GEOMETRIA. - Appare molto difficile il dare una definizione precisa e soddisfacente di ciò che si intende per « g. » e questo per la grandissima estensione e per l'enorme disparità dei campi, a cui oggi si estende questa scienza. Nella presente trattazione si assume provvisoriamente la definizione classica di g. come « scienza dell'estensione » o anche « scienza del continuo esteso ».

I. LA GEOMETRIA ANTICA E LA GEOMETRIA GRECA. — Si hanno prove che alcuni popoli antichi (Indiani, Assiri, Babilonesi, Egiziani, ecc.) ebbero qualche conoscenza geometrica.

Ad es., gli Egiziani conoscevano casi particolari del teorema di Pitagora ed erano in grado di valutare in modo approssimato la lunghezza di una circonferenza e l'area di un cerchio di cui si conoscesse il raggio. Tuttavia non si può affermare che tali conoscenze avessero il carattere astratto e deduttivo che assunsero poi presso i Greci, né che fossero coltivate più di quanto non richiedesse la loro applicazione all'ingegneria, all'agrimensura, all'astronomia ed all'astrologia.

Si può affermare che la g. come scienza nasce con la civiltà greca, perché ivi si trova per la prima volta costituita in un sistema scientifico rigoroso ed esposta in forma astratta, indipendente dalle applicazioni. E fino al sec. XVIII non si concepì altro modo di trattare la g. che quello insegnato dai Greci.

La storia della g. greca si può dividere in tre grandi periodi : il periodo centrale, caratterizzato dai grandi nomi di Euclide e di Archimede, preceduto da un periodo che potremmo dire arcaico e seguito da un periodo che potremmo chiamare ellenistico.

Tra i geometri del periodo che abbiamo chiamato arcaico ricordiamo Talete (VI-V sec. a. C.), Ippocrate di Chio (V sec. a. C.), Pitagora (VI sec. a. C.), Eudosso di Cnido (IV sec. a. C.). È difficile determinare esattamente quali scoperte geometriche si debbano a costoro e quali conoscenze invece siano pervenute ad essi attraverso chissà quali vie e da chissà quali fonti arcaiche. In particolare la scuola pitagorica mescolava nozioni matematiche con trattazioni filosofiche, entrambe nascoste nel mistero di un esoterismo mistico.

Pare da attribuirsi alla scuola pitagorica la scoperta dell'esistenza di « coppie di grandezze incommensurabili », tali cioè che nessun sottomultiplo dell'una è contenuto esattamente un numero intero di volte nell'altra. Questa proposizione è conseguenza del Teorema che va sotto il nome di Pitagora (e che era certamente noto, almeno in casi particolari, prima di lui) e si può annoverare tra i primi esempi (se non il primo) di proposizione geometrica : di nessun interesse pratico e di carattere ultrasperimentale, cioè tale che non è osservabile, ma è necessariamente deducibile con la sola logica. Essa richiede inoltre la sicura acquisizione di una proprietà fondamentale del continuo : la sua indefinita divisibilità, che contrasta con una ingenua visione atomistica dell'estensione. A questo proposito è appena necessario ricordare quanto interesse avesse il problema del continuo per i Greci secondo il suo aspetto filosofico, come si rileva dalle questioni che ci sono state tramandate e che vengono attribuite agli Eleati (paradosso di Zenone, paradosso di Achille e della tartaruga, ecc.). Sono poi largamente noti gli interessi matematici di Platone.

Ad Ippocrate viene attribuito un trattato di g. (non pervenuto a noi) e si fa risalire a lui il merito di aver posto per primo due problemi che rimasero poi classici nella g. : il problema della duplicazione del cubo e quello della quadratura del circolo. Ad Eudosso vengono attribuite le proposizioni che sono contenute nel libro V degli *Elementi* di Euclide; queste formano un'intera teoria delle proporzioni tra grandezze, ammirevole per acutezza di critica e rigorosità di deduzioni.

Nel trattato degli *Elementi* di Euclide (che si fa risalire al 300 a. C.) confluiscono tutte le conquiste matematiche dei secoli precedenti, e vi trovano un'esposizione tanto organica e rigorosa che il trattato stesso si presenta come un monumento di logica deduttiva, rimasto nei secoli come canone insuperabile. Si ha qui il primo esempio a noi pervenuto di trattato di matematica come anche oggi lo intendiamo, che parte da definizioni, enuncia assiomi e postulati e ne deduce rigorosamente le conseguenze. Appare particolarmente interessante la distinzione che Euclide fa tra assiomi (ἀξιόματα) e postulati; distinzione che viene da alcuni ritenuta come indice di un profondo travaglio critico. Egli enuncia, tra gli assiomi, proposizioni generalissime, la cui verità dovrebbe apparire alla sola apprensione dei termini (ad es. : « Due [cose] uguali ad una terza sono uguali [tra loro] »); tra i postulati invece egli enuncia proposizioni molto meno generali che riguardano relazioni tra enti geometrici (ad es. « Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro ») oppure enunciano possibilità di costruzione di essi (ad es. « ... con ogni centro e con ogni raggio si può descrivere un cerchio »). Tra i postulati, Euclide enuncia il famoso V, che afferma sostanzialmente l'unicità della parallela ad una retta qualunque per un punto fuori di essa; postulato che è stato oggetto di discussioni secolari e che è stato occasione del sorgere della g. non-euclidea (v.).

