



Gruppo di Economia e Sistemistica.
Seminari del III Convegno su TEORIA DEI SISTEMI ED ECONOMIA.
C.I.S.M. – Udine, 12 – 16 aprile 1977
C. F. Manara.
LE INSTABILITÀ NEI MODELLI ECONOMICI

Indice.

INTRODUZIONE	2
A) Instabilità strutturale in modelli descrittivi	5
A1. I fenomeni dinamici della formazione dei prezzi.	6
A2. Problemi di instabilità nei modelli di formazione dei prezzi.	8
A3. Esempio elementare.	9
B) Instabilità strutturale in sistemi economici descritti da modelli di ottimizzazione.	11
B1 Instabilità strutturali in modelli statici di ottimizzazione	11
B2 Instabilità strutturali in modelli dinamici di ottimizzazione	14
B3 Ipotesi di evoluzione dinamica di un sistema produttivo	16
B4 Nota sulla coerenza delle scelte e sulla anolonomia delle equazioni differenziali.	17
B5 Termini dispersivi e funzioni di utilità globale del sistema dinamico	20
B6 Esempio elementare	20
C) Instabilità strutturale in modelli economici di controllo ottimale.	24
C1. Elementi sulla teoria del controllo ottimale	24
C2. Un caso classico	27
C3... Modelli di applicazione del principio del controllo ottimale in Economia	28
C4 Un esempio schematico	30
D) Instabilità strutturale in modelli di gioco differenziali.	35
BIBLIOGRAFIA	39

“[La mathématique]....n’a point de signes pour exprimer les notions confuses”.
J.B. Fourier. Théorie analytique de la chaleur. Discours préliminaire.

INTRODUZIONE

1. In tempi recenti l'attenzione degli studiosi di matematica applicata è stata attratta dalle questioni connesse con le instabilità strutturali dei sistemi fisici (intesi in senso molto lato). Può darsi che l'interesse che viene suscitato fuori dall'ambito strettamente scientifico sia dovuto in parte anche all'espressione, correntemente usata, che accenna alle *catastrofi*. Invero i tempi in cui viviamo non si direbbero fatti per ispirare l'ottimismo, e una teoria delle catastrofi potrebbe anche essere considerata di moda presso chi ritiene di poter sostenere di aver predetto tutto il male prevedibile di questa nostra generazione. Da parte nostra preferiamo utilizzare l'espressione più precisa e meno allarmante di *instabilità strutturale*; appare infatti abbastanza chiaro che non si può fare una teoria, razionalmente intesa, della catastrofe in senso assoluto: dopo la catastrofe non c'è che il caos. Allora le cosiddette catastrofi che si presentano in relazione alle instabilità strutturali di certi sistemi non lo sono che in senso molto relativo; in particolare appare abbastanza appetibile l'impiego della teoria dell'instabilità strutturale nell'Economia, nella quale si potrebbe dire che l'instabilità strutturale è quasi la regola e che un'instabilità viene volentieri considerata una catastrofe, almeno da coloro i quali ne sono interessati negativamente.

2. Pensiamo che sia opportuno spendere qualche parola sul piano del lavoro che segue e sulla scelta degli strumenti matematici che abbiamo utilizzato per cercare di rendere la realtà economica. Come abbiamo detto, in tempi relativamente recenti le instabilità strutturali sono state studiate con strumenti matematici che hanno assunto una certa notorietà: va tuttavia rilevato che l'impiego di questi strumenti all'analisi dei sistemi materiali (chimici, fisici, biologici...) è sottoposto all'ipotesi fondamentale che in tali sistemi si possa dare una funzione potenziale [30], [3]; abbiamo pertanto dovuto rinunciare all'impiego di questi strumenti molto moderni, perché pensiamo che la realtà economica ben raramente possa essere tradotta nel linguaggio matematico con l'ipotesi dell'esistenza di una funzione potenziale. Pensiamo invero che il comportamento umano, ed in particolare il comportamento economico, raramente possieda le proprietà di coerenza che sono conseguenza dell'esistenza di funzioni potenziali. Per quanto riguarda per esempio le scelte del consumatore, vedremo (Cfr. Cap. II infra) che la coerenza delle scelte è strettamente collegata con l'esistenza di un indicatore ordinale paretiano di utilità, che porta come conseguenza la coerenza del comportamento [29]; pensiamo invece che nella realtà il comportamento del soggetto economico possa essere meglio descritto con un sistema di equazioni che traducono legami anolonomi dei parametri che caratterizzano la situazione. Pertanto abbiamo scelto di utilizzare per le analisi che seguono degli strumenti matematici che potrebbero essere considerati come "classici". Ciò non toglie che anche con questi strumenti non si possa rendere conto di molti fenomeni che sono tipicamente instabili, secondo l'accezione del termine sulla quale torneremo presto. È noto per esempio che molte instabilità strutturali possono essere messe in evidenza semplicemente abbandonando lo schema lineare che, per quanto molto comodo, si rivela tuttavia insufficiente per rendere alcuni aspetti della realtà che hanno attirato l'attenzione degli

studiosi in epoca recente. Per esempio K. SHELI [28] ha messo in evidenza fenomeni di instabilità in sistemi economici retti da equazioni differenziali classiche; ed anche L. PASINETTI [16] aveva notato la possibilità di fenomeni esplosivi nella sua formulazione matematica del modello ricardiano. Ed anche A. QUADRIO CURZIO [26] ha messo in evidenza fenomeni che si potrebbero chiamare di instabilità strutturale in modelli lineari di sviluppo con vincoli esogeni.

3. Ciò che abbiamo detto finora rende utile una precisazione sull'espressione *instabilità strutturale* che abbiamo utilizzato finora in senso abbastanza sfumato e generico; poiché abbiamo detto di non ritenere applicabile con utilità ai casi dell'economia quella che viene attualmente chiamata *teoria delle catastrofi*, appare abbastanza scontato il fatto che parleremo di *instabilità* in senso molto generale: invero questo termine potrà designare il fenomeno di discontinuità delle soluzioni di un sistema di equazioni considerate come funzioni dei parametri o del tempo, oppure degli arresti dell'evoluzione di certi sistemi dinamici, arresti dovuti – come si vedrà – al fatto che le traiettorie giungono alla frontiera dello spazio di fase, oppure al fatto che i controlli ottimali hanno dei salti bruschi (cioè presentano quel fenomeno che viene pittorescamente indicato col termine gergale *bang*); oppure infine indicherà che determinati fenomeni, con significato economico quando si ha la convergenza di certe funzioni o algoritmi infiniti, danno luogo a dei fenomeni di divergenza.

Ci riterremo quindi abbastanza liberi nella scelta della realizzazione del concetto di *instabilità strutturale*, così come ci terremo liberi nella scelta degli strumenti matematici che utilizzeremo per rappresentare la realtà economica; per esempio, per descrivere dei fenomeni di evoluzione di un sistema nel tempo, sceglieremo di volta in volta lo schema delle equazioni differenziali oppure quello delle equazioni alle differenze finite. In questo ordine di idee ci rendiamo ben conto del fatto che non esiste uno schema privilegiato che imponga per l'Economia l'adozione della concezione discreta oppure di quella continua del tempo.

4. Pensiamo sia opportuno spendere ancora qualche parola a proposito della classificazione che abbiamo adottata per i problemi che presenteremo nel seguito. Ci pare abbastanza chiaro che la classificazione dei modelli economici possa essere fatta partendo da varie concezioni e secondo vari punti di vista; pensiamo anche che spesso in queste classificazioni abbiano una notevole influenza l'arbitrarietà e il gusto dei classificatori. Pertanto la classificazione che abbiamo adottata vorrebbe mettere in evidenza la posizione dei vari modelli nei riguardi del problema della "spiegazione" dei fatti economici. Abbiamo messo il termine "spiegazione" fra virgolette perché siamo consci del fatto che il fenomeno economico, essendo tipicamente umano, è difficilmente suscettibile di spiegazione nel senso preciso della parola. Tuttavia pensiamo che sia possibile cercare di ridurre il comportamento economico dell'uomo a poche ipotesi, che non pretendono di essere delle verità assolute o degli *assiomi* nel senso abituale del termine, ma che hanno una certa generalità. Per esempio pensiamo che ammettere l'ipotesi dell'esistenza di un indicatore ordinale paretiano di utilità permetta poi di "spiegare" il comportamento del consumatore con la ricerca del valore

massimo della funzione di utilità sotto il vincolo di bilancio. È questo il senso che abbiamo voluto dare alla classificazione dei vari capitoli che seguono.

Vorremmo concludere questa introduzione precisando che si è preferito scegliere la strada che porta all'esposizione di casi significativi, anche se particolari, piuttosto che quella che ci porterebbe all'esposizione generale ed astratta di metodi matematici. Ci rendiamo conto che questa nostra è una scelta che dipende dai gusti e dalle preferenze, e che non vogliamo pertanto imporre ad alcuno; tuttavia crediamo anche che tale scelta sia giustificata dal fatto che l'esposizione rigorosa e generale di tutti i metodi matematici che hanno il loro impiego in Economia sarebbe praticamente impossibile e porterebbe gli utenti in un'atmosfera troppo astratta e rarefatta rispetto agli scopi che ci siamo proposti.

A) Instabilità strutturale in modelli descrittivi.

La classificazione dei modelli può essere ritenuta abbastanza arbitraria; è infatti comprensibile che possano esistere criteri diversi per diversi Autori, criteri che dipendono in larga misura dai gusti e dai fini degli stessi. Pertanto è abbastanza difficile segnare il confine fra tra la classe dei modelli economici puramente *descrittivi* e quelli *esplicativi*. Probabilmente la cosa più ragionevole potrebbe essere cercare di descrivere i modelli esplicativi; tuttavia anche in questo caso occorrerebbe precisare che cosa si intende per “spiegazione” di un fatto o di un comportamento economico, soprattutto in relazione con il tentativo di dare leggi le quali possano tradurre questa spiegazione nel linguaggio proprio della matematica. La discussione che si inizierebbe per questa strada sarebbe lunga e forse non troppo concludente per i nostri fini, per quanto innegabilmente interessante dal punto di vista epistemologico e metodologico. Noi rinunceremo quindi a proseguirla qui e ci limiteremo a dare una descrizione (non una definizione rigorosa) di quello che intendiamo per modello puramente descrittivo, lasciando al lettore le ovvie generalizzazioni; ci interessa infatti soprattutto analizzare il fenomeno matematico che traduce la “instabilità” del modello, per precisare che cosa intendiamo esporre.

A nostro avviso si potrebbe pensare al tipico modello descrittivo che è dato dal fenomeno della formazione del vettore dei prezzi di certi beni in un sistema in cui vi siano produzioni e consumi delle merci considerate. Supponiamo che nel sistema si possano distinguere due settori (distinti ma non necessariamente separati) che chiameremo della produzione e del consumo; ciascuno dei due settori ha un effetto retroattivo sull'altro (feed back, fig.1),

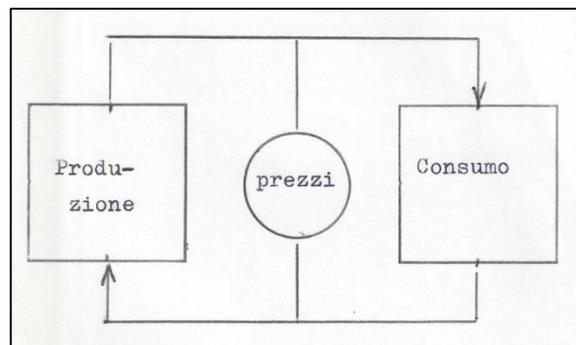


Figura 1

effetto che si verifica attraverso il meccanismo dei prezzi. Supponiamo che in condizioni statiche esista un vettore p^* dei prezzi che è il vettore di equilibrio; a questi prezzi le merci prodotte vengono interamente assorbite dal mercato e le quantità prodotte e consumate rimangono sempre le stesse nel tempo. Ovviamente ciò che abbiamo detto non costituisce una spiegazione del fenomeno della produzione, del consumo e dell'equilibrio dei prezzi, ma costituisce soltanto una descrizione dello stato di fatto supposto esistente.

A1. I fenomeni dinamici della formazione dei prezzi.

Se ora abbandoniamo l'ipotesi che il sistema si trovi in condizioni statiche e supponiamo invece che esistano degli squilibri tra le domande e le offerte dei vari beni, siamo portati anche a supporre che le domande di beni insoddisfatte e le offerte eccessive dei beni prodotti non assorbiti dal mercato producano delle variazioni di prezzi nel tempo; inoltre possiamo anche supporre che la produzione sia influenzata dai cambiamenti dei prezzi, ma che si adegui alla domanda con un certo ritardo, mentre le domande si adeguano immediatamente alle variazioni di prezzo. Per descrivere questo fenomeno evolutivo conviene spesso supporre che il tempo sia una variabile discreta e quindi far ricorso allo strumento matematico che ci è dato dalle equazioni alle differenze finite.

È del tutto evidente che la scelta della variabile tempo come variabile discreta (come qui abbiamo fatto), oppure come variabile continua (come faremo nelle prossime sezioni), è dettata da pure ragioni di comodità e non è affatto imposta da una supposta "realtà" del fenomeno che stiamo studiando. Nel caso in esame la scelta può essere giustificata dall'osservazione che abbiamo fatta poco fa, dicendo che la produzione si adegua ai prezzi con un certo ritardo. Pertanto se conveniamo di indicare con t una coordinata temporale che può assumere soltanto valori interi positivi, si potrà scrivere che il vettore delle merci domandate nel periodo t è una funzione del vettore dei prezzi nello stesso periodo: si ha quindi

$$(1) d(t) = D(p(t)).$$

Si può invece pensare che il vettore $f(t)$ delle quantità di merci prodotte ed offerte sul mercato nel periodo t sia funzione dei prezzi delle merci stesse nei periodi precedenti. L'ipotesi più semplice e rudimentale è quella che porta a scrivere $f(t)$ come funzione dei prezzi soltanto del periodo precedente, e quindi porta a scrivere:

$$(2) f(t) = F(p(t - 1)).$$

Un'altra ipotesi abbastanza rudimentale porta a supporre che tutte le merci prodotte siano assorbite dal mercato, e quindi porta a scrivere che si abbia per ogni valore t :

$$(3) f(t) = d(t).$$

Questa condizione, che traduce l'inesistenza di scorte delle merci considerate, come pure l'inesistenza di entrate e uscite delle merci stesse dal mondo esterno al sistema o verso il mondo esterno al sistema, porta quindi ad un legame tra il vettore dei prezzi del periodo t e quello dei prezzi del periodo precedente. Se supponiamo che questa relazione possa essere risolta rispetto al vettore dei prezzi del periodo t , potremo scrivere un'equazione alle differenze finite in forma canonica

$$(4) p(t) = G(p(t - 1)), \quad t = 1, 2, \dots$$

Questa equazione permette di determinare l'evoluzione del vettore dei prezzi nel tempo, quando sia dato il vettore $p(0)$ dei prezzi all'inizio delle osservazioni. Pertanto la soluzione generale dell'equazione (4), quando esiste, sarà data da una successione

$$(5) P(t, P(0))$$

di vettori dei prezzi, che dipende dal vettore iniziale. Si pongono quindi in relazione a questo problema i classici problemi che riguardano la soluzione delle equazioni differenziali e delle equazioni alle differenze finite; i più interessanti fra questi problemi, per le applicazioni che ci interessano, sono quelli che riguardano la stabilità delle soluzioni. Invero, considerato il vettore p^* di cui abbiamo parlato (pg. 5), che è soluzione dell'equazione vettoriale

$$(6) D(p^*) = F(p^*),$$

conseguente dalla (3) scritta a prescindere dal tempo, cioè *in condizioni statiche*, si può domandarsi se esista un numero reale positivo δ tale che quando sia

$$(7) |p^* - p(0)| < \delta, \text{ si abbia}$$

$$(8) \lim_{t \rightarrow \infty} P(t, p(0)) = p^*.$$

Quando la (8) sia valida qualunque sia δ positivo, la soluzione (5) viene detta, secondo la nomenclatura adottata abitualmente, *globalmente stabile*. Nel caso contrario la soluzione viene chiamata *localmente stabile*.

