezioni di Geometria*, Viscontea, Milano, 1965.

[Ma] E. MARCHIONNA, *Sopra una disuguaglianza tra i caratteri proiettivi di una superficie algebrica*, Boll. Un. Mat. Ital., (3) 10 (1955), pp. 478-480.

[Mu1] R. MUÑOZ, *Varieties with low dimensional dual variety*, Manuscripta Math., 94 (1997), pp. 427-435.

[Mu2] R. MUÑOZ, *Varieties with almost maximal defect*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 133 (2000), pp. 103-114.

[Mu3] R. MUÑOZ, *Varieties with degenerate dual variety*, Forum Math., 13 (2001), pp. 757-779.

[N] A. NEMIROVSKI, *Kulikov's theorem on the Chisini conjecture*, Izv. Math., 65 (2000), pp. 71-74.

[S] B. SEGRE, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali*, Mem. R. Accad. d'Italia, (I) 4 (1930), pp. 5-31.

[T] E. TEVELEV, *Projective duality and homogeneous spaces*, Encycl. Math. Sci., vol. 133, Springer-Verlag, 2005.

[Z] F.L. ZAK, *Tangents and secants of algebraic varieties*, Math. Monographs, vol. 127, Amer. Math. Soc., 1993.

[Za] O. Zariski, *On the problem of existence of algebric functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math., 51 (1929), pp. 305-328.