Tra le figure più grandi della g. classica accanto ad Euclide va senza dubbio posto Archimede (287-212 a. C.) per la genialità con la quale ha impostato problemi geometrici particolarmente ardui, riguardanti soprattutto figure piane a contorno non poligonale o solidi non limitati da faccie piane : si può dire che i suoi procedimenti precorrono di secoli i procedimenti del calcolo infinitesimale.

Tra i geometri che vissero nel periodo successivo a quello cui appartennero Euclide ed Archimede, ricordiamo Apollonio (II sec. a. C.), Zenodoro (probabilmente contemporaneo di Apollonio) e Pappo (III sec. d. C.). Di Apollonio sono particolarmente ricordati gli studi sulle curve sezioni del cono in cui si potrebbero ritrovare i germi di quella che diventerà, nel sec. XIX, la « g. proiettiva ». Si deve a Zenodoro l'impostazione e la risoluzione di molti problemi di massimo e minimo ed a Pappo si devono (oltre a numerosi teoremi) numerose notizie storiche e scolii e commenti dei precedenti geometri.

II. La geometria nel medioevo e nel Rinascimento. – I contributi portati dagli Arabi alla g. non sono che uno sviluppo nel senso dell'impostazione classica, sulla via aperta da Euclide, e un'opera di traduzione e commento dei classici, con particolare riguardo a problemi di trigonometria piana e sferica. Lo stesso si può dire della g. medioevale, che non si scosta dalla trattazione classica (conosciuta per lo più attraverso le traduzioni arabe) pedissequamente imitata e seguita.

Il movimento umanistico, ponendo a contatto la cultura europea con le fonti classiche, diede anche impulso allo studio diretto di Euclide e dei suoi successori; le prime ristampe e traduzioni dirette si attribuiscono al sec. XVI. Contemporaneamente o quasi, lo sviluppo dell'arte poneva alla g. dei problemi teorici che essa ancora non aveva considerati : p. es. i problemi di prospettiva che formano una specie di nucleo attorno al quale circa tre secoli dopo si svilupperanno la g. proiettiva e la g. descrittiva. Inoltre nel sec. XVI si ebbe la fioritura dell'algebra italiana; stava sorgendo una nuova scienza matematica e si stavano preparando gli strumenti per il connubio che il secolo successivo doveva stabilire tra la g. e l'analisi. Si ricordi infine che il rifiorire degli studi astronomici e l'impulso dato dalle scoperte geografiche provocava un rifiorire della trigonometria e poneva alla g. dei problemi di cartografia che formarono il germe di quella che diventò nel sec. XIX la *g. differenziale*.

Agli inizi del sec. XVII con Luca Valerio (1552-1618) e con Bonaventura Cavalieri (1598-1647) ha inizio una corrente di pensiero che darà origine a nuove indagini sulla natura del continuo e porterà all'invenzione di metodi che sfoceranno nel calcolo infinitesimale.

Si è visto che la g. classica conosceva dei metodi per valutare le aree di figure a contorno non poligonale e i volumi di figure solide non limitate da facce piane. Essa arrivava a tali risultati mediante un procedimento detto di « exaustione »; questo consiste sostanzialmente nel dimostrare che due grandezze A e B sono uguali dimostrando che entrambe sono comprese tra le stesse due classi di grandezze H e K nelle quali si possono sempre trovare due grandezze la cui differenza sia piccola quanto si vuole. Si riesce così a dimostrare, ad es., che il cerchio è equivalente ad un triangolo avente per base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio. Questo procedimento è di una grandissima ingegnosità e inattaccabile dal punto di vista del rigore logico; tuttavia esso veniva applicato dai geometri classici caso per caso, con accorgimenti escogitati ogni volta, e non ebbe mai un'enunciazione in forma generale che ne permettesse l'applicazione a vaste classi di problemi.

Orbene, in Luca Valerio troviamo enunciato un principio generale che si può sostituire al metodo di « exaustione » ed è più rapido di esso. Secondo le interpretazioni più probabili (essendo il testo assai oscuro) tale principio costituisce in sostanza un procedimento generale di passaggio al limite e, enunciato con nomenclatura moderna, stabilisce che se due grandezze a e b variano in modo continuo mantenendo un rapporto costante k e tendendo a due limiti A e B rispettivamente, tra questi due limiti intercede lo stesso rapporto k che intercede tra le grandezze variabili. In un'altra proposizione Luca Valerio stabilisce la possibilità di inscrivere e circoscrivere ad una figura piana limitata da curve un insieme di parallelogrammi in modo tale che la differenza tra una figura circoscritta ed una inscritta diventi minore di ogni area assegnata.

Procedimenti di questo tipo erano quelli che avevano guidato Archimede nelle sue scoperte; soltanto Archimede non si era accontentato di essi ed aveva dato la dimostrazione dei risultati nel modo classico : ora i procedimenti vengono giustificati in generale e si basa su di essi la dimostrazione dei risultati.

Procedimenti analoghi si trovano in Bonaventura Cavalieri. In lui però accanto a un interesse puramente geometrico, si trova un notevole interesse di tipo filosofico, con discussioni che vertono attorno alla natura del continuo, oggetto della g. Tali discussioni ed indagini di Cavalieri si concretano nella sua *G. degli indivisibili.* Ma non è ben chiaro quale sia il pensiero esatto di Cavalieri quando tratta di « indivisibili ». Comunque, analoghe considerazioni si trovano in Evangelista Torricelli che introduce gli « indivisibili curvi », cioè concepisce le figure come formate da sottilissime striscioline, non limitandosi più, come il Cavalieri, a pensare le striscioline comprese tra rette parallele, ma immaginandole limitate da coppie di curve infinitamente vicine.