Il caso più interessante ai nostri fini, che è anche il caso più vicino alla realtà, è quello in cui non vi sia stabilità globale. La situazione potrebbe essere descritta in modo qualitativo mediante la seguente immagine geometrica: esiste una regione S contenente il vettore p^* al suo interno, tale che, quando sia

$$(9) p(0) \in S,$$

sussista la (8), e quindi la successione dei vettori dei prezzi converge ad un vettore di equilibrio di mercato - produzione. Esiste una regione E , complementare di S , tale che, quando è

$$(10) p(0) \in E,$$

la successione dei prezzi è esplosiva. Il confine comune delle due regioni potrebbe essere chiamato *zona critica* (figura 2).

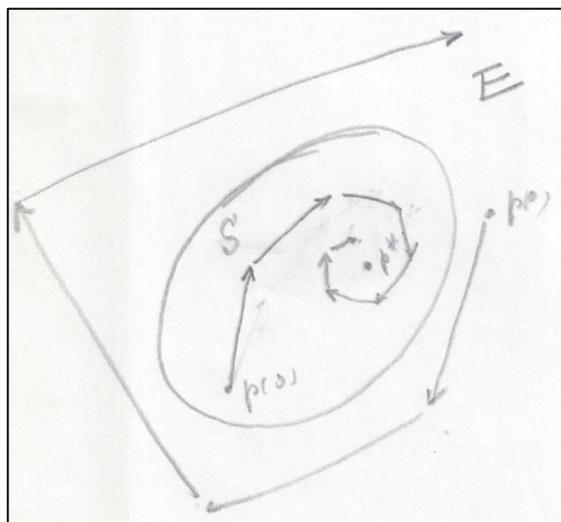


Figura 2

È abbastanza facile costruire esempi concreti di fenomeni di questo tipo, e del resto esamineremo nella sezione A3 un caso del tutto elementare. Rimanendo nel caso di un vettore p a n componenti, con $n > 1$, si può procedere nel modo seguente. Indichiamo con $\sigma(x)$, $x \in R$, la funzione caratteristica dell'intervallo reale (11) $0 \leq x \leq 1$, cioè la funzione che vale 1 se x appartiene all'intervallo (11) e vale zero altrove. Analogamente indichiamo con $\tau(x)$, $x \in R$, la funzione caratteristica dell'intervallo (12) $1 \leq x$.

Sia a un vettore a n componenti:

$$(13) a = [a_1, a_2, \dots, a_n],$$

e si abbia

$$(14) |a_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Analogamente sia b un vettore a n componenti

$$(15) b = [b_1, b_2, \dots, b_n],$$

e si abbia

$$(16) |b_i| > 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Indichiamo con \hat{a} e \hat{b} le matrici quadrate che si ottengono “diagonalizzando” i vettori a e b rispettivamente, cioè le matrici dove sono nulli tutti gli elementi eccetto quelli della diagonale principale, che sono uguali rispettivamente agli elementi dei vettori a e b . Indicheremo infine, secondo il solito, con $|v|$ la norma euclidea del vettore v ; poniamo cioè

$$(17) |v| = \sqrt{\sum_1^n (v_i)^2}.$$

Fissiamo un numero reale positivo r e consideriamo la matrice quadrata

$$(18) T(v) = \hat{a} \sigma(|v|/r) + \hat{b} \tau(|v|/r).$$

Consideriamo ora la successione di vettori definita dall'equazione alle differenze finite

$$(19) v_{t+1} = v_t T(v_t), \quad t = 1, 2, \dots$$

In base alle scelte fatte si ha che la convergenza della successione (19) dipende dal vettore iniziale v_0 . Invero si ha: (20) se $|v_0| < r$, è $\lim_{t \rightarrow \infty} v_t = 0$; invece la successione è esplosiva se si ha (21) $|v_0| \geq r$.

In questo caso quindi la regione S è formata dall'interno di una regione sferica di raggio r avente centro nell'origine. La forma della regione S può anche non essere talmente particolare, perché basta ovviamente considerare una matrice quadrata M non degenera e considerare la trasformazione

$$(22) v = p M,$$

per ottenere come regione E quella trasformata di E attraverso la matrice M^{-1} . In questo caso si potrebbe scrivere la (4) nella forma seguente:

$$(23) p(t) = p^* + (p_{t-1} - p^*) M \cdot (T(p_{t-1} M)) M^{-1}.$$

A2. Problemi di instabilità nei modelli di formazione dei prezzi.

Gli esempi che abbiamo presentato nella sezione precedente riguardano dei casi abbastanza particolari: sarebbe facile, come abbiamo detto, modificare ulteriormente la regione di stabilità S , e quindi descrivere molti casi che riguardano i fenomeni di cui abbiamo parlato. Si può tuttavia pensare a qualche modello più generale, nel quale la convergenza o l'esplosività della successione dei prezzi non dipenda esclusivamente dal vettore $p(0)$ di partenza, ma anche da altre circostanze. A questo proposito osserviamo che la successione dei prezzi, definita dall'equazione alle differenze finite (A1/4), traduce un procedimento di adattamento del sistema produzione - mercato; pertanto il valore limite p^* è supposto fisso e dipende dai gusti dei consumatori e dalla tecnologia, supposta invariabile durante il periodo considerato, anzi addirittura definitivamente fissata. È chiaro che queste ipotesi sono abbastanza lontane dalla realtà; un primo modo per escogitare un modello più realistico potrebbe essere quello di supporre che il vettore p^* che compare nella (A1/23) sia variabile col tempo. Si potrebbe così rendere il fatto che le variazioni dei gusti e delle tecnologie producono naturalmente una

variazione nel tempo dei prezzi di equilibrio, anche nel modello supposto statico. Tuttavia questa semplice e naturale ipotesi introduce la possibilità di un'instabilità strutturale nel modello, il quale può diventare da stabile a esplosivo, a seconda della velocità della variazione del vettore p^* .

La situazione è illustrata in modo qualitativo dalla figura 3; nella figura 3A) è illustrata la situazione che nasce con una lenta variazione del vettore p^* ; nella figura 3B) la velocità di variazione del vettore p^* è tale che esiste un valore \bar{t} della coordinata temporale tale che $p(\bar{t})$ risulta fuori dalla regione $S(\bar{t})$ corrispondente al vettore $p^*(\bar{t})$; ovviamente dal periodo \bar{t} in avanti il fenomeno potrebbe diventare esplosivo.

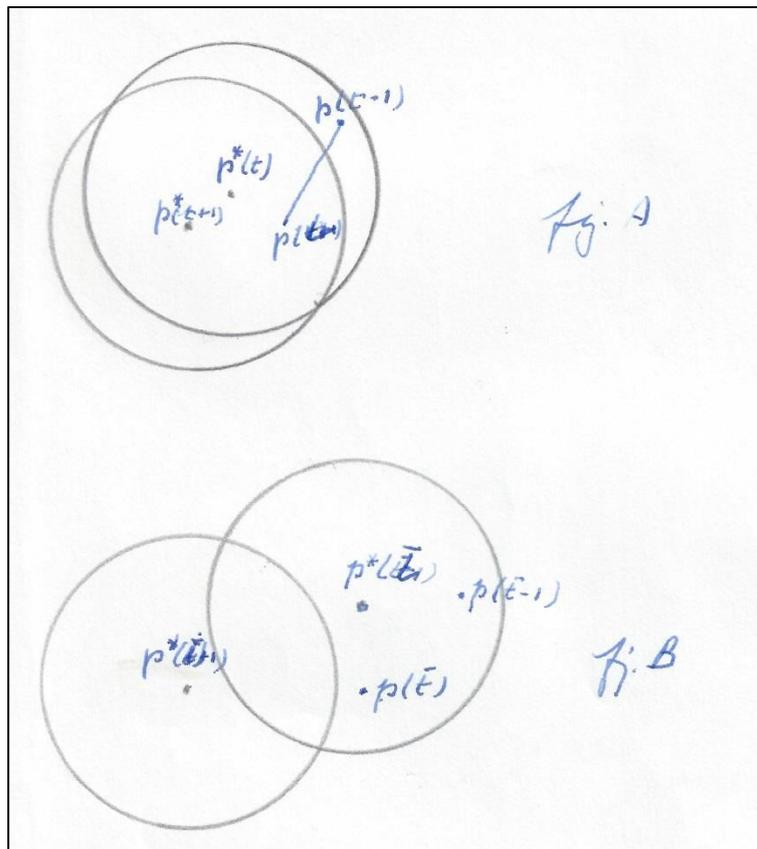


Figura 3

A3. Esempio elementare.

Quanto esposto nelle sezioni precedenti ammette un'illustrazione elementare a proposito del modello descrittivo, detto della *ragnatela*, con cui si descrive la formazione di un bene su un mercato chiuso. Come è noto, è possibile illustrare il fenomeno mediante un sistema di assi cartesiani, portando in ascisse i prezzi ed in ordinate le due curve: dell'offerta, (conseguenza della produzione), data da $f(P)$, essenzialmente crescente, e della domanda, $d(p)$, essenzialmente decrescente.

Facendo l'ipotesi, abbastanza accettabile, che la quantità della merce prodotta, e quindi offerta sul mercato, sia funzione del prezzo del periodo precedente, e che la quantità

domandata sia invece funzione del prezzo del periodo considerato, si è condotti a scrivere l'equazione alle differenze finite del primo ordine

$$(1)f(p(t - 1)) = d(p(t)).$$

La convergenza oppure l'esplosività del fenomeno dipendono dalle caratteristiche delle due curve

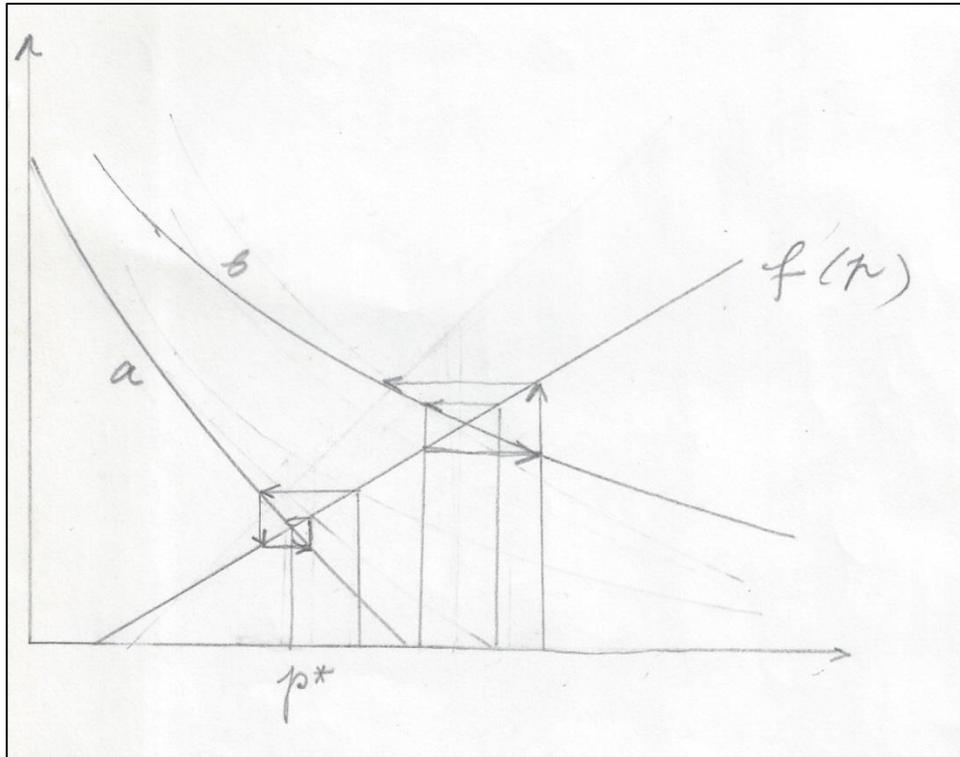


Figura 4

dell'offerta e della domanda; si può avere la convergenza *a ragnatela* verso il prezzo di equilibrio p^* , che rappresenta l'ascissa del punto comune alle due curve della domanda e dell'offerta (curva a), oppure può avverarsi un fenomeno di esplosione dei prezzi, dipendente dalla natura della curva della domanda (curva b , fig. 4). Appare ragionevole pensare che nel sistema si possa avere instabilità, con esplosione del prezzo, quando la domanda del bene passi rapidamente da un atteggiamento del tipo a) ad un atteggiamento del tipo b) senza che la struttura della produzione possa modificarsi abbastanza rapidamente per modificare la curva di offerta $f(p)$. Si potrebbero aggiungere anche degli sviluppi matematici a questa descrizione qualitativa del fenomeno, ma riteniamo che le cose esposte siano sufficienti per descrivere la natura dei casi di instabilità che abbiamo intenzione di esporre in questa sezione. Ripetiamo ancora una volta che l'interpretazione delle variabili considerate come prezzi dei beni è inessenziale per la validità degli schemi che abbiamo presentato; ovviamente la validità di un modello matematico non dipende dai contenuti ma dalla struttura matematica delle equazioni e degli altri strumenti teorici di cui ci si serve. È pensabile quindi che questi stessi schemi posano essere adattati anche ad altri contenuti per la descrizione di fenomeni di instabilità nei sistemi economici, oggi anche troppo frequenti in molti campi.

B) Instabilità strutturale in sistemi economici descritti da modelli di ottimizzazione.

In questa sezione saranno analizzati alcuni casi – che riteniamo notevoli – di instabilità strutturale che si presenta in un sistema economico, quando l'analisi sia eseguita mediante modelli di ottimizzazione. Ci pare interessante osservare che lo schema di ricerca di valori ottimali di certe funzioni appare come uno dei più efficaci per spiegare (nei limiti in cui ciò è possibile) il comportamento economico; di conseguenza l'adozione di questo schema porta a scrivere dei modelli che hanno notevole portata e generalità. È abbastanza chiaro che la “spiegazione” che viene data dei fatti economici con modelli del genere ha i caratteri di tutte le spiegazioni che vengono date nelle scienze della natura; e pertanto è superfluo ricordare qui i limiti delle “spiegazioni” che così vengono date. È anche appena necessario ricordare che l'ottimizzazione di cui stiamo parlando può sempre essere ricondotta alla ricerca dei valori massimi di certe funzioni, eventualmente sotto certi vincoli. Invero dal punto di vista, puramente formale, della matematica basta un eventuale cambiamento di segno per ricondurre un problema di ricerca di valori stazionari alla ricerca di valori massimi; e d'altra parte è ben noto che molti problemi economici che rientrano in questo schema posseggono problemi duali, che sono spesso equivalenti.

Vogliamo infine ricordare che, anche in questa sezione, il concetto di *instabilità strutturale*, in genere abbastanza sfumato e non rigorosamente precisato in termini formali, verrà concepito in vari sensi, analoghi e più o meno vicini fra loro. In generale l'instabilità sarà concepita come non esistenza di soluzioni continue di problemi statici, oppure come non esistenza di fenomeni di convergenza in problemi di evoluzione dinamica.

