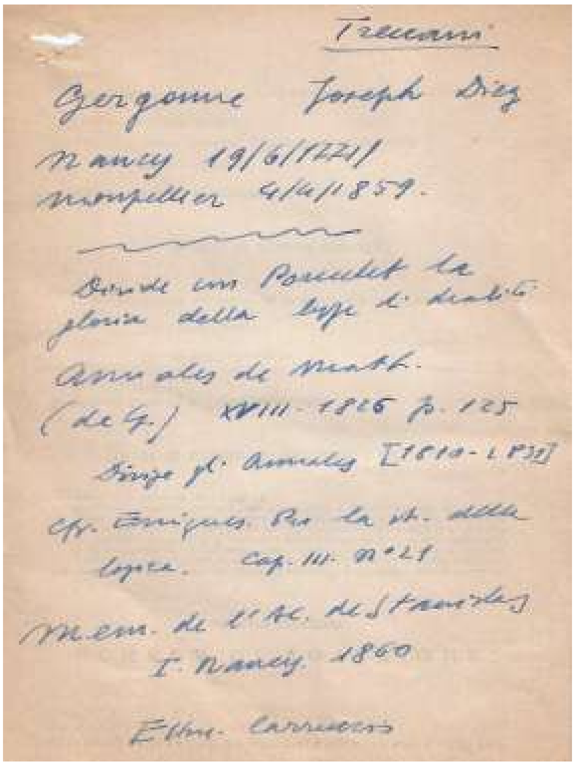
GERGONNE.

Si può dire che Joseph Diaz Gergonne fu tra i primi matematici a rilevare l'esistenza di una corrispondenza tra proposizioni geometriche, che viene da lui chiamata "dualité". La cosa interessante per i nostri scopi è la constatazione del fatto che questa corrispondenza verbale viene messa in evidenza presentando le proposizioni corrispondenti su due colonne, in modo che il lettore possa direttamente osservare l'uguaglianza di forma delle due proposizioni che si corrispondono.

Gergonne espone queste idee sostanzialmente in due Memorie degli Annales de Mathématiques (Annales de Gergonne): la prima comparsa nel T. XVI (1825-26) (pag. 209 -231), dal titolo: "Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue"(*); la seconda comparsa nel tomo successivo: T. XVII (1826-27) (pagg. 214-252), dal titolo: "Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres". La prima memoria è pubblicata nella sezione "Philosophie mathématique" degli Annales; la seconda nella sezione "Géométrie de situation".