III. La geometria analitica. – Non è qui il caso di occuparsi delle questioni storiche che riguardano la priorità tra Descartes e Pietro Fermat nell'invenzione di quella che è oggi chiamata la g. analitica.

Ricordiamo brevemente con vocabolario moderno il concetto informatore della g. analitica. Si fissano nel piano due rette (gli assi coordinati cartesiani) che vengono chiamate « asse delle ascisse » ed « asse delle ordinate ». Abitualmente (ma non necessariamente) le rette si scelgono perpendicolari tra loro e si indicano le ascisse con x e le ordinate con y. Indichiamo con O il punto di intersezione degli assi (origine delle coordinate) e sia P un punto del piano; si conduca per P la parallela all'asse delle ordinate e sia X il punto in cui questa interseca l'asse delle ascisse; analogamente si conduca per P la parallela all'asse delle ascisse e sia Y il punto in cui essa interseca l'asse delle ordinate; pertanto il punto P determina due segmenti OX ed OY sugli assi delle ascisse e delle ordinate rispettivamente, e viceversa due segmenti cosiffatti determinano uno ed un solo punto P, il quale si ottiene come intersezione della retta per X parallela all'asse delle y e della retta per Y parallela all'asse delle x. Poniamo ora di aver fissato un'unità di misura dei segmenti per l'asse delle x ed un'unità di misura dei segmenti sull'asse y; ordinariamente (ma non necessariamente) le due unità si scelgono tra loro uguali; allora i due segmenti OX ed OY forniscono, mediante misura, due numeri, che si possono considerare relativi (cioè dotati di segno) in conseguenza del fatto che gli assi coordinati si possono considerare orientati, cioè tali che sia fissato su ognuno di essi un senso positivo. Pertanto ad ogni punto P del piano corrisponde una coppia di numeri (le sue coordinate); e viceversa, come si vede facilmente, ad ogni coppia di numeri corrisponde uno ed un solo punto P. Di conseguenza ad ogni ente geometrico (punto, retta, angolo, distanza, curva, ecc.) corrisponde un ente analitico (uno o più numeri, un'equazione, ecc.) e le relazioni geometriche tra enti geometrici si traducono in relazioni analitiche, tra enti analitici. Ad es., l'insieme dei punti che posseggono, tutti e soli, una determinata proprietà (ciò che si chiama un « luogo geometrico ») viene a corrispondere all'insieme delle coppie di numeri che soddisfano ad una determinata relazione analitica.

I concetti elementari a cui si è accennato brevemente sono passibili di innumerevoli estensioni; ci limitiamo per il momento ad accennare a due di esse. Una prima estensione si ottiene applicando allo spazio dei procedimenti analoghi a quelli che sono stati introdotti per il piano : basterà usare tre rette non complanari come assi coordinati e si otterrà una corrispondenza tra punti dello spazio e terne di numeri. In secondo luogo, anche rimanendo nelle due dimensioni, si può generalizzare il concetto di coordinate, chiamando sistema di coordinate ogni complesso di convenzioni atto a far corrispondere ad ogni ente geometrico un ente analitico, p. es. ad ogni punto una coppia di numeri, anche se questi non hanno il significato di misure dei segmenti OX e OY introdotti sopra; così è noto che si può fare corrispondere ad ogni punto della superficie terrestre o della sfera celeste una coppia di numeri, e ciò in forza di procedimenti che sono essenzialmente diversi da quelli usati nel piano, in conseguenza della essenziale diversità che la superficie piana ha da quella sferica. Nel piano stesso si danno innumerevoli altri « sistemi di coordinate »; uno tra questi è, p. es., il ben noto sistema di « coordinate polari », in cui ogni punto P è fissato da due numeri che sono l'uno la distanza da un punto fissato O (polo) e l'altro l'angolo che la retta OP forma con una retta fissata per O.

Ciò che fa l'essenziale novità della g. analitica rispetto alle dottrine matematiche precedenti è il suo esplicito porsi come « metodo » di risoluzione dei problemi geometrici e di scoperta di proprietà geometriche con il programma, esplicitamente enunciato, di far servire a questo scopo le risorse dell'algebra e dell'analisi.

Infatti la pura e semplice corrispondenza di enti analitici e di enti geometrici si trova anche nella matematica precedente : i Greci hanno dato veste geometrica a quelle che per noi sono proprietà di algebra e sono giunti così alla risoluzione di problemi che si traducono con equazioni di II° grado; e con la teoria delle proporzioni tra grandezze essi hanno dato un equivalente geometrico di quella che è la moderna teoria dei numeri reali. Inoltre molti tra i problemi risolti dagli algebristi italiani del XV e del XVI sec. vengono posti in veste geometrica. Invece con la g. analitica la situazione appare in certo modo capovolta : si direbbe che si avverte confusamente una certa stanchezza dei metodi antichi, e insieme una intuizione della enorme potenza della nuova scienza algebrica il cui simbolismo andava formandosi, i cui metodi andavano rapidamente maturandosi e le cui conquiste si dovevano presto moltiplicare.