B1 Instabilità strutturali in modelli statici di ottimizzazione.

Prescindendo per il momento dalla considerazione del tempo, si abbia una funzione f

$$(1) f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R},$$

funzione reale di n variabili reali, che potremo indicare in generale con (2) x_1, x_2, \dots, x_n . Per comodità si potrà indicare con x la ennupla di numeri (2): con linguaggio convenzionale ben noto potremmo parlare brevemente di *punto* $x \in \mathcal{R}^n$, ponendo anche

$$(3) x = x_1, x_2, \dots, x_n,$$

e chiamando le x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, le *coordinate* del punto x .

La ricerca di valori ottimali della funzione f , quando siano assegnati determinati vincoli

$$(4) \varphi_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \text{con (5) } m < n,$$

conduce all'applicazione dei noti metodi di Lagrange, quando la funzione f e le funzioni φ_j che rappresentano i vincoli abbiano determinati caratteri. L'ipotesi abituale di comodo che viene enunciata richiede che le funzioni f e φ_j siano di classe di differenziabilità \mathcal{C}^k , con $k \geq 2$.

Tuttavia va ricordato che i metodi classici dell'Analisi matematica, con i risultati che ne dipendono, cessano di valere quando le funzioni con le quali si cerca di tradurre il fenomeno in questione non abbiano le proprietà di cui abbiamo parlato. È ben noto che se per esempio le funzioni che traducono i vincoli (4) sono di classe di differenziabilità \mathcal{C}^0 , le soluzioni di eventuali problemi di ricerca di massimo vincolato possono presentare delle instabilità nel senso precisato sopra. Per fissare le idee richiamiamo i procedimenti che vengono adottati

nella teoria elementare della scelta, che viene adottata per spiegare (nel senso detto sopra) il comportamento di un consumatore.

Si indicano con i numeri (2) le quantità di certi n beni che il consumatore può acquistare, e si indicano con (6) p_1, p_2, \dots, p_n i prezzi corrispondenti. Tanto per i numeri (2) che per i numeri (6) si suppongono valide le ipotesi

$$(7) x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n ; \quad (8) p_i > 0, i = 1, 2, \dots, n .$$

Detto r (numero essenzialmente positivo) il reddito del consumatore (misurato in un numerario fissato nel quale sono indicati anche i prezzi suddetti), il soggetto deve rispettare la condizione, abitualmente chiamata *condizione di bilancio*,

$$(9) \sum_1^n p_i x_i = r .$$

Le condizioni (7) individuano ovviamente un aperto $X \subset \mathcal{R}^n$. Supponiamo ora che esista una funzione $u : X \rightarrow \mathcal{R}^n$ che abbia le caratteristiche richieste abitualmente a un *indicatore (ordinale) paretiano di utilità*. Tali caratteristiche sono enunciate dalle seguenti ipotesi:

– u sia di classe C^k con $k \geq 3$;

– si abbia $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, quando la derivata sia calcolata in un punto qualunque di X ;

– fissato un numero reale qualsiasi k , l'insieme dei punti $x \in X$, tali che (10) $u(x) \geq k$, è convesso in senso stretto. Con ciò si indica, come è noto, che, presi due punti $x, y \in X$ e posto

$$(11) z = \lambda x + \mu y , \text{ con } (12) \lambda \mu > 0 , \quad \lambda + \mu = 1 ,$$

si ha:

$$(13) u(z) > u(x) \quad ; \quad u(z) > u(y)$$

ogni volta che è

$$(14) u(x) = u(y) .$$

Come è noto, tali ipotesi sono sufficienti perché si possa dimostrare che esiste un unico punto $x \in X$, che fornisce il massimo di u sotto il vincolo di bilancio (9). Le coordinate di tale punto sono certe funzioni

$$(15) x_i = x_i(p, r) , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dei prezzi (6) e del reddito r del consumatore. È noto che, fissato un vettore di prezzi, le curve descritte dal punto di coordinate (15), in funzione di r , sono chiamate *curve di domanda del consumatore* o *curve di Engel*.

Le ipotesi enunciate sulla classe di differenziabilità della funzione $u(x)$ assicurano che le funzioni (15) sono di classe di differenziabilità C^k , $k \geq 2$, dunque continue e con derivate continue. In particolare quindi la descrizione che viene così data del procedimento della scelta del consumatore costretto da vincoli di bilancio conduce a concludere che piccole variazioni nei prezzi e nel reddito conducano a piccole variazioni delle quantità di beni acquistate sul mercato.

Il problema della teoria della scelta sopra illustrato è solo uno dei moltissimi problemi che vengono impostati in maniera analoga; lo scopo per cui questo problema è stato richiamato era qui solo quello di ricordare l'influenza che le ipotesi poste per la funzione $u(x)$, indicatore ordinale paretiano di utilità, hanno sulla natura delle funzioni di domanda, e addirittura sulla loro stessa esistenza.

Ciò avviene ad esempio in una classe molto vasta di problemi che non possono essere risolti con i procedimenti classici, i quali conducono alla ricerca di massimi vincolati con le tecniche

di Lagrange, e che invece debbono essere risolti con tecniche diverse. Come è noto, il problema tipico di programmazione lineare potrebbe essere enunciato dicendo che si tratta di trovare il punto $x \in \mathcal{R}^n$ che fa assumere il valore massimo a una funzione lineare del tipo

$$(16) f(x) = \sum_1^n c_j x_j ,$$

sotto assegnati vincoli lineari del tipo

$$(17) \varphi_i = \sum_1^n a_{ij} x_j - b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

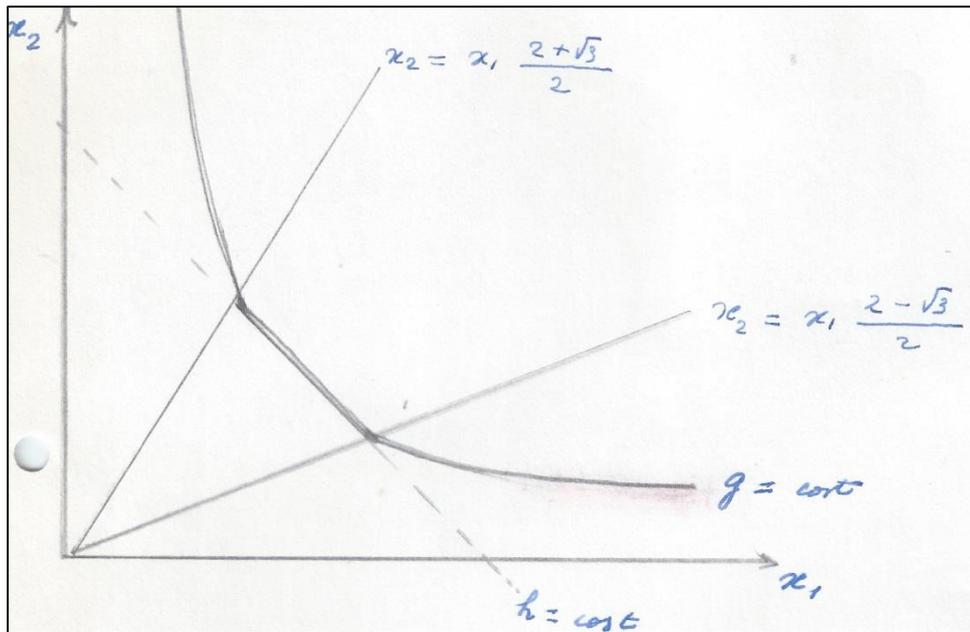


Figura 5

Orbene, quando si ritengano dati e fissati i vincoli (17) è noto che le coordinate del punto di massimo, qualora esistano, non sono funzioni continue dei parametri che danno la funzione obiettivo da massimizzare. Si ha quindi in questo caso un fenomeno che potrebbe essere classificato come di *instabilità* in senso molto generico. Altri esempi potrebbero essere escogitati che realizzano questi fenomeni.

Si pensi ad esempio al seguente caso: si ponga $n = 2$ e si considerino le due funzioni seguenti:

$$(18), (19) g(x) = x_1 x_2, \quad h(x) = x_1 + x_2 ; \quad x_1, x_2 > 0. \text{ Poniamo:}$$

$$(20) u(x) = \sqrt{\min(h^2, 6g)}$$

Le curve di livello $u = cost$ sono formate in parte da rette e in parte da iperboli, come mostra la figura 5.

Si consideri il vincolo di bilancio:

$$(21) p_1 x_1 + p_2 x_2 = r ; \quad r, p_1, p_2 > 0.$$

Il problema di determinare il massimo di u sotto il vincolo (21) non è risolubile secondo la tecnica classica di Lagrange, quando i parametri p_1, p_2 appartengano all'intervallo aperto

$$(22) \frac{2-\sqrt{3}}{2} < \frac{p_1}{p_2} < \frac{2+\sqrt{3}}{2} ;$$

e quindi non è possibile neppure definire delle curve di Engel in questo intervallo. Quando invece si ha

$$(23) \quad \frac{p_1}{p_2} > \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \quad \text{oppure} \quad \frac{p_1}{p_2} < \frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

si ottengono le curve di Engel date dalle equazioni

$$(24) \quad p_1 x_1 = p_2 x_2 .$$

Ne consegue che anche in questo caso è possibile che si presentino dei fenomeni di instabilità, quando i parametri da cui dipende il vincolo entrino nell'intervallo che potremmo dire *critico*, dato dalle (22).

B2 Instabilità strutturali in modelli dinamici di ottimizzazione.

È noto che lo schema dell'ottimizzazione può essere accompagnato ad una descrizione dinamica dell'evoluzione di un sistema economico. Per fissare le idee e analizzare nei particolari il fenomeno possiamo cercare di ricordare la schematizzazione classica del problema della produzione di un bene, la cui quantità viene indicata con y , con l'utilizzazione di n fattori produttivi, le cui quantità sono indicate con z_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Supponiamo che si possa dare una *funzione di produzione* (1) $y = f(z)$, con (2) $z_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Supponiamo anche che la funzione f , nell'insieme definito dalle (2), abbia classe di differenziabilità C^k , $k \geq 3$. Supponiamo infine che siano noti tutti i prezzi dei fattori produttivi, dati dai numeri (3) v_1, v_2, \dots, v_n ; (4) $v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, e supponiamo che i prezzi (3), così come il prezzo p del bene prodotto, siano dei dati esogeni al sistema considerato.

Consideriamo un isoquanto (5) $y = y^*$, e sia (6) $g(y, z) = py - \sum_1^n v_i z_i$ la funzione del profitto. Adottando anche qui la convenzione già adottata (cfr. B1) parleremo di punto z per indicare la n -pla di valori (7) $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Supponiamo che esista sull'isoquanto (5) un punto z^* che fa assumere il valore massimo alla funzione (6) e quindi un valore minimo alla funzione dei costi (8) $c(z) = \sum_1^n v_i z_i$.

L'ipotesi che viene comunemente accettata per spiegare il comportamento del sistema economico che stiamo analizzando è quella che porta a dire in modo molto generico che il sistema *tende* a portarsi nel punto z^* di massimo della funzione (9) $g(y^*, z)$, e ciò, beninteso, quando siano valide tutte le ipotesi fatte ed in particolare quando il sistema si trovi sull'isoquanto (5) e quando i prezzi del prodotto e dei fattori produttivi siano dei dati esogeni al sistema.

Ovviamente nell'accezione presente ciò che indichiamo qui con il termine *sistema* può essere un sistema economico nel senso abituale, come un produttore singolo, che abbia un comportamento atomico, che sia cioè tale che il suo comportamento non influisca sui prezzi dei prodotti e dei fattori produttivi; la trattazione che qui diamo del fenomeno non dipende dalla concreta realizzazione del sistema che stiamo considerando. Riprendendo il discorso, potremo dire che la tendenza del sistema a portarsi nel punto z_0 dell'isoquanto, partendo da un punto z diverso da z^* , può essere descritta in molti modi. Restano quindi aperte diverse strade per poter descrivere il comportamento del sistema nel tempo in modo da poter avvicinarsi soddisfacentemente alla realtà. L'ipotesi che sembra più ragionevole è quella che porta a scrivere l'equazione

$$(10) \dot{g}(y, z) = \Phi(g(y^*, z^*) - g(y^*, z)),$$

dove il punto sovrapposto al simbolo di funzione indica la derivata della funzione stessa in rapporto alla variabile tempo, che in questa sezione viene supposta essere una variabile continua, che può assumere ogni valore nel campo reale \mathcal{R} . Indichiamo brevemente con Δg la differenza che è argomento del secondo membro della (10), ponendo quindi

$$(11) \Delta g = g(y^*, z^*) - g(y^*, z).$$

Per la funzione Φ possono essere espresse diverse ipotesi, ognuna delle quali traduce una determinata maniera di intendere la *tendenza* del sistema al punto di equilibrio. Anzitutto è chiaro che si deve avere

$$(12) \Delta g = 0 \Rightarrow \Phi(\Delta g) = 0.$$

Questa condizione implica che il punto z^* sia di equilibrio effettivo e che quindi il sistema non si muova quando lo abbia raggiunto. È poi naturale supporre che sia valida una relazione come la seguente:

$$(13) \exists k \{ |k| > 0, 0 < \Delta g < k \Rightarrow \Phi(\Delta g) > 0 \}.$$

L'ipotesi (13) è chiaramente verificata quando la funzione Φ ammetta una rappresentazione in forma di Mc Laurin, il che è ben facilmente accettabile. Tuttavia occorre rilevare che sarebbe troppo rudimentale il supporre che la funzione Φ sia sempre positiva, quale che sia il valore di Δg ; ciò equivarrebbe a supporre che Φ sia lineare, il che è ovviamente limitativo. È invece molto ragionevole supporre che la funzione cambi di segno per valori abbastanza grandi di Δg , valori che sono assunti ad esempio quando si abbia $g(y^*, z) < 0$. È naturale infatti pensare che in corrispondenza a profitti negativi si manifesti chiaramente una instabilità del sistema, cioè un'incapacità del modello di rendere la realtà della situazione economica. Potremmo quindi enunciare, oltre alle due ipotesi precedenti (12) e (13) anche la seguente:

$$(14) \exists k^* \{ \Delta g > k^* \Rightarrow \Phi(\Delta g) < 0 \}.$$

Questa ipotesi comporta che quando i profitti siano lontani dal massimo, il sistema sia tale da allontanarsi dal massimo e quindi entri in uno stato di instabilità; questa è tuttavia del tutto relativa e dice semplicemente che il modello non rende più in questa circostanza la realtà economica. È infatti abbastanza accettabile il pensare che se il sistema è formato da un unico imprenditore, questo esca dall'attività produttiva quando i profitti siano molto negativi; quando il sistema è più complesso, è naturale pensare che vengano cercati altri assetti, diversi da quelli che si è cercato di descrivere con il modello.

OSSERVAZIONE 1. La (10) è un'equazione differenziale lineare nelle derivate \dot{z}_i delle coordinate z_i rispetto al tempo, del tipo

$$(10)\text{bis} \sum_1^n \dot{z}_i \frac{\partial g}{\partial z_i} = \Phi ;$$

essa non è tuttavia sufficiente per determinare completamente il fenomeno dinamico che porta il sistema dalla situazione di partenza z_0 , diversa dal punto di equilibrio, a quest'ultimo. Pertanto, in linea di principio, possono essere aggiunte alla (10) altre m equazioni differenziali

$$(15) \Phi_j(z, \dot{z}, y^*, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad m \leq n - 1,$$

che traducono le varie ipotesi che possono essere assunte a proposito dell'evoluzione del sistema verso il punto di equilibrio. Nelle sezioni seguenti analizzeremo qualcuna tra le varie ipotesi possibili e faremo qualche osservazione in proposito.