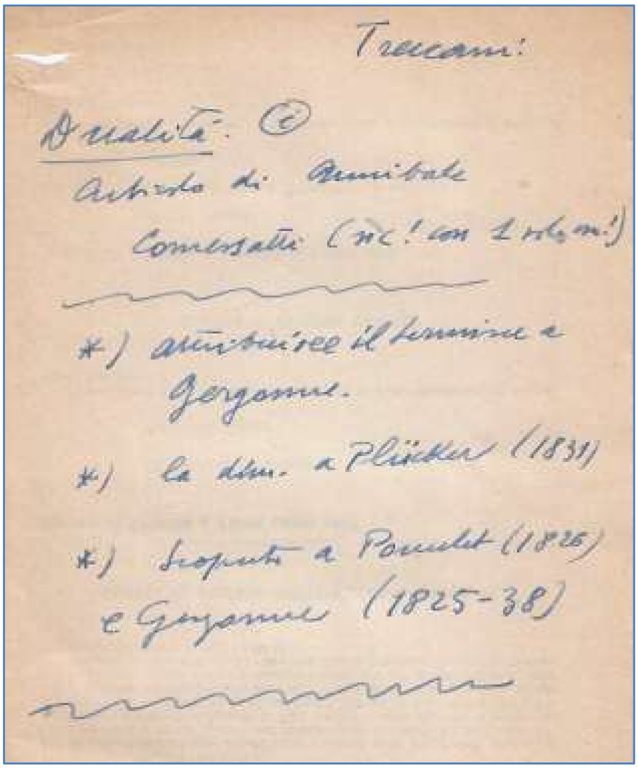


Non interessa in questa sede analizzare quali siano i contenuti materiali delle note che abbiamo citato, perché lo spirito del nostro lavoro presente è soprattutto l'analisi dei fondamenti logici ed epistemologici sui quali Gergonne fondava le sue considerazioni. Ci interessa inoltre analizzare quale fosse il grado di consapevolezza che Gergonne dimostra nelle sue opere dell'importanza delle sue idee; è da osservare infatti che Gergonne presenta le proprie considerazioni mettendo in evidenza i vantaggi metodologici ed anche didattici della sua concezione, in modo che si potrebbe dire che, al di là delle imperfezioni che possono essere rilevate negli enunciati, Gergonne era in certa misura consapevole della novità e del rilievo delle idee da lui esposte. Questo fatto del resto è messo in evidenza dalla collocazione della prima delle memorie citate, che viene presentata nella sezione "Philosophie mathématique" degli Annales di Gergonne, il che conferma la validità della nostra valutazione a proposito della conoscenza che Gergonne aveva della portata metodologica delle proprie idee; queste presentano d'altronde una distinzione tra le proprietà metriche e le proprietà che oggi si chiamano 'grafiche' delle figure geometriche, distinzione che sta alla base degli sviluppi classici della geometria proiettiva. Pensiamo che il modo migliore di confermare queste nostre affermazioni sia quello di citare le parole del Gergonne, nelle prime pagine della prima delle memorie citate (nostra traduzione libera). Scrive Gergonne:

Le diverse teorie che compongono il dominio della scienza dell'estensione possono essere classificate in due sottoclassi ben distinte tra loro. Vi sono infatti delle teorie che dipendono essenzialmente dalle <u>*relazioni metriche*</u> *che sussistono tra le diverse parti dell'estensione che si confrontano tra loro; teorie quindi che possono essere fondate soltanto sui principi del calcolo. Vi sono poi altre teorie che sono completamente indipendenti da queste relazioni, e quindi dipendono soltanto dalla situazione reciproca degli enti della geometria che vengono presi in considerazione. Teorie queste ultime, le quali spesso sono fondate sulle proporzioni e sul calcolo, ma che possono sempre essere trattate in modo indipendente, purché siano completamente presentate in modo conveniente. Tuttavia a questo scopo può essere necessario passare dalla geometria piana a quella dello spazio, e ritornare in seguito nel piano, così come hanno fatto spesso, con tanto successo, Monge e la sua scuola.*

È quindi ragionevole domandarsi, dopo queste osservazioni, se la nostra maniera di suddividere la geometria in <u>*geometria piana*</u> *e* <u>*geometria dello spazio*</u> *sia tanto naturale e così conforme alla vera natura delle cose come ce lo afferma la nostra abitudine, che data da venti secoli. Come minimo, resterebbe vero che rinunciando a questa abitudine si potrebbe giungere a spingere abbastanza avanti nella geometria certi principianti, ricorrendo alla sola intuizione; invece troppo spesso quando non si ricorra a questi mezzi, gli stessi principianti sono bloccati dallo studio del calcolo, al quale potrebbero applicarsi in seguito con meno difficoltà, quando la loro intelligenza si fosse irrobustita e elevata con lo studio di una serie più o meno grande di proprietà dell'estensione.*
Una proprietà molto interessante di questa parte della geometria non dipende per nulla dalle relazioni metriche tra le parti delle figure. Questa proprietà consiste nel fatto che, a prescindere da certi teoremi come quello di Eulero sui poliedri ed il suo analogo sui poligoni, che sono simmetrici di se stessi, tutti i teoremi sono accoppiati; in altre parole, nella geometria del piano, ad ogni teorema corrisponde un altro che si deduce dal primo scambiando tra loro le parole 'punto' e 'retta', mentre nella geometria dello spazio per passare da un teorema al suo correlativo occorre scambiare tra loro le parole 'punto' e 'piano'.