La g. analitica nasceva quindi come una esplicita richiesta di « appoggio » fatta dalla g. all'analisi, una intenzione di « sfruttamento » da parte della g. delle risorse di un'altra scienza. Ma lo stretto connubio che così veniva a stabilirsi tra le due reagiva anche su ognuna di esse. Venivano posti così all'analisi dei problemi nuovi, che la stimolavano a raffinare i suoi metodi ed a cercarne dei nuovi : non va dimenticato, p. es., lo stimolo fornito al calcolo differenziale dal problema del tracciamento delle tangenti ad una curva, e lo stimolo dato al calcolo integrale dal problema della valutazione dell'area di una figura. Veniva poi posto il problema della creazione del « continuo numerico » che fu risolto verso la fine del sec. XIX con la creazione logicamente rigorosa del « numero reale ».

Per dare un'idea della fecondità di problemi e risultati cui questa collaborazione tra le due scienze ha portato, ricordiamo qui che il concetto di « numero complesso » si considerò logicamente stabilito e al riparo da ogni critica quando se ne ottenne una rappresentazione geometrica (Gauss, Argand, Neumann), e viceversa la g. non euclidea venne ritenuta non contraddittoria quando (con la g. differenziale) se ne trovò un fondamento analitico. Inoltre già nelle prime ricerche di g. analitica era in germe un concetto che doveva rimanere fondamentale in tutta la g. posteriore e portare ai classici enunciati di Klein (in campo strettamente geometrico) e alle idee informatrici della « relatività einsteiniana » : infatti già presso Descartes si trova la distinzione tra quanto vi è di convenzionale nel metodo della g. analitica e quanto vi è di sostanza geometrica nelle figure studiate e quindi il germe della ricerca di « invarianti » che si riduce alla ricerca delle proprietà « vere » delle figure, sottostanti ai diversi aspetti analitici con i quali gli enti geometrici si presentano a seconda dei vari sistemi di coordinate cui vengono riferiti.

Non è possibile enumerare partitamente i progressi che la g. analitica fece nei secoli immediatamente posteriori alla sua invenzione né tentare di elencare le tante scoperte di cui questa invenzione fu causa od occasione. Ci limitiamo a ricordare che già in Newton si trova una *Enumeratio linearum tertii ordinis* che è prova della potenza di un metodo che ha fatto fare in mezzo secolo alla g. un progresso molto maggiore che nei 15 secoli precedenti.

Ci è già accaduto di ricordare lo stimolo fornito dalla g. analitica all'analisi, con il porre dei problemi di tracciamento di tangenti e di calcolo di aree e volumi, che portano alle operazioni di differenziazione e di integrazione. Ricordiamo ancora qui che l'influsso della g. sull'analisi fu talmente forte che soltanto nella seconda metà del XIX sec. si trovano gli inizi di una critica dei princìpi del calcolo infinitesimale; vengono allora precisate certe ipotesi e per la prima volta rigorosamente dimostrate certe proposizioni che anteriormente erano considerate del tutto evidenti sulla sola base del loro significato geometrico.

La potenza del nuovo strumento fu tale, e tanta la sua imponenza di suggestione che fece decadere le ricerche di g. pura, la quale cessò per qualche tempo di interessare i matematici, le cui menti erano anche assorbite dal fascino del nuovo calcolo infinitesimale.

Ricordiamo tra i nomi di geometri che coltivarono anche la g. pura quelli del p. Girolamo Saccheri (1667-1733), che passò alla storia come uno dei precursori della g. non euclidea per avere tentato una dimostrazione del V Postulato di Euclide con riduzione all'assurdo, costruendo così un primo corpo di teoremi basati su postulati diversi da quelli di Euclide; e i nomi di B. Pascal (1623-62) e C. Desargues (1593-1661) come cultori di ricerche che trovarono il loro posto in quella che dal sec. XIX viene chiamata la « g. proiettiva ».

IV. La geometria dei secc. XVIII e XIX. – Dopo l'invenzione, in certo senso rivoluzionaria, della g. analitica bisogna giungere alla fine del sec. XVIII per trovare delle idee essenzialmente nuove nella g., che lascino una traccia durevole nei tempi successivi. Infatti si fa risalire a quell'epoca la nascita di una nuova dottrina: la *g. proiettiva*. I prodromi di essa si trovano nei lavori di Monge (1746-1818); tra i fondatori propriamente detti vengono annoverati Poncelet (1788-1867), Chasles (1793-1880), Steiner (1790-1863).

Anche nel caso della g. proiettiva si verifica un fenomeno frequente per le dottrine geometriche, e che non abbiamo mancato di rilevare a proposito della g. analitica: la nuova dottrina nasce in un primo tempo come « metodo », come strumento per accrescere il campo della conoscenza, per inventare nuovi teoremi e scoprire nuove proprietà. Viene introdotta una operazione in certo senso nuova (la proiezione) che permette di trasformare una figura in un'altra e quindi di dedurre le proprietà della seconda da quelle della prima. In un secondo tempo il punto di vista viene modificato: la seconda figura non viene più considerata essenzialmente diversa dalla prima, ma viene posta in una stessa classe con essa; si studiano le proprietà che sono comuni alla prima ed alla seconda figura, cioè in altre parole, le proprietà della prima che non vengono cambiate dalla operazione di proiezione. Si apre così il campo a quella classificazione delle g. a partire dai gruppi di trasformazioni che sarà un concetto fondamentale, apportato alla matematica moderna dal Klein alla fine del XIX sec.

Pure alla fine del sec. XVIII si ha l'introduzione degli immaginari in g. e si può quindi ritrovare il germe di quella che è oggi chiamata la *g. algebrica*.