B3 Ipotesi di evoluzione dinamica di un sistema produttivo.

L'ipotesi più immediata e naturale che può essere espressa è quella che porta a pensare che l'evoluzione del sistema produttivo nella direzione del massimo profitto si svolga secondo una legge che potremmo chiamare la *legge della direttissima*. Scriveremo questa legge servendoci sostanzialmente di considerazioni geometriche, che rendono i ragionamenti più vicini all'intuizione spaziale.

Sia \bar{z} un punto dell'isoquante B2 (5), che sia abbastanza vicino al punto di equilibrio z^* , in modo che ivi sia $\dot{g}(\bar{z}) > 0$ (si vedano le considerazioni svolte nella sezione precedente). Nel punto \bar{z} esistono due vettori (1) $grad\ g, grad\ f$, che non sono paralleli fra loro; invero il parallelismo (per noti sviluppi della teoria di Lagrange) si ha soltanto nel punto di massimo z^* . Pertanto vi è luogo a considerare in \bar{z} il vettore u , proiezione ortogonale del vettore $grad\ g$ sull'iperpiano tangente all'isoquante in \bar{z} . Il vettore u quindi può essere espresso nella forma

$$(2) u = grad\ g + \lambda grad\ f,$$

essendo λ una funzione di z che deve soddisfare alla condizione

$$(3) u \times grad\ f = 0;$$

da cui si deduce l'espressione della funzione λ :

$$(4) \lambda = -(grad\ g \times grad\ f) / |grad\ f|^2.$$

L'ipotesi della direttissima porta dunque a scrivere che l'evoluzione nel tempo del sistema avviene secondo la legge

$$(5) \dot{z} = \mu u,$$

dove u è il vettore ora definito e la funzione μ può essere calcolata in modo univoco, imponendo che \dot{z} dato dalla (5) soddisfi all'equazione fondamentale B2 (10); pertanto che si abbia

$$(6) grad\ g \times \dot{z} = \Phi.$$

Come già detto, la scelta delle equazioni (5) per descrivere completamente l'evoluzione del sistema dinamico traduce soltanto una delle tante possibili ipotesi che si possono formulare; si potrebbe dire che la legge della direttissima è abbastanza lontana dalla realtà che si osserva. In generale invece il fenomeno di evoluzione sarà retto da un sistema di equazioni differenziali del primo ordine del tipo B2(15), che qui riscriviamo per comodità del lettore:

$$(7) \Phi_j(z, \dot{z}, y^*, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad m \leq n - 1.$$

D'ora innanzi riterremo valida l'ipotesi semplificativa fondamentale che le equazioni (7) siano lineari nelle componenti \dot{z}_i del vettore \dot{z} . Anche in questo caso, abbastanza semplice, vi sono da considerare due sottocasi fondamentali, che conducono a fenomeni radicalmente diversi fra loro: precisamente, nell'ipotesi posta della linearità delle equazioni (7), può essere che: 1) le equazioni (7) rappresentino dei vincoli olonomi per il sistema; oppure 2) le equazioni (7) rappresentino dei vincoli anolonomi per il sistema.

Nel caso 1) ognuna delle equazioni differenziali (7) può ritenersi ottenuta derivando rispetto al tempo relazioni in termini finiti (cioè non coinvolgenti delle derivate) che legano le coordinate z del punto. Pertanto il sistema di equazioni (7) è in questo caso equivalente ad un sistema di equazioni in cui non compaiono più delle derivate rispetto al tempo, del tipo

$$(8) z_j(z, y^*, t, k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

in cui k rappresenta un vettore di costanti che potrebbero essere chiamate *costanti di integrazione* del sistema (7). Ovviamente la possibilità di sostituire le equazioni (7) con equazioni (8) che non coinvolgono delle derivate comporta come conseguenza che la ricerca della situazione ottimale per il profitto non porta in generale al punto z^* ; si ricade quindi nei problemi classici detti di *second best* che sono stati diffusamente trattati nella letteratura anche recentemente. Invero le condizioni (8) portano a diminuire effettivamente la dimensione dell'insieme di punti in cui il massimo può essere cercato e quindi a limitare la libertà di scelta del punto z^* , che non può essere scelto liberamente sull'isoquanto, almeno in generale.

Nel caso 2), che si manifesta quando anche una sola tra le due equazioni (7) non è completamente integrabile, cioè quando il sistema (7) non si può pensare ottenuto derivando rispetto al tempo equazioni del tipo delle (8), le equazioni (7) rappresentano ciò che la meccanica razionale chiama dei *vincoli di mobilità pura*; in altre parole esse non restringono la dimensione dell'insieme nel quale il punto z^* può essere scelto, ma limitano effettivamente la mobilità di z^* , proibendo certe traiettorie che non soddisfano alle equazioni stesse. Quindi il punto z^* di massimo del profitto potrebbe essere raggiunto in queste condizioni, ma non per una strada qualunque. Le considerazioni su casi analoghi relativi alla teoria delle scelte del consumatore (che svolgeremo nella sezione B4) portano a concludere che in questo caso si manifestano nel sistema delle forze che traducono delle scelte essenzialmente non coerenti. Questa possibilità non è da ripudiare a priori, ma dovrebbe invece essere tenuta in considerazione per cercare di dare una rappresentazione della realtà economica che meno si discosti da ciò che veramente avviene.

B4 Nota sulla coerenza delle scelte e sulla anolonomia delle equazioni differenziali.

La presente breve digressione è destinata a mettere in luce le relazioni esistenti tra la coerenza delle scelte economiche e l'olonomia di certe equazioni differenziali, in modo da illustrare quanto è stato detto nella sezione precedente a proposito delle equazioni anolonime di evoluzione. Per semplicità faremo riferimento al caso statico ed alla teoria della scelta del consumatore, ma è del tutto chiaro che questi contenuti serviranno soltanto per appoggiare il discorso, il quale ha una validità generale, dipendente soltanto dalla struttura formale delle leggi matematiche implicate e sdai significasti che a queste vengono attribuiti.

Riferendoci a quanto è stato detto nella sezione B1 a proposito della teoria classica della scelta del consumatore, supponiamo che esista un indicatore ordinale paretiano di utilità, $u : X \rightarrow \mathcal{R}$, che sia diclsse di differenziabilità \mathcal{C}^k , $k \geq 3$.

Come è noto, l'esistenza di questo indicatore introduce nell'insieme dei vettori $x \in X$ un ordinamento totale. Precisamente, presi dei vettori qualsivogliano $x, x', x'' \in X$, quando è $u(x') = u(x)$ le due situazioni di consumo date dai vettori x e x' sono indifferenti per il consumatore. Quando si ha invece $u(x) > u(x')$ la situazione data da x è preferita rispetto a quella data da x' . Si ha quindi che, se $u(x) > u(x')$ ed anche $u(x') > u(x'')$, è anche $u(x) > u(x'')$. Pertanto se una situazione caratterizzata dal vettore x è preferita a quella caratterizzata dal vettore x' , e questa a sua volta è preferita a quella caratterizzata da x'' , allora anche quella caratterizzata dal vettore x è preferita a quella caratterizzata da x'' . Si suole esprimere questo fatto dicendo che il consumatore è *coerente* nelle sue preferenze.

Possiamo quindi concludere che l'esistenza di un indicatore paretiano ordinale di utilità porta come conseguenza la coerenza del consumatore.

Ora l'esistenza di un indicatore u di utilità, soddisfacente alle condizioni richieste, porta anche alla possibilità di soluzione del problema del massimo di u condizionato alla relazione di bilancio

$$(1) \sum_1^n p_i x_i = r.$$

Il noto metodo di Lagrange conduce a scrivere che nel vettore che fornisce il massimo sono valide le relazioni

$$(2) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e quindi conduce anche ad affermare l'esistenza di certe funzioni di domanda

$$(3) x_i = f_i(p, r), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

che forniscono le coordinate del punto soluzione del problema di massimo, e quindi soddisfano identicamente alla (1). Possiamo quindi considerare r e le componenti del vettore dei prezzi come variabili indipendenti, legate dalla (1) tramite le (3). Derivando la (1) rispetto alle variabili si hanno le equazioni

$$(4) x_i + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} = 0, \quad (5) \sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial r} = 1,$$

e differenziando le (3) si ha

$$(6) dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial x_i}{\partial r} dr.$$

D'altra parte la differenziazione della funzione u porta a scrivere

$$(7) du = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i,$$

e sostituendo per le (6)

$$(8) du = \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial x_i}{\partial r} dr \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_k} \right) dp_k + \left(\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial r} \right) dr.$$

Di qui, sostituendo per le (2) e tenendo conto di (4) e (5) si ottiene brevemente

$$(9) \frac{\partial u}{\partial p_k} = -\lambda x_k, \quad (10) \frac{\partial u}{\partial r} = \lambda \frac{\partial x_i}{\partial r}.$$

Ora l'esistenza della funzione u , con le ipotesi enunciate, porta a scrivere le condizioni

$$(10) \frac{\partial^2 u}{\partial p_i \partial p_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial p_k \partial p_i} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p_i \partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial p_i},$$

ed eseguendo le operazioni sulle (9) e (10) si ottiene

$$(11) \frac{\partial \lambda}{\partial p_k} + x_k \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \lambda \frac{\partial x_k}{\partial r} = 0,$$

ed anche

$$(12) \frac{\partial}{\partial p_i} (\lambda x_k) = \frac{\partial}{\partial p_k} (\lambda x_i).$$

Dalla (12), tenendo conto della (11), si ottengono le note relazioni di Slutsky

$$(13) \frac{\partial x_k}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_k}{\partial r} = \frac{\partial x_i}{\partial p_k} + x_k \frac{\partial x_i}{\partial r}.$$

Queste sono dunque conseguenza necessaria dell'esistenza dell'indicatore paretiano di utilità e quindi anche della coerenza delle scelte del consumatore.

La cosa più interessante è che le (13) sono condizione non soltanto necessaria, ma anche sufficiente per l'esistenza dell'indicatore paretiano e quindi anche per la coerenza delle scelte del consumatore. Per dimostrare ciò, consideriamo la forma pfaffiana

$$(14) \quad \Omega = \sum_i p_i dx_i,$$

dove le x_i sono considerate date dalle (3) e le variabili p_i, r sono legate dalla (1). In forza delle (2) la forma Ω è completamente integrabile, cioè l'equazione differenziale pfaffiana

$$(14)\text{bis} \quad \Omega = 0$$

è olonoma, se e solo se esiste una funzione indicatore paretiano di utilità, e quindi se e solo se le scelte del consumatore sono coerenti.

Ora per le (4), (5), (6) si può scrivere

$$(15) \quad \Omega = -\sum_k x_k dp_k + dr,$$

ed il calcolo del differenziale esterno $d\Omega$ della forma Ω porta a scrivere:

$$(16) \quad d\Omega = -\sum_k dx_k \wedge dp_k = -\sum_{i,k} \frac{\partial x_k}{\partial p_i} dp_i \wedge dp_k + \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial r} dp_k \wedge dr.$$

In base a noti risultati la forma differenziale è completamente integrabile se e solo se esiste una forma lineare α data da

$$(17) \quad \alpha = \sum_i a_i \wedge dp_i + b dr,$$

tale che si abbia

$$(18) \quad d\Omega = \Omega \wedge \alpha.$$

Ora vale

$$(19) \quad \Omega \wedge \alpha = (-\sum_k x_k dp_k + dr) \wedge (\sum_i a_i dp_i + b dr) = \sum_{i,k} a_i x_k dp_i \wedge dp_k - b \sum_k x_k dp_k \wedge dr - \sum_k a_k dp_k \wedge dr.$$

L'identificazione richiesta dalla (18) porta quindi a scrivere:

$$(20) \quad -\frac{\partial x_i}{\partial p_k} = a_i x_k, \quad (21) \quad \frac{\partial x_k}{\partial r} = -a_k - b x_k;$$

e, cambiando l'indice nella (21), si ottiene:

$$(21)\text{bis} \quad \frac{\partial x_i}{\partial r} = -a_i - b x_i,$$

da cui

$$(22) \quad \frac{\partial x_i}{\partial r} - \frac{\partial x_k}{\partial p_i} = -b x_i x_k,$$

e infine, per la simmetria del secondo membro rispetto agli indici i e k , si ottengono le relazioni di Slutsky.

In base al ragionamento svolto queste sono dunque anche sufficienti perché esista un indicatore paretiano ordinale di utilità; e questa esistenza, in base a ciò che è stato detto, è equivalente alla olonomia dell'equazione differenziale (14)bis. Pertanto è lecito concludere *a contrariis* che la non olonomia dell'equazione (14)bis conduce all'incoerenza delle scelte del consumatore. È del tutto ovvio, come abbiamo detto, che la validità di ciò che è stato osservato ora non si restringe al caso del consumatore, ma si estende anche al caso in cui le forme differenziali di cui si parla riguardino anche delle scelte che conducono a delle ricerche di massimo in altri campi, come per esempio nella teoria della produzione.

B5 Termini dispersivi e funzioni di utilità globale del sistema dinamico

Ritorniamo alla linea del ragionamento dopo la breve digressione relativa al significato della anolonomia delle equazioni differenziali. Supponiamo che esista una traiettoria temporale del sistema economico retto dalle equazioni B2(10bis, 11) e che questa traiettoria sia data da certe funzioni del tempo e del punto iniziale

$$(1) z_i = f_i(z_0, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Supponiamo che il sistema arrivi al massimo z^* in un tempo finito T (sia questo massimo z^* il punto di massimo del profitto oppure il *second best* richiesto dalle equazioni aggiuntive). Si abbia quindi

$$(2) f_i(z_0, 0) = z_{0i} \quad ; \quad f_i(z_0, T) = z_i^* .$$

Possiamo prendere in considerazione una funzione di bilancio $\Gamma(t)$, che sarà data per ogni t nell'intervallo (3) $0 \leq t \leq T$ dall'espressione

$$(4) \Gamma(t) = \int_0^t (\dot{g}(f_i) \cdot \exp(-\rho u)) du - \int_0^t (\sum_i E_i(z_0, f_i, \dot{f}_i) \cdot \dot{f}_i) du .$$

Nell'espressione (4) si possono distinguere due termini: il termine

$$(5) \int_0^t (\dot{g}(f_i) \cdot \exp(-\rho u)) du$$

rappresenta la somma temporale, scontata con un fattore di sconto continuo $\rho \geq 0$, degli incrementi di profitto che conseguono all'evoluzione dall'istante 0 iniziale all'istante t ; il termine

$$(6) \int_0^t (\sum_i E_i(z_0, f_i, \dot{f}_i) \cdot \dot{f}_i) du$$

potrebbe essere chiamato *costo dinamico di riconversione*, e rappresenta la somma della dispersione di ricchezza che consegue alle diseconomie dovute all'evoluzione del sistema durante il fenomeno; la funzione integranda

$$(7) \sum_i E_i(z_0, f_i, \dot{f}_i) \cdot \dot{f}_i$$

è essenzialmente positiva; essa potrebbe per esempio essere espressa mediante una forma quadratica definita positiva nelle variabili \dot{f}_i . Ovviamente le decisioni di variazione di situazione del sistema, con obbedienza alle leggi differenziali che sono state presentate ed analizzate, in linea di massima sono prese in base ai valori di una funzione di utilità dinamica

$$(8) U = u(\Gamma(t)).$$

Non pare irragionevole pensare che la situazione del sistema rimanga ferma se è:

$$(9) U(T) < 0.$$

Ma è pensabile che, anche se l'ipotesi (9) non è soddisfatta e quindi il bilancio economico dinamico dato dalla (4) porta ad un valore positivo della funzione di utilità, calcolata su tutto il processo di evoluzione, si possano avere degli intervalli contenuti nell'intervallo (3) in corrispondenza ai quali si ha un'utilità negativa. Ciò comporterebbe un rallentamento o addirittura un blocco del processo di evoluzione e darebbe quindi l'occasione per un fenomeno di instabilità strutturale del sistema.