*Tra i numerosi esempi che potremmo presentare in questo scritto di questa sorta di dualità (*è forse qui la prima volta che il termine si trova impiegato in questo significato*) dei teoremi che costituiscono la geometria di situazione, ci limiteremo a indicare come i più notevoli i due eleganti teoremi del sig. Coriolis, dimostrati anzitutto alla pag. 326 del XI volume e poi alla pag. 69 del XII volume, e l'articolo che noi stessi abbiamo pubblicato alla pag. 157 del volume precedente sulle leggi generali dei poliedri. Inoltre qui una successione inevitabile (*sic!*) di proprietà di poli, polari, piani polari e polari coniugate delle curve e delle superfici del secondo ordine hanno un ruolo molto analogo a quello del triangolo polare della trigonometria sferica, dottrina nella quale, come ha mostrato il sig. Sorlin (tomo XV, pag.273), i teoremi possono essere accoppiati in due serie parallele, in modo da corrispondersi a coppie con la massima esattezza.*



Tuttavia benché un fatto geometrico di questa importanza sia molto degno di considerazione, e benché esso possa offrire molti spunti ed aiuti per far scoprire in qualche modo dei teoremi nuovi, esso è stato appena intravisto, anche dai geometri che si sono occupati recentemente di ricercare le proprietà dell'estensione. E ciò dimostra quanto la maniera di studiare le scienze sia ai nostri giorni lontana dalla filosofia.

Ecco dunque le ragioni che ci hanno condotti a prendere come soggetto di uno scritto apposito questa specie di geometria (per così dire) in partita doppia; in questo scritto anzitutto presenteremo il fatto filosofico in sé, di cui si tratta, e su questo principio ci fonderemo per dimostrare qualche nuovo teorema oppure per dare delle nuove dimostrazioni di teoremi conosciuti, dimostrazioni che li renderanno indipendenti da quelle relazioni metriche sulle quali era fondata finora la loro dimostrazione abituale.

Ovviamente potremmo limitarci a dimostrare soltanto la metà dei teoremi che presenteremo, deducendo l'altra metà con la teoria dei poli e delle polari. Ma noi preferiamo presentare per intero tutte le dimostrazioni, anzitutto per non allontanarci dal campo elementare e rendere accessibile ciò che scriveremo anche a coloro i quali non conoscono gli <u>*Elementi*</u> *di Euclide; ed in secondo luogo per aver l'occasione di far notare che la stessa corrispondenza che sussiste tra gli enunciati di due teoremi (duali fra loro) esiste anche fra le dimostrazioni. Per mettere in evidenza questa corrispondenza avremo cura di presentare i teoremi corrispondenti su due colonne* *affacciate, così come abbiamo già fatto nell'articolo sui poliedri che abbiamo citato. Inoltre il raffronto tra le proposizioni potrà servire anche come tecnica di controllo della reciproco della loro validità. Pensiamo che sia inutile accompagnare questa memoria con delle figure, le quali sono più dannose che utili nella geometria dello spazio; e d'altra parte osserviamo che, anche volendo presentare delle figure, noi potremmo presentare delle figure singole, mentre il lettore potrà farne quante ne vorrà, se lo riterrà necessario. Infatti noi presenteremo soltanto delle relazioni logiche , e delle deduzioni che si seguono molto facilmente, quando si sia scelto un insieme opportuno di notazioni*. FINE DELLA CITAZIONE.

Prima di analizzare il significato e l'importanza delle idee che Gergonne esprime qui, vorremmo ricordare che egli enuncia alcune 'Nozioni preliminari' che sono dei postulati di appartenenza, che nelle esposizioni classiche di geometria proiettiva venivano chiamati 'postulati grafici'. È da notare tuttavia che egli non si pone neppure il problema di introdurre degli elementi all'infinito o 'impropri' dello spazio, mentre tale introduzione è necessaria, come ben si sa, per conservare in pieno la validità alle corrispondenze per dualità tra proposizioni. Tuttavia non si può dire che egli ignori il problema, perché lo tocca in modo assolutamente marginale in una nota a piè di pagina nella seconda Nota che analizzeremo, dicendo che Poncelet, nelle sue 'Propriétés projectives', aveva introdotto degli elementi "infiniment distants" ed anche dei punti a coordinate immaginarie, che salvavano la validità generale degli enunciati.