Ricordiamo che agli algebristi italiani del sec. XVI si era presentata la necessità di introdurre un opportuno simbolo che avesse la proprietà (non posseduta da nessun numero reale) di avere un quadrato negativo; essi erano stati quindi condotti alla introduzione di una « unità immaginaria i » che soddisfacesse alla equazione $i^2 = -1$. Di conseguenza venivano introdotti nell'algebra degli enti del tipo $a + bi$ (essendo a e b dei numeri reali) chiamandoli « numeri complessi » e si operava su questi simboli con le ordinarie regole formali dell'algebra. Rimaneva tuttavia insoluta la questione se queste definizioni fossero esenti da intrinseche contraddizioni, cioè se si potesse assicurare che il calcolo con tali simboli non conducesse mai a conseguenze assurde. Pertanto l'uso di questi simboli era sempre stato fatto dai matematici in stato di « coscienza dubbia » e giustificato soltanto « a posteriori » dalla riuscita dei singoli calcoli; la giustificazione della assenza di incoerenza intrinseca fu data, come abbiamo detto, interpretando geometricamente i simboli e le operazioni su di essi.

Tale interpretazione si fa risalire al Gauss (1777-1855); ricordiamo qui che a questo sommo matematico si deve pure la prima dimostrazione rigorosa di quello che viene chiamato il teorema fondamentale dell'algebra; la dimostrazione cioè del teorema: « ogni equazione algebrica i cui coefficienti sono numeri complessi (cioè numeri della forma $a + bi$ che abbiamo sopra nominati) può essere soddisfatta con numeri dello stesso tipo ». L'algebra preparava così i progressi fondamentali che la mettevano in grado di dare una risposta a problemi geometrici rimasti per decine di secoli senza soluzione: i cosiddetti problemi classici della trisezione dell'angolo, della duplicazione del cubo, della quadratura del circolo.

La risposta a tali problemi fu conseguita, come in tante altre occasioni in matematica, anzitutto con la presa di coscienza della necessità di una precisazione di enunciati: rilevando cioè che perché il problema abbia senso è assolutamente necessario precisare quali siano gli elementi dati e quali siano gli strumenti ammessi per la costruzione delle soluzioni. Poiché a seconda che questi strumenti siano soltanto la riga e il compasso (i cosiddetti strumenti elementari) oppure siano altri di maggior portata escogitati dai geometri attraverso i secoli, a seconda che i dati si limitino agli elementi del problema oppure siano anche altre figure accessorie, le possibilità di soluzione variano notevolmente. Premesse queste precisazioni, si ha che la possibilità di costruire le soluzioni di un problema con la sola riga ed il compasso è ricondotta alla possibilità di ridurre il problema alla soluzione di equazioni algebriche risolubili con sole estrazioni di radici quadrate (in numero finito). In tal modo si può dare risposta negativa alle due questioni della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo, nel senso che la loro risoluzione è impossibile con i soli strumenti che abbiamo chiamato elementari (riga e compasso). Per quanto riguarda la quadratura del cerchio (cioè la costruzione di un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio dato) la risposta, beninteso negativa, era ottenuta soltanto in tempi successivi e solo dopo la dimostrazione del fatto che il numero π (pi greco), rapporto della circonferenza al diametro, non può soddisfare a nessuna equazione algebrica a coefficienti interi (come suol dirsi, è un numero « trascendente »).

Nel corso del sec. XIX la teoria delle funzioni di variabile complessa, teoria tra i cui principali fondatori vengono annoverati il Cauchy (1789-1857) ed il Weierstrass (1815-97), diede la possibilità alla g. di estendere al massimo possibile il concetto di curva algebrica.

Invero già dalla fondazione della g. analitica vennero considerati i luoghi di punti del piano le cui coordinate soddisfano ad un'equazione algebrica; tuttavia può presentarsi il caso che ad una data equazione non corrisponda nessun punto del piano, ed in generale il comportamento di tali curve trae le sue ragioni dalle proprietà di funzioni di variabile complessa. In altre parole, le più profonde proprietà di tali enti si ottengono considerando una curva, in modo del tutto astratto, come insieme delle coppie di numeri complessi x ed y che soddisfano ad una equazione algebrica $f(x, y) = 0$. Si ha così un ente che non corrisponde più al significato di «curva» quale siamo abituati a considerare e che certo non ammette rappresentazioni geometriche le quali rispondano a parole di questo significato. Tuttavia a questo ente vengono ancora applicati i vocaboli geometrici (p. es. si chiama «punto» una coppia di numeri complessi che soddisfa l'equazione, anche se a questa coppia non corrisponde e non si può far corrispondere nessun punto nel senso abituale del termine). Tuttavia le proprietà di questi enti astratti forniscono le vere ragioni delle proprietà di molte fra le abituali curve considerate dalla g. analitica.

Al Gauss, già nominato, si devono pure gli inizi della g. differenziale delle superfici, che doveva diventare il nucleo della g. differenziale moderna.

Egli considera la superficie come descritta nello spazio da un punto P le cui coordinate cartesiane x, y, z siano date in funzione di due variabili: u e v. Queste risultano quindi coordinate intrinseche del punto P considerato appartenente alla superficie (si pensi p. es. alle coordinate geografiche, latitudine e longitudine di un punto sulla superficie terrestre); la distanza di un punto P della superficie da un altro punto P' le cui coordinate differiscano di poco da quelle di P (cioè siano $u + du$, $v + dv$) è data dalla radice quadrata di un'espressione di secondo grado nei differenziali du e dv; tale espressione di secondo grado viene chiamata «la metrica» della superficie e risulta di importanza fondamentale non solo per la misura della distanza di due punti P e P' infinitamente vicini ma anche per la misura dell'angolo formato da due curve che passano per uno stesso punto e per la misura della lunghezza di una linea tracciata sulla superficie.