B6 Esempio elementare

Si consideri un sistema di produzione in cui un certo bene viene prodotto in quantità y mediante l'impiego di due fattori, di quantità z_1, z_2 , con una funzione di produzione del tipo classico di Cobb-Douglas-Wicksell:

$$(1) y = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \quad , \quad z_1, z_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

La funzione dei costi è data da

$$(2) c = p_1 z_1 + p_2 z_2 \quad , \quad p_1, p_2 > 0.$$

Sull'isoquanto (3) $y = y^*$ si ha il minimo teorico della funzione dei costi (e quindi il massimo teorico della funzione del profitto), in corrispondenza ai valori

$$(4) z_1^* = y^* \alpha_1^{1-\alpha_1} \alpha_2^{-\alpha_2} p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} \quad , \quad z_2^* = y^* \alpha_1^{-\alpha_1} \alpha_2^{1-\alpha_2} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2-1}.$$

Consideriamo il punto z_0 di partenza, di coordinate z_{01}, z_{02} , e poniamo

$$(5) c_0 = p_1 z_{01} + p_2 z_{02}.$$

Si può ammettere che l'evoluzione del sistema tenda ad avvenire secondo l'equazione

$$(6) \dot{c} = \Phi(c^* - c),$$

e dovendosi avere

$$(7) \Phi(0) = 0, \text{ e } (8) \Phi(\Delta c) < 0 \Leftrightarrow \Delta c > 0.$$

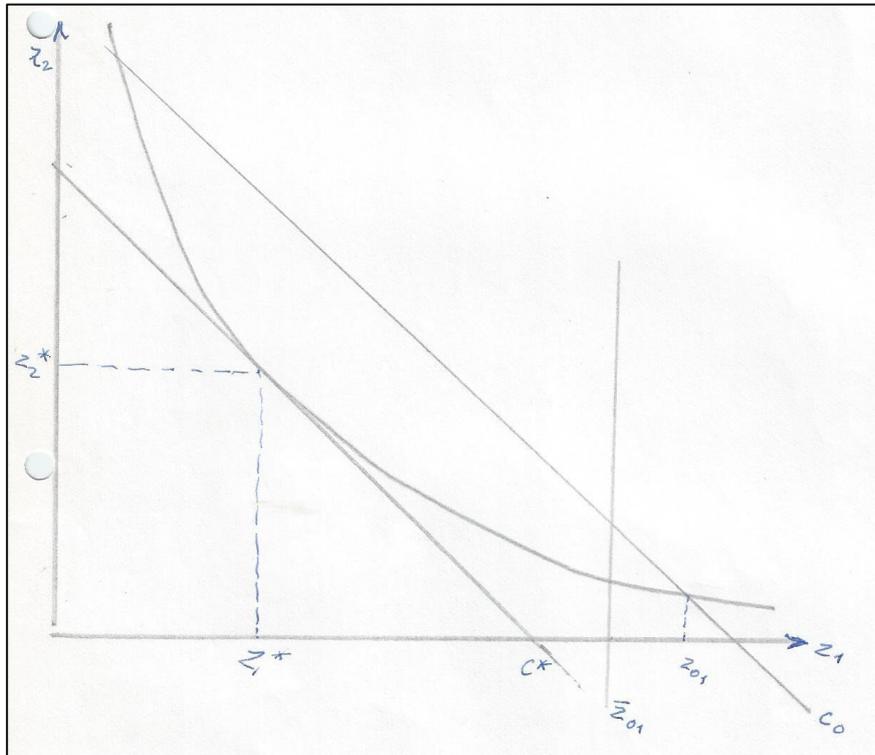


Figura 6

(Si noti che in questo caso la formulazione è diversa da quella data in B2(13) perché qui si tratta di costi, mentre là si trattava di profitti).

Ovviamente la (6) è sufficiente in questo caso per assegnare l'evoluzione temporale del sistema lungo l'isoquante (3), quando sia data la posizione z_0 di partenza. È tuttavia da osservare che molto probabilmente il fenomeno non è completamente spiegato dalla sola equazione differenziale (6). A convincersi di questo saranno sufficienti poche considerazioni di statica comparata ed altre relative alla formulazione della funzione dei costi dinamici di riconversione in questo caso. Invero per quanto riguarda le considerazioni di statica comparata, non è affatto detto che il massimo della funzione di utilità del sistema coincida con

il massimo del profitto, cioè con il minimo dei costi. Per renderci conto della possibilità di questo fenomeno, supponiamo nel nostro sistema l'esistenza di forze che si oppongono alla libera evoluzione. Il caso abbastanza comune è che esistano delle forze che impongono la limitazione

$$(9) 1 \geq \bar{z}_1 > z^*$$

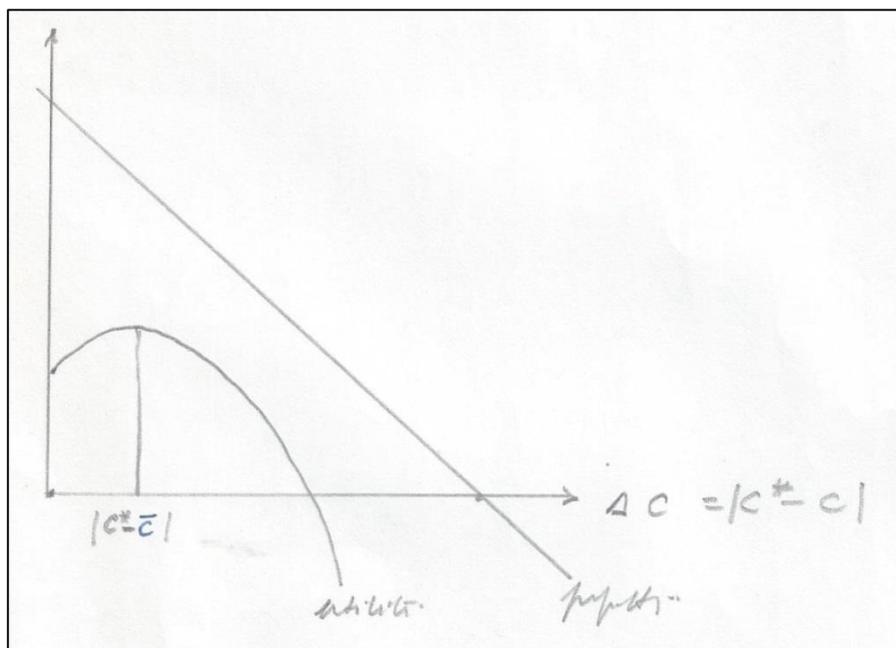


Figura 7

Per esempio, quando i fattori produttivi abbiano l'interpretazione abituale di lavoro e capitale, si può pensare che nel sistema vengano imposti dei vincoli che impediscono in qualche modo che l'impiego di lavoro venga effettuato al di sotto del livello \bar{z}_1 . Ne consegue che il sistema *si ferma* nella sua evoluzione al livello \bar{z}_1 , e che quindi il valore $|c^* - \bar{c}|$ rappresenta quello effettivamente scelto dal sistema e corrisponde al massimo della vera funzione di utilità, quella in base alla quale vengono fatte le scelte.

Ma appunto nella logica di questa osservazione può anche avvenire che l'utilità diventi negativa per valori di $|c^* - \bar{c}|$ minori di quello che rende effettivamente negativo il profitto; pertanto si ha un collasso del sistema prima che il modello puramente lineare della massimizzazione del profitto possa inquadrare il fenomeno. Il sistema presenta pertanto un'instabilità strutturale nel senso generico che abbiamo convenuto di dare a questa espressione.

Lasciando le considerazioni di statica comparata e cercando di analizzare la situazione dinamica, osserviamo che in questo caso l'analisi del fenomeno dei costi dinamici di riconversione può essere più semplice di quella che è stata fatta nella sezione B5 nel caso generale. Invero, dando ancora alla funzione di produzione il significato abituale e quindi al fattore z_2 il significato di capitale, appare ragionevole pensare ad un fenomeno di isteresi dei costi di investimento, che porta a delle dispersioni di ricchezza e quindi a dei costi dinamici

che possono provocare instabilità strutturale. Il fenomeno potrebbe essere schematizzato in forma qualitativa, ma non del tutto priva di realismo, nella figura seguente: portati in ascisse i livelli di investimento e in ordinate i costi per l'accrescimento unitario di investimento, misurati da una funzione positiva $f(i)$, si considerano due livelli di investimento, i_1 , i_2 , $i_2 > i_1$. Il costo globale dell'accrescimento da i_1 a i_2 è dato, in base al significato dei simboli, da (10) $\int_{i_1}^{i_2} f(i) di$, che rappresenta l'area compresa fra l'asse delle ascisse e la curva ABC (figura 8).

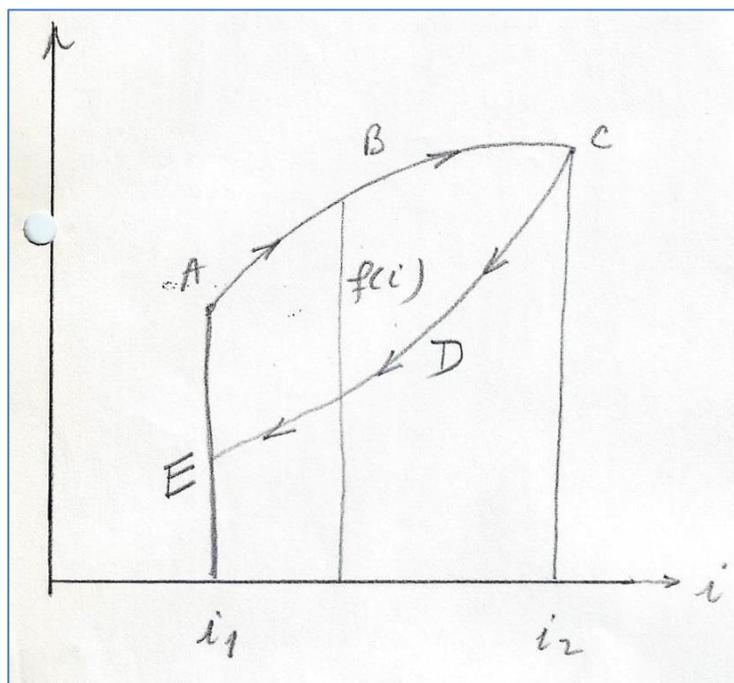


Figura 8

Ma se avvenisse un'evoluzione che riporta gli investimenti al livello iniziale con un ciclo (11) $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_1$, non è affatto detto che la curva dei recuperi CDE sia sovrapposta alla precedente, e che il punto finale E coincida con il punto di partenza A : in generale ci saranno delle dispersioni e delle perdite che sono misurate dall'area compresa fra le due curve ABC e CDE . Queste perdite possono dar luogo a distorsioni del fenomeno di evoluzione e quindi influire sulla funzione di utilità che stabilisce le scelte del sistema.

C) Instabilità strutturale in modelli economici di controllo ottimale.

La complessità dei fenomeni economici rispetto ad altri che sono studiati da altre scienze fa sì che sia opportuno disporre di una vasta gamma di strumenti matematici per poter rendere in modo di volta in volta più efficace gli aspetti che si vogliono mettere in luce della realtà economica. In questo ordine di idee si può pensare che i modelli di controllo ottimale offrono uno strumento abbastanza ricco per poter dominare molti aspetti dell'economia che sfuggono ai modelli puramente descrittivi oppure ai modelli dinamici che trattano di problemi di ottimalizzazione in senso classico. Come vedremo subito, i modelli di controllo ottimale possono adattarsi ai problemi dinamici, assumendo come obiettivo l'ottimizzazione degli integrali di certe funzioni lungo un periodo di tempo; pertanto è possibile con questi strumenti studiare dei problemi di ottimizzazione delle scelte di programmazione economica, che risulterebbero inaccessibili ai mezzi dell'analisi matematica classica.

C1. Elementi sulla teoria del controllo ottimale

I casi che vorremmo esaminare sono a qualche titolo forse più interessanti di quelli che abbiamo esaminato finora. Invero la teoria del controllo ottimale può essere considerata molto suggestiva, perché permette di inquadrare in modo molto efficace i fenomeni dell'evoluzione temporale e di ricerca di obiettivi ottimali; essa pertanto permette una spiegazione, per quanto possibile, in termini quantitativi e formali, della condotta economica, e permette inoltre di rappresentare e spesso anche risolvere in modo rigoroso i problemi di programmazione.

Daremo qui di seguito qualche nozione su questa teoria, rimandando per maggiori particolari e specificamente per i problemi strettamente matematici ai trattati specializzati della materia. Il nostro intento principale qui è quello di mettere in evidenza il fatto che anche con l'utilizzazione di questi moderni metodi di indagine si possano mettere in evidenza e analizzare dei fenomeni di instabilità strutturale nei sistemi economici, che sono causati dalla logica interna dei sistemi stessi e dei fini che gli uomini si prefiggono.

Indicheremo con V^n uno spazio vettoriale n –dimensionale; sia poi N l'insieme dei primi n interi naturali: (1) $N = \{1, 2, \dots, n\}$. I vettori di V^n saranno sempre supposti a componenti reali; pertanto porremo

$$(2) x = [x_1, x_2, \dots, x_n], \text{ con } (3) x_i \in \mathcal{R}, \forall i \in N.$$

Nello spazio vettoriale V^n supporremo valida la topologia indotta dall'ordinaria distanza euclidea (topologia ordinaria). Lo spazio V^n sarà chiamato convenzionalmente nel seguito *spazio delle fasi*. Sia poi un secondo spazio vettoriale m –dimensionale V^m ; indicato con u un vettore di V^m , supporremo ancora che le componenti di u siano numeri reali, e doteremo V^m della topologia ordinaria; chiameremo convenzionalmente questo secondo spazio *spazio dei controlli*.

Indicheremo con \mathcal{R}^+ l'insieme dei numeri reali non negativi, dunque: (4) $\mathcal{R}^+ = \{t \mid t \geq 0\}$.

Indichiamo poi con X e con U due sottinsiemi rispettivamente dello spazio delle fasi e dello spazio dei controlli, quindi (5) $X \subseteq V^n$; $U \subseteq V^m$, e sia f una funzione da $X \times U \times \mathcal{R}^+$, avente valori in V^n :

$$(6) f : X \times U \times \mathcal{R}^+ \rightarrow V^n.$$

Supporremo che f sia una funzione avente classe di differenziabilità almeno 2, escluso al più un sottinsieme di misura di Lebesgue nulla dell'insieme $X \times U \times \mathcal{R}^+$.

Fissiamo ora una funzione $u: \mathcal{R}^+ \rightarrow U$, funzione della variabile reale $t \in \mathcal{R}^+$ a valori in U . Supporremo che tale funzione sia di classe di differenziabilità almeno 2 in \mathcal{R}^+ , escluso al più un numero finito di valori t , nei quali possa presentare una discontinuità ordinaria, cioè possa avere limite destro e sinistro diversi fra loro.