L'argomento viene sfiorato, ma non trattato in modo approfondito (almeno secondo le esigenze di oggi) nella nota che esamineremo in seguito. Qui il Gergonne, parlando delle intersezioni di due curve algebriche (e quindi in particolare anche di rette) dice:

Noi conveniamo di annoverare tra le intersezioni di due curve le loro intersezioni reali così come quelle <u>ideali</u>, le loro intersezioni accessibili così come quelle infinitamente distanti; cosicché, nel nostro linguaggio, il numero delle intersezioni di due curve sarà sempre uguale al prodotto dei gradi delle loro equazioni.

Dal contesto, ed anche da una nota a piè di pagina in cui Gergonne riporta le idee di Poncelet, si evince che le intersezioni 'infinitamente distanti' sono le intersezioni in punti impropri, mentre le intersezioni che egli chiama 'ideali' sono date da punti che hanno coordinate complesse. Ovviamente l'enunciato che precede è abbastanza sommario, perché il Gergonne non tiene conto della molteplicità delle intersezioni di due curve tra loro, molteplicità che è diversa da 1 anche se le curve si toccano in punti semplici per ciascuna di esse. Pertanto non è scusabile questa dimenticanza con l'assenza di una analisi approfondita delle singolarità dei luoghi geometrici nella matematica dell'epoca. Pare che si possa dire che l'espressione 'Noi conveniamo di ....' non abbia alcun significato di una impostazione convenzionalistica della matematica; semplicemente a nostro parere questa espressione vuole introdurre una convenzione di linguaggio a proposito di certi enti la cui esistenza era considerata come una cosa sicura, anche se in parte misteriosa, come nel caso dei punti qui chiamati 'ideali'.

Tuttavia, ripetiamo, pare che Gergonne non si preoccupi della introduzione di elementi cosiffatti nello spazio; si può presumere che egli accetti come naturale la concezione dei punti impropri come posizioni limite di certi punti propri che si allontanano indefinitamente. Posizione questa che è stata adottata anche da geometri posteriori, che non hanno avuto preoccupazioni nella introduzione assiomatica di elementi impropri attraverso discorsi cosiffatti.

Non riteniamo di proseguire nella esposizione del pensiero di Gergonne nei minimi particolari, e ci limitiamo a riportare una osservazione che egli enuncia in seguito, di passaggio, trattando dei punti determinati da coppie di lati non consecutivi di un poligono e dei piani determinati da spigoli non consecutivi della figura duale (polispigolo di una stella di rette). Egli osserva che questi piani non hanno mai ricevuto una denominazione convenzionale precisa ed aggiunge:

Certo se le relazioni che cercheremo di presentare qui fossero state conosciute dai creatori della scienza, questi avrebbero dato dei nomi speciali a questi piani; e questo fatto (sia detto di passaggio) dimostra che si può sperare di costruire bene la lingua di una scienza soltanto quando questa è giunta ad un sufficiente grado di maturità.

Per ritornare all'analisi della lunga citazione fatta prima vorremmo osservare anzitutto che Gergonne dimostra di avere una coscienza abbastanza chiara del fatto che le sue osservazioni hanno una grande importanza metodologica ed euristica. Egli inoltre mette in evidenza anche le conseguenze che le sue idee possono avere sulla didattica della geometria e sulla trattatistica in generale, ciò, come egli dice, sul modo di insegnare e di studiare la scienza. Dalle sue parole e dal suo atteggiamento inoltre possiamo dedurre che per lui la geometria era ancora una scienza di contenuti; infatti egli si esprime dicendo che la sua maniera di presentare le cose permette di raddoppiare in certo senso le nostre conoscenze ovvero di dimostrare due teoremi con una sola dimostrazione. Ovviamente dietro questa concezione sta la convinzione che i due teoremi considerati siano diversi tra loro; infatti essi parlano di cose diverse e di relazioni che sono enunciate con parole diverse. Ma dal punto di vista logico formale è chiaro che si tratta di semplici enunciati di una stessa unica proposizione, che si riferiscono a diversi modelli concreti.