Si ottiene così una classe di proprietà della superficie che vengono dette «intrinseche» alla superficie stessa; esse risultano invarianti per flessione, cioè non variano qualora la superficie si immagini materializzata in una sorta di velo perfettamente flessibile ed inestendibile e venga variato il suo atteggiamento nello spazio senza lacerazioni o duplicazione o stiramenti. Così, p. es., le proprietà di questo genere della superficie laterale di un cilindro sono quelle del piano perché tale superficie si può sempre immaginare (opportunamente tagliata lungo una generatrice) distesa sul piano con le modalità di cui sopra.

Questi concetti vennero estesi dal Riemann (1826-1866) dalle due alle tre dimensioni. In questo ordine di idee egli fondò la g. di uno spazio tridimensionale assegnando in esso un sistema qualunque di coordinate (nel senso che abbiamo precisato sopra, cioè come un sistema di convenzioni che facciano corrispondere ad un punto dello spazio una terna di numeri) e assegnando poi una «metrica», cioè una espressione che dia la distanza tra due punti infinitamente vicini.

L'assegnazione della «metrica» dello spazio in ogni suo punto permette di costruire la g. di esso, in due distinti tempi: un primo tempo in cui viene costruita la «g. locale», cioè vengono misurate le distanze tra due punti infinitamente vicini e l'angolo fra le direzioni di due curve in un punto; un secondo tempo in cui le varie g. locali, costruite attorno ad ogni singolo punto, vengono confrontate tra loro e lo spazio viene, per così dire, «organizzato» in un tutto unico, da disgregato che era in singole parti infinitesime. Con la g. così costruita vengono a presentarsi in ogni punto dello spazio delle «curvature» cioè degli invarianti numerici che sono analoghi alle curvature di una curva o di una superficie; tali invarianti, malgrado il loro nome, sono delle proprietà intrinseche dello spazio e quindi hanno significato in esso, senza che questo debba immaginarsi immerso in spazi ad un numero maggiore di dimensioni. Tali curvature sono tutte nulle se nello spazio vale la g. euclidea e viceversa.

Si costruiscono così dei sistemi di g. più vasti della ordinaria g. euclidea e logicamente coerenti, in cui la g. euclidea rientra come caso particolare. La loro intrinseca coerenza è assicurata dall'impostazione analitica che è data alla g. stessa, giacché è l'analisi matematica che fornisce i mezzi logici per l'organizzazione del sistema scientifico, lasciando alla g. il compito di suggerire i significati dei concetti che si trattano.

L'impostazione data dal Gauss e dal Riemann venne in seguito continuamente generalizzata in più modi, dando origine ad un intero corpo di dottrina: la g. differenziale.

Per accennare soltanto a questi concetti, diremo che si può dare non soltanto la «metrica» dello spazio in ogni suo punto, ma anche la «connessione» cioè la legge con la quale vengono organizzate tra loro le g. degli intorni dei diversi punti. Oppure si possono studiare le proprietà che risultano invarianti non soltanto per piegamenti delle superfici (come abbiamo detto sopra) e per trasformazioni analoghe se si tratta di spazi a un numero maggiore di dimensioni, ma anche per trasformazioni più generali.

Non si può passare sotto silenzio il fatto che la g. differenziale ha fornito lo strumentario per la formulazione della «teoria della relatività» di Einstein. Il processo logico per cui questo è avvenuto si può brevemente riassumere come segue: dal punto di vista della fisica-matematica ogni osservatore fa la sua descrizione dell'Universo che lo circonda mediante un determinato sistema di riferimento. Tale sistema di riferimento (p. es. formato da una terna di assi cartesiani e da un orologio) non è ignorabile, neppure per principio, e permette di associare ad ogni «evento» dell'Universo una quaterna di numeri. Ogni legge viene quindi tradotta in forma analitica come una equazione legante cosiffatte quaterne. Essa però può divenire legge obbiettiva (cioè valida per tutti gli osservatori e non soltanto per il singolo che l'ha formulata) soltanto se è espressa in modo che abbia la stessa forma analitica per qualunque cambiamento di coordinate. Pertanto la g. che va cercando le «vere» proprietà delle figure, non quelle che risultano dalla particolare posizione del sistema di riferimento, era la dottrina più adatta per fornire gli strumenti per la formulazione delle leggi fisiche così concepite.

V. Il «Programma di Erlangen». – Negli sviluppi della g. del sec. XIX, che abbiamo brevemente e sommariamente descritto, può apparire che il vocabolo g. venga inteso in senso sempre più difforme dal senso classico e legato ad esso da anologie sempre più deboli; le ramificazioni dal ceppo originario si allontanano reciprocamente sempre di più e si differenziano sempre più sensibilmente. Tuttavia nel 1872 un lavoro di Felix Klein (1849-1925), il famoso «Discorso inaugurale» (che viene comunemente indicato come il «Programma di Erlangen»), diede una visione sintetica dello sviluppo della g. alla luce di un concetto divenuto ormai classico e fondamentale in tutta la matematica; tale concetto è il concetto di «gruppo di operazioni».