Si consideri l'equazione differenziale vettoriale

$$(7) \dot{x} = f(x, u, t); x \in X; u \in U, t \in \mathcal{R}^+.$$

Come è noto, questo simbolo rappresenta un insieme di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$(7) \text{ bis } \dot{x}_i = f_i(x, u, t), i \in N, x \in X, u \in U, t \in \mathcal{R}^+.$$

Fissata che sia la funzione $u = u(t)$, nelle ipotesi ammesse la (7) determina una famiglia di traiettorie nello spazio di fase. Il problema ordinario elementare della teoria del controllo ottimale viene enunciato abitualmente nel modo seguente. Si fissi una funzione:

$$(8) f_0: X \times U \times \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R},$$

che verrà chiamata spesso *funzione obiettivo*. Su di essa faremo l'ipotesi che sia di classe di differenziabilità almeno 2, escluso al più un sottinsieme di misura di Lebesgue nulla dell'insieme $X \times U \times \mathcal{R}^+$. Scelto un valore $T > 0$ di \mathcal{R}^+ , si consideri l'integrale

$$(9) J = \int_0^T f_0(x, u, t) dt;$$

ovviamente il valore di J dipende dalla funzione obiettivo fissata e dalla scelta della funzione di controllo $u(t)$. Si tratta di scegliere $u(t)$ in modo che essa abbia le caratteristiche supposte e che l'integrale (9) abbia il valore massimo quando la traiettoria $x(t)$ nello spazio di fase abbia due estremi determinati: $x(0)$ e $x(T)$.

Il principio di massimo di Pontryagin porta a costruire la funzione di Hamilton:

$$(10) \mathcal{H} = f_0 + \sum_{k \in N} y_k f_k,$$

dove le variabili ausiliarie y_k , $k \in N$, soddisfano al sistema differenziale

$$(11) \dot{y}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k},$$

ed ovviamente si ha

$$(12) \dot{x}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_k}.$$

In relazione alla funzione \mathcal{H} , la funzione $u(t)$ deve essere scelta in modo che \mathcal{H} abbia, per ogni valore t nell'intervallo (13) $0 \leq t \leq T$, il valore massimo possibile.

Il significato delle componenti del vettore y appare evidente da considerazioni dimensionali, ed è determinato di volta in volta dal significato della funzione obiettivo f , come si deduce dalla (10). Omettiamo qui di dare una trattazione teorica generale, perché pensiamo che, ai fini di questo lavoro, sia più efficace l'analisi dei singoli casi caratteristici che presenteremo nel seguito. Ci limitiamo a ricordare che le condizioni determinanti la traiettoria nello spazio di fase possono essere ampiamente generalizzate rispetto a quelle qui presentate. Particolarmente significative per le applicazioni economiche sono le condizioni che sono dette *di trasversalità*, mediante le quali si esprime il fatto che il punto finale $x(T)$ della traiettoria nello spazio di fase appartiene ad una determinata ipersuperficie, di equazione (14) $F(x, t) = 0$, che eventualmente può essere variabile col tempo. Tale condizione viene espressa in modo

semplice con linguaggio geometrico dicendo che all'istante finale T il vettore y deve essere perpendicolare al piano tangente alla superficie alla quale appartiene il punto $x(T)$.

È facile generalizzare le condizioni ai casi in cui per esempio anche il punto iniziale debba appartenere ad una ipersuperficie dello spazio di fase; oppure al caso in cui il punto iniziale e finale della traiettoria debbano appartenere a certe varietà che sono definite come le intersezioni di più ipersuperfici dello spazio di fase. Non ci addentriamo nell'esposizione della teoria né delle sue applicazioni economiche, che si trovano ormai nei trattati classici. Ci interessa analizzare più da vicino il comportamento delle soluzioni dei problemi di ottimalità quando la struttura topologica degli spazi interessati, rispettivamente dello spazio di fase e dello spazio dei controlli, è tale da introdurre necessariamente delle discontinuità nelle traiettorie ottimali: invero può avvenire che tali discontinuità portino a dei fenomeni che possono essere interpretati come delle discontinuità strutturali, data la natura del problema che interessa.

Anzitutto per quanto riguarda lo spazio di fase, avviene molto di frequente che l'interpretazione economica del vettore x imponga che l'insieme X sia chiuso (rispetto alla topologia introdotta); il caso più frequente è dato per esempio dalla condizione che ogni componente del vettore x , dato dalla (2), debba essere non negativa: (15) $x_i \geq 0, \forall i \in N$.

L'insieme che così si ottiene è allora chiuso, anche se non compatto, e può avvenire che le traiettorie ottimali siano date da funzioni che sono bensì continue, ma con derivate non continue; dal punto di vista geometrico ciò potrebbe essere espresso dicendo che la traiettoria ottimale corre in parte nell'interno dell'insieme X e in parte sulla sua frontiera.

Queste considerazioni possono essere ripetute a maggior ragione quando l'insieme X sia dato come un insieme compatto; tale caso si verifica ad esempio quando esistono $2n$ numeri a_i, b_i soddisfacenti alle condizioni:

$$(16) 0 \leq a_i < b_i, i \in N, \text{ e } (17) a_i \leq x_i \leq b_i, \forall i \in N.$$

Un insieme X definito da condizioni di questo tipo si potrebbe avere ad esempio qualora si prendano in considerazione dei modelli di sviluppo nei quali occorra tener conto di limitazioni di risorse oppure di impianti.

Un secondo caso di instabilità strutturale si ha come conseguenza della struttura topologica dell'insieme dei controlli U . Invero il principio di massimo di Pontryagin richiede che la funzione $u(t)$ abbia dei punti di discontinuità, che introducono degli elementi di instabilità nelle soluzioni del problema di massimo.

Sarebbe troppo lungo analizzare partitamente e classificare i problemi che scaturiscono da queste condizioni, e riteniamo pertanto più utile analizzare alcuni esempi caratteristici che potrebbero essere giudicati eccessivamente schematici, ma che da una parte mettono bene in evidenza i fenomeni che stiamo considerando e d'altra parte sono facilmente generalizzabili.

Infine è appena necessario ricordare che le considerazioni che precedono sono state sviluppate sotto la tacita ipotesi che esista almeno una funzione vettoriale $u(t)$ capace di trasferire il sistema dallo stato iniziale alla situazione finale, sotto le condizioni di ottimalità prescritte. Ovviamente la non esistenza di una funzione cosiffatta potrebbe essere interpretata come l'esistenza di situazioni di *collasso* dei sistemi che vengono considerati.

C2. Un caso classico

Analizziamo anzitutto un caso classico e semplice, nel quale il metodo del controllo ottimale fornisce i risultati classici del calcolo delle variazioni: si tratta della ricerca delle geodetiche dello spazio euclideo n -dimensionale. In questo caso si ha $n = m$, e si può prendere in considerazione il fenomeno retto dalle equazioni differenziali:

$$(1) \dot{x}_i = u_i, \quad i \in N.$$

Scegliamo come funzione f_0 la seguente:

$$(2) f_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2},$$

e ricerchiamo il minimo dell'integrale

$$(3) \int_0^T f_0 dt.$$

Se assumiamo come insiemi X e U lo spazio V^n , le traiettorie appartengono per definizione ad insiemi aperti. La funzione \mathcal{H} di Hamilton viene data in questo caso dall'espressione

$$(4) \mathcal{H} = -\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} + \sum_{k=1}^n y_k u_k,$$

ed in conseguenza dell'ipotesi accettata per gli insiemi X e U , i valori massimi della funzione \mathcal{H} possono essere ricercati con la procedura classica, che conduce ad uguagliare a zero le derivate di \mathcal{H} rispetto alle variabili u_i . Si hanno quindi le condizioni necessarie espresse dalle equazioni:

$$(5) y_i = \frac{u_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^n u_k^2}}.$$

D'altra parte le equazioni differenziali del sistema canonico di Hamilton si riducono in questo caso alle

$$(6) \dot{y}_i = 0, \quad i \in N,$$

da cui si trae ovviamente

$$(7) y_i = \alpha_i \text{ (costante)}, \quad i \in N.$$

Dalle (5) si trae facilmente: (8) $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1$, ed anche: (9) $u_i = \rho \alpha_i$.

Dalle (1) si ha:

$$(10) x_i = \alpha_i \int \rho dt ;$$

ponendo ora:

$$(11) \int \rho dt = \tau + \beta, \quad (12) \beta \alpha_i = a_i,$$

si hanno per le funzioni x_i le espressioni esplicite

$$(13) x_i = \alpha_i \tau + a_i, \quad i \in N,$$

le quali traducono il risultato classico secondo cui le geodetiche dello spazio euclideo sono rette di questo spazio.

Il risultato non riveste alcun carattere di novità, ma vogliamo qui ricordare che esso è stato ottenuto sotto l'esplicita ipotesi che gli insiemi X e U coincidessero con lo spazio vettoriale n -dimensionale e quindi si potessero utilizzare i procedimenti classici per la ricerca dei valori massimi della funzione \mathcal{H} , considerata come funzione delle variabili u_i ; il che ha condotto alle condizioni (5) ed agli sviluppi conseguenti.

Gli esempi caratteristici che esamineremo in seguito confermeranno che, quando la natura topologica degli insiemi X e U non è quella che è stata supposta or ora, i procedimenti da seguire per la ricerca del valore massimo della funzione \mathcal{H} non possono essere quelli

tradizionali, e quindi il metodo del controllo ottimale dà luogo a fenomeni che possono portare a delle instabilità strutturali negli insiemi studiati.

C3... Modelli di applicazione del principio del controllo ottimale in Economia

Come abbiamo detto, presentiamo qui alcuni modelli di applicazione del principio del controllo ottimale in Economia, per dare un'idea della grande varietà di casi che possono presentarsi e della possibilità di insorgenza di instabilità strutturale, dovuta alla struttura topologica dello spazio dei controlli oppure dello spazio di fase. Il primo modello semplice di cui vogliamo analizzare il comportamento è quello ormai classico presentato da K. Shell. Per mantenere l'uniformità con le notazioni adottate, cambiamo i simboli della pubblicazione di Shell.

Consideriamo un sistema economico nel quale si dispone di una quantità di capitale pro capite indicata da x . La quantità x è considerata ovviamente come funzione del tempo, e stante il suo significato economico non può essere negativa. Si ha quindi, con le notazioni adottate nel paragrafo precedente,

$$(1) \quad n = 1; \quad X = \{x \mid x \geq 0\}.$$

Il prodotto globale pro capite del sistema è dato da una funzione $f(x)$ (che risulta in definitiva una funzione del tempo) del tipo

$$(2) \quad y(t) = f(x) \exp(\rho t),$$

dove ρ è una costante positiva (o nulla), con la quale si intende quantificare in qualche modo il progresso tecnologico, e $f: x \rightarrow \mathcal{R}$ è una funzione derivabile almeno due volte, che soddisfa alle condizioni

$$(3) \quad f(x) \geq 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0, \quad \forall x \in X;$$

$$(4) \quad f(0) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

Si indichi con u una variabile di controllo, che ha il significato economico di *propensione all'investimento*. Pertanto lo spazio dei controlli è unidimensionale e l'insieme U è dato da

$$(5) \quad U = \{u \mid 0 \leq u \leq 1\}, \text{ ed è chiaramente compatto.}$$

Si supponga che l'evoluzione della variabile x nel tempo sia data dall'equazione differenziale

$$(6) \quad \dot{x} = u f(x) \exp(\rho t) - \lambda x; \quad \lambda > 0$$

(essendo λ una costante positiva); si assuma come funzione obiettivo la funzione

$$(7) \quad (1 - u) f(x) \exp((\rho - \delta t)); \quad \delta > 0,$$

dove δ è una costante pure positiva che indica un tasso di sconto, e si cerchi di massimizzare l'integrale

$$(8) \quad J = \int_0^T (1 - u) f(x) \exp(-\delta t) dt.$$

La funzione di Hamilton in questo caso assume la semplice forma

$$(9) \quad \mathcal{H} = (1 - u) f(x) \exp((\rho - \delta) t) + y \exp(-\delta t) (u f(x) \exp(\rho t) - \lambda x),$$

dove, per semplificare i calcoli successivi, è stata introdotta la variabile $y \exp(-\delta t)$, al posto della variabile classica y . Dato il significato economico della funzione integranda (7), appare chiaro il significato della variabile ausiliaria y ; essa può venire interpretata come il prezzo della velocità di accrescimento della variabile x (velocità data dalla (6)), in termini della variabile $f(x)$ (prodotto globale).

Si assuma ora un livello finale ξ_T della variabile x , e si imponga che alla fine del periodo di tempo considerato, cioè all'istante T , la variabile x non sia inferiore a ξ_T . Si avrà quindi che il punto finale della traiettoria nello spazio di fase deve appartenere alla varietà data da

$$(10) \quad x(T) - \xi_T \geq 0,$$

e le condizioni di trasversalità comportano che si debba avere quindi:

$$(11) \quad \exp(-\rho T) x(T) (x(T) - \xi_T) = 0.$$

Le equazioni di Hamilton comportano che la variabile $y(t)$ debba soddisfare all'equazione differenziale

$$(12) \quad \dot{y} = (\delta + \lambda)y - (1 - u + yu)f'(x) \exp(\rho t).$$

Il principio di Pontryagin comporta che il valore del controllo $u(t)$ sia scelto in modo che \mathcal{H} abbia in ogni istante il suo valore massimo possibile. Ora la funzione \mathcal{H} , rispetto alla variabile u , è lineare, e poiché l'insieme U è compatto, il valore massimo viene assunto in generale alla frontiera dell'insieme stesso, escluso un caso particolare che analizzeremo subito.