Questa visione della geometria come scienza di contenuti è testimoniata anche dal suo modo di esprimersi laddove egli parla degli scienziati che si sono occupati di studiare le proprietà della estensione. Pertanto appare abbastanza verosimile che nelle idee di Gergonne la legge di dualità stava ad enunciare una proprietà dell'oggetto della geometria, proprietà che era sfuggita ai ricercatori precedenti e che invece, conosciuta, poteva condurre a una notevole estensione delle nostre conoscenze.

Va infine ricordato che la giustificazione data da Gergonne alla legge di dualità è fondata sulle proprietà della polarità, nel piano rispetto ad una conica, nello spazio rispetto ad una quadrica. In altri termini questa giustificazione viene ottenuta ancora una volta mediante uno strumento (la polarità) che realizza concretamente la corrispondenza tra elementi di figure duali tra loro. La esistenza della dualità è una proprietà dello spazio geometrico (o di quell'ente che egli chiama "étendue", estensione) che viene scoperta e dimostrata; ma questa dimostrazione non si fonda sulla analisi puramente linguistica e verbale dei postulati o delle proposizioni primitive riguardanti gli enti dello spazio proiettivo reale inteso come una estensione dello spazio della geometria euclidea.

È chiaro che con queste osservazioni non intendiamo in alcun modo sminuire la validità dell'opera di Gergonne; ci è parso giusto farle perché il nostro scopo è appunto quello di seguire l'evoluzione delle idee che ha portato la geometria ad assumere l'aspetto di una dottrina ipotetico - deduttiva, partendo dal suo aspetto originario di scienza che si occupa di certi contenuti; e l'opera di Gergonne contribuì a nostro parere a questa evoluzione, anche se non la condusse completamente a termine.

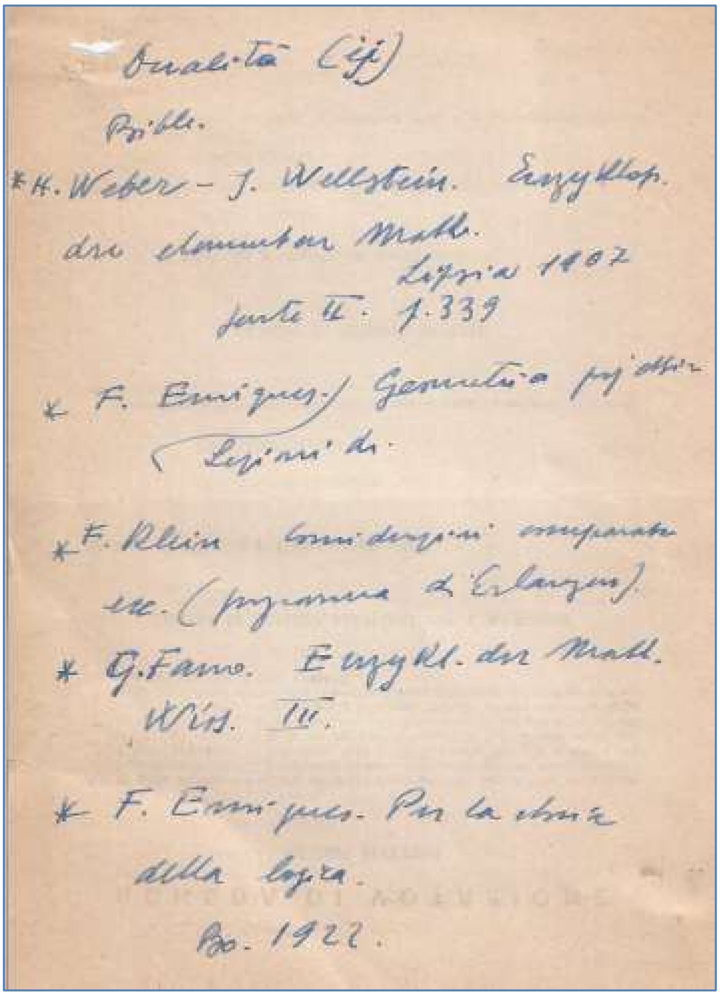
Prima di analizzare l'altra nota di Gergonne, che ha attirato in modo particolare la nostra attenzione, vorremmo rilevare brevemente la frase in cui Gergonne parla delle figure. Non sappiamo quale sia stata la influenza sulla posizione del Nostro della difficoltà di disegnare delle figure che siano abbastanza valide, data l'assenza all'epoca di strumenti tecnici per la riproduzione e la stampa dei disegni. Ma questa difficoltà puramente tecnica ha avuto molto probabilmente una influenza molto scarsa, come ci si convince facilmente quando si consideri la abbondanza di materiale grafico ed illustrativo che si trova per esempio nella grande Enciclopedia di Diderot. Pertanto pensiamo che sia probabile che nella posizione di Gergonne ci fosse qualche cosa della posizione che assumerà K. I. von Staudt, rifiutandosi di far lezione con lavagna e gesso, non includendo figure nei sui trattati, con la giustificazione che la figura blocca nello studente la generalità che è richiesta dall'enunciato verbale, che ha valore logico astratto. (Citare la traduzione di Pieri della GEOMETRIE DER LAGE).