Si dice che un insieme di operazioni è un «gruppo» (la parola ha un significato tecnico preciso e non è sostituibile con sinonimi) se nell'insieme accanto ad ogni operazione è contenuta anche l'inversa, cioè l'operazione che applicata dopo un'altra distrugge l'effetto di quest'ultima, e se l'applicazione successiva di due operazioni produce un effetto che è ottenibile con l'applicazione di un'unica operazione dell'insieme. P. es., consideriamo una figura F e consideriamo un primo movimento rigido che la porti da una prima posizione ad una seconda, poi un altro movimento rigido che la porti dalla seconda posizione alla terza. Manifestamente questo risultato finale (passaggio dalla prima posizione alla terza) è ottenibile con un solo movimento (diverso da ognuno dei primi due). Inoltre accanto ad ogni movimento che porta la figura da una posizione ad un'altra, ne esiste un altro che riporta la figura dalla seconda posizione alla prima. Si esprime tutto ciò brevemente dicendo che «i movimenti rigidi dello spazio formano un gruppo».

Orbene per comprendere l'idea direttrice del lavoro di Klein consideriamo un qualunque teorema di g. elementare; p. es., consideriamo un quadrato Q e la proprietà, conseguenza del Teorema di Pitagora, che « il quadrato costruito sulla diagonale di Q ha area doppia di quella di Q ». Questo teorema è chiaramente vero indipendentemente dalla posizione che Q assume nello spazio; esso rimane pure vero se a Q sostituiamo un altro quadrato Q' di dimensioni diverse, cioè una figura « simile » a Q. Potremo quindi dire che tale teorema è una proprietà del quadrato che non varia quando questo venga trasformato in una figura simile; brevemente « è invariante per similitudine ». Viene così introdotto un insieme di operazioni che formano un gruppo (le similitudini) e si ottiene una definizione della g. elementare come lo studio delle proprietà delle figure dello spazio che sono invarianti per il gruppo delle similitudini.

Analogamente si ha un altro gruppo di operazioni, le « omografie », e ad esso corrisponde un'altra dottrina: la g. proiettiva che studia le proprietà delle figure che risultano invarianti per il gruppo delle omografie. Tale g. ci dà, p. es., le proprietà delle curve che sono sezioni piane del cono rotondo (sezioni coniche o, brevemente, « coniche ») perché si dimostra che la proiezione è una particolare omografia e d'altra parte una curva cosiffatta può sempre considerarsi come proiezione di una circonferenza.

La g. proiettiva conduce anche all'introduzione di certe coordinate (« coordinate proiettive ») che risultano essere una generalizzazione delle ordinarie coordinate cartesiane e che sono le più adatte per lo studio delle proprietà delle figure che interessano la g. proiettiva. Le omografie risultano caratterizzate in modo preciso dal modo di operare sulle coordinate proiettive; invero le coordinate proiettive di un punto P' corrispondente di un punto P di una omografia risultano essere funzioni razionali di primo grado di quelle di P.

In immediata continuità con questa visione sorse l'idea (dovuta a L. Cremona [1830-1903]) di un gruppo di trasformazioni più generali delle omografie: le cosiddette « trasformazioni birazionali » nelle quali le coordinate di un punto P' sono funzioni razionali e razionalmente invertibili di quelle di P. Nasceva così la g. algebrica nel senso della scuola italiana come studio delle proprietà delle funzioni algebriche che sono invarianti per trasformazioni birazionali.

Il concetto di trasformazione può ancora ulteriormente estendersi, dando origine ad un'altra branca della g.: la *topologia*, studio delle proprietà delle figure che sono invarianti per trasformazioni biunivoche e continue. P. es., sono di competenza di questa branca le proprietà di una figura che non cambiano quando questa si immagini realizzata da materia plastica indefinitamente deformabile e si immagini di deformare la figura senza lacerazioni e sovrapposizioni; in questo ordine di idee sono equivalenti un cubo ed una sfera; vengono così studiate le proprietà dei nodi e delle trecce ed altre numerosissime proprietà che trovano applicazioni nei campi più disparati della matematica.

VI. Analisi e critica del continuo. – Si attribuisce alla fine del sec. XIX la piena acquisizione da parte dell'analisi matematica del concetto di continuo numerico, con la costruzione in modo autonomo del concetto rigoroso di numero reale, svincolandolo da ogni riferimento al continuo geometrico. Venivano quindi sottoposti a revisione gli sviluppi ed i teoremi dell'analisi prima considerati come evidenti, oppure scorrettamente dimostrati per un ingenuo od inavvertito ricorso ad un possibile significato geometrico degli enti che entravano negli enunciati. Si riproponevano quindi alla matematica (dotata di ben altri mezzi e di ben altra esperienza) i problemi di rappresentazione analitica degli enti geometrici che erano stati alla base del metodo della g. analitica.

La questione assumeva un andamento prevalentemente critico, per il confronto con le vecchie idee alla luce delle nuove ed autonome concezioni che avevano condotto alla definizione di continuo numerico in piena indipendenza logica dalla g. Uno dei risultati più clamorosi è dovuto al Peano (1858-1932) ed è relativo al concetto di « curva » quale la g. lo accetta e lo usa prendendolo dall'immaginazione spaziale; orbene si era sempre pensato che il concetto analitico di « funzione continua » fosse pienamente corrispondente a tale concetto di curva; per primo invece il Peano dimostrò che si poteva dare un esempio di « curva continua » nel senso dell'analisi matematica che non corrispondeva affatto al concetto di « curva » fino allora usato dalla g., in quanto riempiva tutto un quadrato.