Infatti il coefficiente della variabile u nell'espressione di \mathcal{H} è dato, a meno di un fattore essenzialmente positivo, da $(y - 1)$; quindi è possibile soddisfare al principio del massimo con un valore di u interno all'insieme U soltanto quando la variabile ausiliaria y abbia il valore 1; di conseguenza tale valore interno ad U può essere assunto costante nel tempo soltanto quando è $\dot{y} = 0$, e quindi quando è soddisfatta l'equazione

$$(13) \quad y = \gamma f'(x) \exp(\rho t) / (\delta + \lambda),$$

dove è stato posto

$$(14) \quad \gamma = \max (1 - u + yu) = \max(1, y).$$

La discussione dei vari casi che si possono presentare è riassunta nella figura 9, per il caso in cui è $\rho = 0$. I due valori indicati con x^* e con \tilde{x} sono definiti come radici delle equazioni

$$(15) \quad f'(x^*) = \delta + \lambda \quad ; \quad f(\tilde{x}) = \lambda \tilde{x}.$$

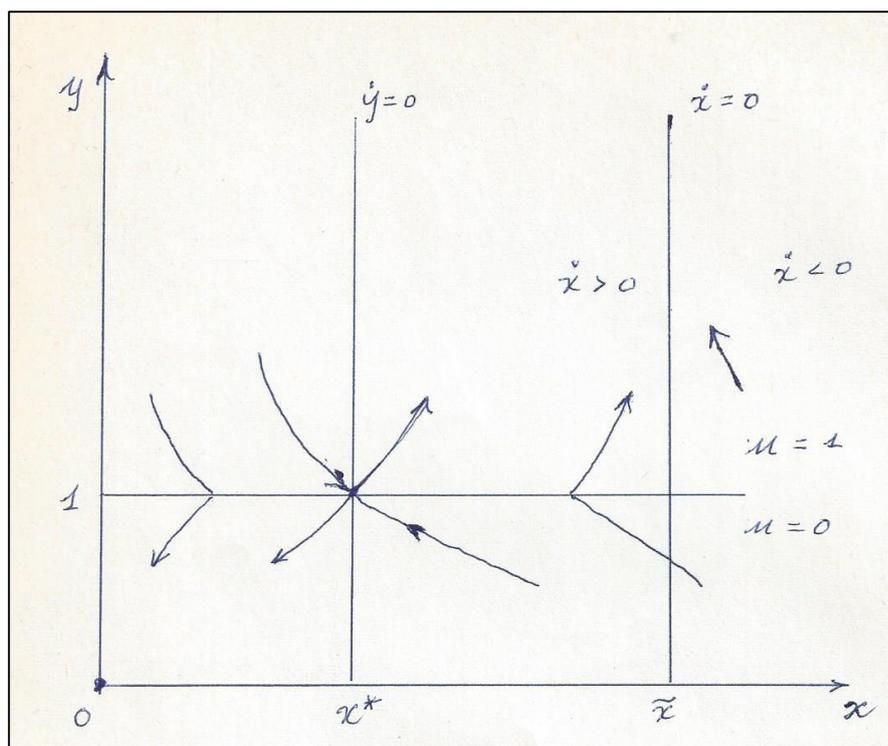


Figura 9. Andamento qualitativo

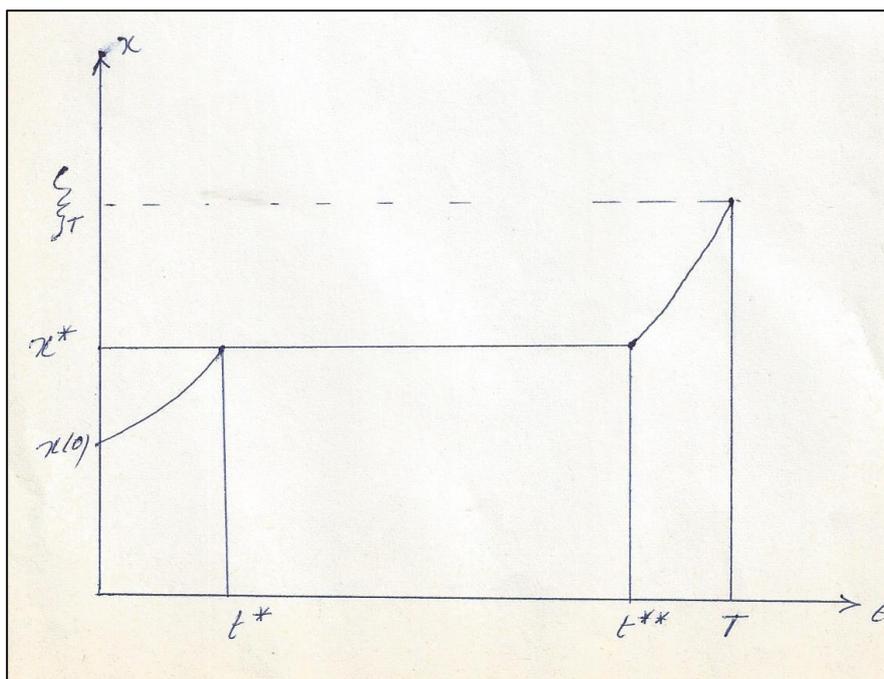


Figura 10

La figura 9 mostra chiaramente come esistano dei punti in cui l'evoluzione del fenomeno si arresta, e delle frontiere attraverso le quali esso cambia bruscamente di andamento.

Ma è anche possibile che si verifichi un andamento del tipo "dell'autostrada", purché i valori $x(0)$ e ξ_T siano tali da rendere possibile l'esistenza di due valori t^* e t^{**} del tempo che stanno nella relazione descritta in figura 10, che si ottengono come radici delle equazioni trascendenti che derivano dall'integrazione della (6) (nel caso in cui sia $\rho = 0$).

È da osservare tuttavia che i tratti di massima velocità di incremento di x corrispondono al valore $u = 1$, che danno quindi valore zero nell'integrando costituente la funzione obiettivo. Qualora tale integrando sia interpretato come *quantità consumata del prodotto globale* è chiaro che il cambiamento brusco della propensione al consumo venga considerato come un evento poco gradito ed accettabile dal sistema.

C4 Un esempio schematico

Analizzeremo ora un esempio schematico e astratto, nel quale sono presenti dei vincoli che rendono chiuso tanto l'insieme X che l'insieme U .

Sia dato un sistema economico che viene pensato suddiviso in due settori: il livello di attività di ciascuno di essi verrà indicato con i valori di due variabili che indicheremo con x_1 e x_2 . L'insieme X sia determinato dalle relazioni (fig. 11)

$$(1) \quad x_1 \geq a_1 > 0, \quad b_2 \geq x_2 \geq a_2 > 0.$$

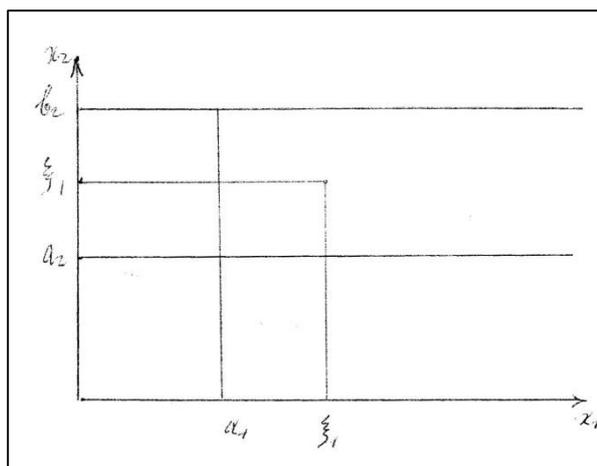


Figura 11

Supponiamo che l'evoluzione del sistema nel tempo sia governata dal sistema di equazioni differenziali

$$(2) \quad \dot{x}_1 = -k x_1 + u \quad ; \quad \dot{x}_2 = h - u \quad ; \quad k, h - 1 > 0,$$

dove u è una variabile di controllo che deve appartenere all'insieme chiuso U definito dalle relazioni

$$(3) \quad U = \{u \mid 0 \leq u \leq 1\}.$$

Supponiamo che si voglia programmare il sistema in modo da minimizzare il valore dell'integrale

$$(4) \quad J = \int_0^T dt .$$

La funzione \mathcal{H} di Hamilton è data in questo caso da

$$(5) \quad \mathcal{H} = -1 + y_1 (u - k x_1) + y_2 (h - u);$$

e le equazioni canoniche di Hamilton sono date da

$$(6) \quad \dot{y}_1 = k y_1 \quad ; \quad \dot{y}_2 = 0;$$

da cui si trae

$$(7) \quad y_1 = \eta_1 \exp kt - \quad ; \quad y_2 = \eta_2 .$$

La funzione \mathcal{H} , considerata come funzione di u , è lineare e il coefficiente di u al primo grado è dato da

$$(8) \quad y_1 - y_2 = \eta_1 \exp kt - \eta_2 .$$

Di conseguenza la massimizzazione di \mathcal{H} rispetto ad u si ottiene scegliendo

$$(9) \quad u = 0 \text{ quando } y_1 < y_2 \quad ; \quad u = 1 \text{ quando } y_1 > y_2 .$$

Poiché dalle (7) si deduce che $y_1 - y_2$ è una funzione crescente di t , si conclude che si può avere soltanto un *bang* del controllo u , che consiste nel passaggio dal valore 0 al valore 1.

Per quanto riguarda l'interpretazione del modello rudimentale e schematico che stiamo presentando, si potrebbe pensare ad una programmazione che voglia arrivare al più presto al livello b_2 della variabile del secondo settore, cercando tuttavia di fare in modo che la variabile x_1 non scenda sotto al livello a_1 ; invero se questo avvenisse si avrebbe il collasso del sistema.

Dalle equazioni (2) si trae che il settore 1 è certamente decrescente e il settore 2 è certamente crescente. Pertanto si tratta di accelerare il più possibile la crescita del settore 2, ritardando la contrazione del settore 1 per evitare il collasso. Dalla (5) si ha che y può essere interpretato

come tempo di accrescimento di una unità del primo settore, ed in modo analogo y può essere interpretato come tempo di accrescimento di una unità del secondo settore.

Le condizioni di trasversalità, tenuto conto dell'andamento delle funzioni x_1 , x_2 ed y_1 , y_2 , possono essere espresse dalla condizione all'istante finale T :

$$(10) \quad y_1 (x_1 - a_1) + y_2 (x_2 - b_2) = 0,$$

e, dato il carattere delle funzioni y_1 , y_2 , questa condizione si traduce nelle due condizioni:

$$(10bis) \quad x_1(T) = a_1 \quad ; \quad x_2(T) = b_2.$$

La discussione del problema si può fare analizzando anzitutto la funzione x_1 , che può presentare due andamenti, dipendentemente dai valori del controllo.

A) Considerato anzitutto il caso $u = 1$, si ha

$$(11) \quad x = C \exp(-kt) + 1/k .$$

Indicando con ξ_1 , ξ_2 le coordinate del punto all'istante iniziale, si possono avere i casi seguenti.

A1)

$$(12) \quad 1/k > \xi_1,$$

si ha di conseguenza $C < 0$ e la funzione x_1 è crescente.

A2)

$$(13) \quad 1/k < \xi_1,$$

si ha di conseguenza $C > 0$ e la funzione x_1 è decrescente. Si hanno allora i sottocasi seguenti:

A2.0) La condizione $x_1 > a_1$ è sempre soddisfatta. Ciò avviene quando si ha

$$(14) \quad 1/k > a_1.$$

A2.1) Si abbia

$$(15) \quad 1/k < a_1.$$

Esiste allora un valore T_{max} che è radice dell'equazione

$$(16) \quad a_1 = (\xi_1 - 1/k) \exp(-kt) + 1/k,$$

ed è quindi dato da

$$(16bis) \quad T_{max} = \frac{1}{k} \ln \frac{\xi_1 k - 1}{k a_1 - 1} ;$$

per ogni valore $t > T_{max}$ si ha $x_1 < a_1$.

B) L'ipotesi $u = 0$ dà luogo alla funzione

$$(17) \quad x_1 = \xi_1 \exp(-k t),$$

che ammette lo zero come limite per $t \rightarrow \infty$; esiste di conseguenza un valore T_{min} , radice dell'equazione

$$(18) \quad a_1 = \xi_1 \exp(-k t) ,$$

ed è dato quindi da

$$(18bis) \quad T_{min} = \frac{1}{k} \ln \frac{\xi_1}{a_1} ;$$

la funzione x_1 in questo caso è minore di a_1 , per $t > T_{min}$.

Il comportamento della funzione $x(t)$ nei casi considerati è illustrato geometricamente dalla figura 12.

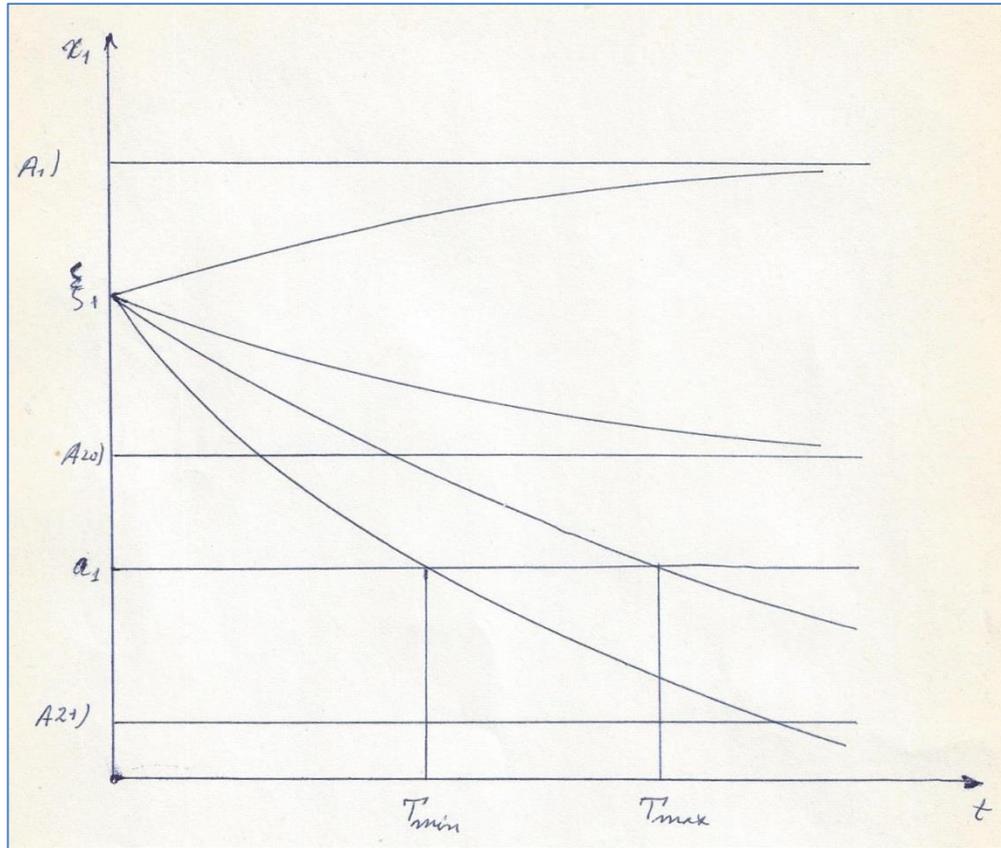


Figura 12

Ovviamente, sempre quando sia valida la (15), è possibile far raggiungere alla funzione $x(t)$ il valore a_1 ad un istante T soddisfacente alle condizioni

$$(19) \quad T_{min} \leq T \leq T_{max}$$

scegliendo un valore t^* e il valore del controllo uguale a zero in un intervallo di valori t dato da

$$(20) \quad 0 \leq t \leq t^* < T,$$

e scegliendo il valore del controllo uguale a 1 per valori t soddisfacenti alle condizioni

$$(21) \quad t^* \leq t \leq T.$$

La discussione dell'andamento della funzione $x_2(t)$ è relativamente più semplice; infatti dalla seconda delle (2) si ha facilmente:

$$(22) \quad \text{se } u = 0, \text{ è } x_2 = ht + \xi_2; \text{ se } u = 1, \text{ è } x_2 = (h-1)t + \xi_2.$$

Di conseguenza il valore b_2 è raggiunto rispettivamente agli istanti

$$(23) \quad \tau_{min} = \frac{b-\xi_2}{h}, \quad \tau_{max} = \frac{b-\xi_1}{h-1}.$$

Si conclude facilmente che esiste un controllo soddisfacente il problema se i due intervalli (19) e (23) hanno un'intersezione non vuota, si ha invece il collasso del sistema se è $T_{min} < T_{max}$.

Non intendiamo insistere qui nella presentazione di altri casi, rimandando alla letteratura in argomento; in particolare segnaliamo qui che è possibile utilizzare gli strumenti della teoria del controllo ottimale per generalizzare i modelli dinamici classici; è del tutto chiaro che questo strumento può dar luogo ad una moltitudine di casi di instabilità, come abbiamo già detto, e che le cause di tali fenomeni possono essere le più svariate.

Inoltre vogliamo ricordare che, anche nel caso di modelli di ottimizzazione che utilizzano la teoria del controllo ottimale, l'esistenza di legami anonomi può rendere i problemi ulteriormente complicati e difficili, ed ha un significato economico che abbiamo già cercato di mettere in luce.