La seconda opera di Gergonne che ci interessa analizzare qui appare nel volume successivo degli Annales e riguarda certe "Leggi generali che valgono per le curve e le superfici algebriche di qualunque ordine". Anche in questo caso è interessante riportare le parole di Gergonne per cercare di capirne i pensiero ai fini della nostra analisi. Scrive Gergonne (nostra traduzione libera):

*Abbiamo osservato non tanto tempo fa (*e qui G. cita una nota sua del volume precedente degli Annales che qui non riportiamo*) che siamo giunti ad un punto tale dello sviluppo delle scienze matematiche oggi, che siamo così sovraccarichi di teoremi così numerosi che neppure la memoria più intrepida potrebbe illudersi di ricordarli tutti, che oggi forse si serve meglio la scienza cercando di ricondurre le verità note a pochi principi fondamentali che cercando di aumentare il numero delle verità nuove. D'altra parte il valore di una scienza non sta tanto nel numero* *delle sue proposizioni quanto nel modo in cui tali proposizioni sono legate e concatenate tra loro. Ora accade che in ogni scienza esistono dei punti di vista molto alti, tali che basta porsi in uno di essi per abbracciare con un solo colpo d'occhio un grande numero di verità; verità che - viste da un punto meno elevato - sembrano tra loro sconnesse ed indipendenti, mentre invece si presentano come derivanti da un unico principio comune il quale spesso si può riconoscere e stabilire con un procedimento molto più facile di quanto non sia quello che conduce alle verità particolari, che sono espressioni parziali di quel principio.*

Per confermare con esempi concreti e notevoli queste considerazioni noi ci proponiamo di stabilire qui un piccolo numero di teoremi generali sui punti comuni a due curve algebriche piane, sulle curve che sono comuni e sui punti che sono comuni a due superfici algebriche, sulle superfici sviluppabili che sono circoscritte a quelle superfici algebriche e sui piani tangenti comuni; questi teoremi presentano una grandissima quantità di corollari e tra questi noi ci limiteremo a segnalare i più semplici oppure i più notevoli. Molti di questi corollari sono noti da tempo, ma noi pensiamo che non si posseggano ancora delle dimostrazioni così semplici e brevi, che richiedano un minor numero di conoscenze e di principi, di quelle che qui si troveranno a proposito dei teoremi generali che implicano tutti questi corollari. Poiché prenderemo in considerazione delle relazioni che non sono metriche, tutti i teoremi che esporremo sono doppi. E per far comprendere meglio la corrispondenza che intercede tra due teoremi, presenteremo su due colonne affacciate due teoremi che si corrispondono, così come abbiamo già fatto altre volte.

FINE DELLA CITAZIONE



Dualità (cfr)

Bibl.

*H. Weber – J. Wellstein. Enzyklop. der elementar Math. Lipsia 1907 parte II. p.339

* F. Enriques / Geometria proiettiva (Lezioni di.

* F. Klein Considerazioni comparative ecc. (programma di Erlangen).

* G. Fano. Enzykl. der Math. Wiss. III.

* F. Enriques. Per la storia della logica. Bo. 1922.

NdR. Si può vedere in Rete

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Gergonne.html

(*)http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AMPA/AMPA_1825-1826__16_/AMPA_1825-1826__16__209_0/AMPA_1825-1826__16__209_0.pdf