D) Instabilità strutturale in modelli di gioco differenziali.

D1 Come è noto la teoria dei giochi è entrata recentemente a far parte dell'insieme di metodi che vengono utilizzati dalla matematica per descrivere il comportamento economico dell'uomo. Lo stesso titolo dell'opera classica dei fondatori della teoria dimostra che essi erano ben coscienti del fatto che la teoria era stata concepita per le applicazioni economiche.

Non vogliamo addentrarci qui nelle discussioni sul fondamento psicologico del principio del *min max* e sull'analisi dell'adeguatezza di tale principio al fine della descrizione della realtà economica e sociale. Pare abbastanza accettabile che questa teoria fornisca dei mezzi concettuali che permettono di dominare dei settori che prima sfuggivano all'analisi eseguita coi mezzi della matematica; possiamo ricordare ad esempio che nella teoria classica del consumatore, questi era considerato come incapace di mutare la situazione di mercato con il proprio comportamento ed in particolare quindi i prezzi delle merci erano considerati come dei dati esogeni al problema del consumatore. Altri esempi molto numerosi si potrebbero fare, ma crediamo che basti questo per provare l'utilità di una teoria che permetta in qualche modo di tenere conto del comportamento economico di un soggetto proprio in presenza di un altro soggetto, in modo che ciascuno modifichi il proprio comportamento quando conosca quello dell'altro.

In questa breve esposizione tratteremo la teoria dei giochi differenziali in stretto collegamento con quella del controllo ottimale, di modo che i fenomeni di instabilità strutturale che si presenteranno appariranno in stretta analogia con quelli che abbiamo già esaminati; vale la pena di ricordare che anche in questo caso ci limiteremo ad un'esposizione a livello del tutto elementare, preferendo la presentazione di casi in certo modo caratteristici alla trattazione teorica generale.

Manterremo in parte le notazioni del capitolo precedente, fin quando sarà possibile. Pertanto indicheremo anche qui con V^n uno spazio vettoriale n -dimensionale; indicheremo con N l'insieme dei primi n numeri naturali,

$$(1) \quad N = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Fisseremo poi due spazi di vettori di controllo, rispettivamente di dimensioni m_1 e m_2 . Allo spazio vettoriale V^n e ai due spazi di controllo assegneremo l'abituale topologia, che consegue dall'adozione della distanza euclidea dei vettori. Indichiamo con X, U^1, U^2 dei sottoinsiemi dello spazio V^n e dei due spazi dei controlli e consideriamo una funzione f , a valori in V^n , avente come dominio l'insieme $X \times U^1 \times U^2 \times \mathcal{R}^+$:

$$(2) \quad f : X \times U^1 \times U^2 \times \mathcal{R}^+ \rightarrow V^n.$$

Supporremo valide per la funzione f le ipotesi già espresse nel capitolo precedente; si può pertanto pensare ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$(3) \quad \dot{x}_i = f_i(x, u^1, u^2, t), \quad x \in X, u^1 \in U^1, u^2 \in U^2, t \in \mathcal{R}^+, i \in N.$$

La scelta di due funzioni vettoriali $u^1(t)$, $u^2(t)$ determina la famiglia di traiettorie nello spazio di fase, secondo classici teoremi sulle equazioni differenziali. Sia poi data una funzione

$$(4) \quad f_0 : X \times U^1 \times U^2 \times \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R},$$

che verrà chiamata funzione obiettivo, e si consideri l'integrale

$$(5) \quad J = \int_0^T f_0(x, u^1, u^2, t) dt.$$

A questo punto possono presentarsi diverse ipotesi, che traducono varie situazioni di scelta economica, quindi possono essere adattate per descrivere varie situazioni di competizione, di cooperazione o altro, quando si considerano i due insiemi U^1, U^2 come gli insiemi di scelta di due persone e si considerano di conseguenza i due vettori $u^1 \in U^1, u^2 \in U^2$ come le espressioni delle scelte di due persone. Queste differenti situazioni si traducono in differenti comportamenti nei riguardi della funzione di Hamilton \mathcal{H} ,

$$(6) \quad \mathcal{H} = f_0 + \sum_{k \in N} y_k f_k,$$

che dà luogo alle equazioni differenziali per le variabili ausiliarie

$$(7) \quad \dot{y}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad i \in N,$$

equazioni che completano le ovvie equazioni relative alle variabili x_i :

$$(8) \quad \dot{x}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i}, \quad i \in N.$$

I casi più interessanti e più schematici sono quelli dei giochi a somma zero e dei giochi di cooperazione fra due persone.

Nel primo caso la funzione f_0 rappresenta i guadagni del primo giocatore, che costituiscono le perdite del secondo; in questo caso un'applicazione facile del principio di Pontryagin e dell'ipotesi della teoria dei giochi porta alla scelta dei vettori u^1, u^2 in modo tale che in ogni istante si abbia per la funzione \mathcal{H} un punto di sella, e quindi si ricerchi il

$$(9) \quad \max_{u^1 \in U^1} \min_{u^2 \in U^2} \mathcal{H}(x, u^1, u^2, t).$$

Nel secondo caso, l'ipotesi di cooperazione tra i due personaggi conduce alla scelta dei due vettori u^1, u^2 in modo che si abbia il massimo della funzione di Hamilton, e quindi si ricerchi

$$(10) \quad \max_{u^1 \in U^1} \max_{u^2 \in U^2} \mathcal{H}(x, u^1, u^2, t).$$

Ovviamente si possono concepire molti altri casi intermedi, che non analizziamo qui perché la natura strettamente elementare di questa trattazione verrebbe alterata dalle minuzie di carattere tecnico matematico. Ci limitiamo quindi a ripetere qui l'osservazione che abbiamo già fatto nel capitolo precedente: la natura topologica dell'insieme X e degli insiemi di controllo U^1, U^2 può dar luogo a delle discontinuità delle derivate delle funzioni che sono soluzioni del problema e quindi a dei bruschi cambiamenti di tendenza dell'evoluzione temporale dei fenomeni considerati, che possono anche assumere la fisionomia di collassi dei sistemi analizzati.

D2 Nello spirito della trattazione che stiamo svolgendo, pensiamo che sia utile analizzare qui un esempio schematico classico; tale modello viene chiamato da qualche Autore "*Gioco della guerra*", e così lo chiameremo anche noi, osservando tuttavia che questo modello può essere utilizzato per schematizzare delle concorrenze economiche (oltre che le guerre vere e proprie), e che inoltre il modello stesso costituisce una schematizzazione rudimentale della realtà effettiva, schematizzazione che – ripetiamo – presentiamo al solo scopo di poter fissare le idee ed appoggiare il discorso.

Sia $n = 2$, e si interpretino le due componenti x_1, x_2 del vettore x come i potenziali di lotta dei due contendenti; dato il significato delle componenti dei due vettori, si hanno le ovvie limitazioni

$$(1) \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

che fanno dell'insieme X un insieme chiuso anche se non compatto.

Siano u_1, u_2 due variabili di controllo rispettivamente del primo e del secondo contendente, soddisfacenti alle limitazioni

$$(2) \quad 0 \leq u_1 \leq 1, \quad 0 \leq u_2 \leq 1;$$

pertanto i due insiemi U^1, U^2 sono compatti.

Si suppone che l'evoluzione del sistema sia retta dalle equazioni differenziali seguenti:

$$(3) \quad \dot{x}_1 = m_1 - c_1 u_2 x_2, \quad \dot{x}_2 = m_2 - c_2 u_1 x_1, \quad m_1, m_2, c_1, c_2 > 0.$$

Il significato delle equazioni potrebbe essere descritto brevemente a parole dicendo che le quantità $u_1 x_1, u_2 x_2$ sono rispettivamente quelle frazioni del potenziale che ciascuno dei contendenti dedica alla difesa, cioè (come si desume dalle (7)) al rallentamento del potenziale bellico dell'avversario. Tale potenziale crescerebbe a ritmo costante se non fosse per l'opera di difesa che è esercitata dall'avversario. Ovviamente se ciascuno dei contendenti dedica la frazione $u_i x_i, (i = 1, 2)$ all'intenzione della difesa contro l'avversario, dedicherà la frazione $(1 - u_i) x_i, (i = 1, 2)$ alla lotta diretta. In questa fase schematica si può assumere come funzione obiettivo la seguente:

$$(4) \quad f_0 = (1 - u_1) x_1 - (1 - u_2) x_2,$$

che rappresenta la "prevalenza" del primo contendente sul secondo, e porsi come scopo quello di massimizzare l'integrale

$$(5) \quad J = \int_0^T ((1 - u_1) x_1 - (1 - u_2) x_2) dt ;$$

la funzione di Hamilton è data in questo caso da

$$(6) \quad \mathcal{H} = (1 - u_1) x_1 - (1 - u_2) x_2 + y_1 (m_1 - c_1 u_2 x_2) + y_2 (m_2 - c_2 u_1 x_1),$$

ed il principio di Pontryagin (ovviamente generalizzato a questo caso) porta alla ricerca del

$$(7) \quad \max_{u^1 \in U^1} \min_{u^2 \in U^2} \mathcal{H} ;$$

la funzione \mathcal{H} , data dalla (6), risulta essere lineare nelle variabili u^1, u^2 ; la parte di \mathcal{H} che dipende da queste due variabili è data da

$$(8) \quad -u_1 x_1 (1 + c_2 y_2) + u_2 x_2 (1 - c_1 y_1).$$

L'espressione delle variabili u^1, u^2 in funzione del tempo può essere data speditamente facendo ricorso alla funzione caratteristica $\chi : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$, definita dall'espressione

$$(9) \quad \chi(x) = \frac{1}{2} \frac{x + |x|}{|x|},$$

che pertanto soddisfa alle condizioni

$$(10) \quad x > 0 \Rightarrow \chi(x) = 1; \quad x < 0 \Rightarrow \chi(x) = 0; \quad \chi(x) + \chi(-x) = 1.$$

La funzione (8) è lineare nelle variabili e pertanto i valori ottimali negli insiemi chiusi sono assunti alla frontiera. Una breve discussione porta alle espressioni:

$$(11) \quad u_1 = 1 - \chi(1 + c_2 y_2), \quad u_2 = 1 - \chi(1 - c_1 y_1).$$

Le condizioni (7) del paragrafo precedente nel caso attuale danno:

$$(12) \quad \dot{y}_1 = u_1 (1 + c_2 y_2) - 1; \quad \dot{y}_2 = 1 - u_2 (1 - c_1 y_1).$$

La sostituzione delle espressioni (11) nelle (12) conduce alle equazioni

$$(13) \quad \dot{y}_1 = (1 - \chi(1 + c_2 y_2))(1 + c_2 y_2) - 1; \quad \dot{y}_2 = 1 - (1 - c_1 y_1)(1 - \chi(1 - c_1 y_1)).$$

Dalle (13) e dalle proprietà della funzione introdotta si trae facilmente che la funzione y_1 è decrescente e la funzione y_2 è crescente. Se ne deriva che, per la natura della funzione e in conseguenza delle (11), durante il periodo considerato si può avere un solo "bang" per ciascuno dei controlli e tale bang consiste in ogni caso nel passaggio dal valore 1 al valore

zero. In altre parole, le condizioni di ottimalità e il principio del *min max* portano che entrambi i contendenti finiscano il periodo della lotta dedicando tutte le loro risorse all'utilizzo nella lotta di offensiva.

Non intendiamo spingere ulteriormente la discussione che potrebbe portare a distinguere molti casi e sottocasi, e che non apporterebbe ulteriori informazioni dal punto di vista concettuale, e d'altra parte non apporterebbe ulteriore utilità pratica, data la natura rudimentale del modello, già più volte ricordata.

È chiaro d'altra parte che in dipendenza dal valore delle costanti iniziali e dalla natura topologica dell'insieme X l'evoluzione del sistema nel tempo può portare all'eliminazione di uno dei due contendenti, cioè ad un collasso del sistema dei due, risultato cui si giunge in modo automatico in seguito alla struttura dello strumento matematico adottato per descrivere la realtà di questo caso.



CISM Conference Room

Ndr. Dattiloscritto rieditato gennaio 2017.

BIBLIOGRAFIA

1. APPELL Paul - *Traité de mécanique rationnelle*. Paris. Gauthier-Villars. 1893
2. BLAQUIERE Austin & GERARD Françoise & LEITMANN George - *Quantitative and qualitative Games*. Academic Press. New York. 1969
3. BRÖCKER Th. & LANDER L. - *Differential Games and Catastrophes*. Cambridge University Press. 1975
4. CONTI Roberto - *Problemi di controllo e di controllo ottimale*. Torino. UTET. 1974
5. FATOU Pierre - *Sur les équations fonctionnelles*. (Bull. Soc. Math. Franç. I, 47 (1919). II, 48 (1920)).
6. FLETCHER Robert - *Optimization*. Academic Press. London. 1969.
7. FRANZ Wolfgang - *Topologie*. De Gruyter. New York. 1974
8. HADLEY G. & KEMP M. C. - *Variational Methods in Economics*. North Holland. 1971
9. HELMER Jean Yves - *La commande optimale en Economie*. Dunod. Paris. 1972
10. HERTZ Heinrich - *Gesammelte Werke*. Leipzig, J.A. Barth, 1894-95 [v. 1, '95]
11. KARLIN Samuel - *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*. Addison Wesley. 1959
12. KURIHARA Kenneth K. - *Macroeconomics and programming*. G. Allen. London. 1964
13. INTRILIGATOR Michael D. - *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Prentice Hall. 1971
14. ISAACS Rufus - *Differential Games. A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. John Wiley & Sons. 1965
15. LANGE Oskar - *Introduzione alla Econometrica*. Boringhieri. Torino. 1963
16. LEONTIEF Wassily - *Teoria economica delle interdipendenze settoriali: input-output*. Presentazione e appendici di Carlo D'Adda. ETAS Kompass, 1968. (Trad. di C. D'Adda, A. Tantazzi).
17. LOMBARDINI Siro - *L'analisi della domanda nella teoria economica*. Giuffrè. Milano. 1957
18. LOMBARDINI Siro & QUADRIO CURZIO Alberto - *La distribuzione del reddito nella teoria economica*. Franco Angeli. Milano. 1972.
19. MC DOUGALL Duncan & DERNBURG Thomas E. - *Macroeconomia*. Etas-KOMPASS. Milano. 1967
20. MONTEL PAUL - *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques*. Paris. Gauthier-Villars. 1927
21. MURACCHINI Luigi - *Programmazione Economica*. UTET. Torino. 1971. Riv. Int. di Sci. Sociali. 77 (1969) 348,361

22. PASINETTI Luigi - *Una formulazione matematica del sistema ricardiano*. (in 18)
23. PONTRYAGIN L. S. et al. - *The mathematical theory of optimal processes*. Pergamon Press. Oxford. 1964
24. QUADRIO CURZIO Alberto - *Investimenti in istruzione e sviluppo economico*. Il Mulino. Bologna. 1973
25. Id. *Accumulazione del capitale e rendita*. Il Mulino. Bologna. 1975.
26. SENGUPTA J. K. & FOX K. A. - *Optimization techniques in quantitative economics*. North Holland. 1971
27. SHELL Karl - *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*. M.I.T. Press. 1967.
28. SOLARI Luigi - *Théorie des choix et fonctions semi-agrégées*. DROZ. Genève. Paris 1971
29. THOM René - *Stabilité structurelle et Morphogénèse*. W. A. Benjamin Inc. 1972.
30. VON NEUMANN John & MORGENSTERN Oskar - *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press. 1944