In questo ordine di idee la critica fu protratta molto lontano e fu condotta a fondo nei riguardi della rappresentazione analitica dei concetti geometrici, con ricerche che quasi si riallacciano alla cosiddetta « teoria degli insiemi » di Cantor da un lato, ed alla logica pura dall'altro.

VII. Critica dei principî della geometria ed assiomatizzazione. – Risale alla fine del secolo scorso l'inizio del processo di critica dei principî della g. e di analisi della vera portata degli assiomi e dei postulati che la fondano. Tale processo di analisi critica prese le mosse sostanzialmente dalla raggiunta sicurezza della « validità » delle g. non euclidee (v.), sicurezza ottenuta attraverso la g. differenziale e la g. proiettiva. Si giungeva così, attraverso le ricerche di numerosi autori, tra i quali citiamo Peano, Pasch, Hilbert, a sistemazioni assiomatiche della g., e a trattazioni nelle quali il perfetto rigore veniva ottenuto col soddisfare a due requisiti principali: 1) la enumerazione di *tutti* i concetti che si assumono come primitivi (cioè che non si definiscono) e di conseguenza la definizione di tutti gli altri concetti; 2) la enunciazione esatta di *tutti* i postulati, cioè delle proposizioni che non vengono dimostrate, e di conseguenza la dimostrazione rigorosa di tutte le altre.

Vennero così creati vari sistemi di postulati, posti a base delle trattazioni della g.; alcuni di essi si ispirano al programma di introdurre il minimo numero possibile di concetti primitivi e di postulati; altri invece seguono abbastanza da vicino la trattazione euclidea (Hilbert) introducendo le esigenze di rigore laddove quella si affidava alla semplice intuizione.

VIII. La geometria moderna. – Gli sviluppi attuali della g. si possono in modo molto grossolano sostanzialmente attribuire a tre grandi correnti: la g. algebrica, la g. differenziale e la topologia.

Nella prima vanno accentuandosi le ricerche tendenti a collegarla sempre più all'algebra astratta, concepita come teoria generale delle operazioni e quindi essa va sempre più distaccandosi dal significato geometrico originale. Nella seconda vanno accentuandosi pure le ricerche sempre più astratte, con l'approfondimento dei principî fondamentali che stanno a base della costruzione del concetto di spazio (o varietà) e lo sviluppo della teoria delle « connessioni ». Infine, anche la topologia si svincola sempre di più dal significato e dai teoremi originari per ricercare delle formulazioni astratte, in termini di simboli e di ideografie logiche.

In tutte queste tendenze è da vedere non una sterile passione di generalità e di astrattezza ma soprattutto la ricerca di un rigore deduttivo che deve trovare la sua sicurezza non tanto nell'intuizione spaziale (a cui la g. non può più fare appello) ma nel rispetto assoluto delle regole della logica. In altri termini il geometra non può più essere avvertito dalla intuizione sulla validità o meno delle sue conclusioni, non può più metterle a confronto con la realtà, ma deve affidarsi allo strumento con il quale egli le conquista.

Dallo sviluppo storico della g. si è visto come questa dal primitivo significato di « scienza dello spazio » o « scienza della estensione » si sia mutata in una scienza del tutto astratta che, non tanto « trova » il suo oggetto, ma se lo « pone » con una scelta (entro certi limiti) arbitraria. Si può dire in questo senso che il significato dei concetti e dei nomi della g. ha un valore soltanto tradizionale, e che le relazioni iniziali (postulati) sono soltanto « suggerite » ma non imposte alla realtà esterna. Infatti nella accezione classica si domandava ai postulati di essere « evidenti », cioè di rendere ciò che sembrava essere il contenuto di una osservazione immediata eseguita sulla realtà. Oggi invece si domanda ad un sistema di postulati di essere « indipendenti » e « compatibili ».

La ricerca dell'indipendenza è in un certo senso non sostanziale: se infatti nell'elenco delle proposizioni che si enunciano come postulati ve ne fosse una che si può dimostrare a partire dalle precedenti sarebbe errato il nome che si dà alla proposizione (sarebbe infatti un teorema e non un postulato) ma l'insieme delle proposizioni affermate non sarebbe contraddìtorio. Più grave sarebbe invece il caso che un sistema di postulati fosse « incompatibile », cioè il caso in cui un postulato equivalesse alla negazione di un altro (o di altri) oppure di una sua (o loro) conseguenza: il sistema, in questo caso, sarebbe contradditorio.

Inoltre a questo secondo caso, cioè alla verifica se un sistema di postulati sia o meno compatibile, si può ridurre anche il primo, cioè la verifica se i postulati di un sistema siano o no indipendenti. Infatti se un dato postulato fosse dipendente dai precedenti, l'affermare i primi equivarrebbe implicitamente anche ad affermare l'ultimo, che è loro conseguenza, quindi sarebbe incompatibile il sistema formato dai primi e dalla negazione dell'ultimo.

In questo senso si svolsero i tentativi del p. Girolamo Saccheri per la dimostrazione del V Postulato di Euclide, ed in questo stesso senso si raggiunse la certezza dell'indipendenza del V postulato dai primi, con la certezza cioè della compatibilità di un sistema di postulati formato dai primi e dalla negazione del V. Il problema che così si viene a porre alla g. è allora essenzialmente logico e non è specifico per essa: si pone ugualmente per ogni sistema di proposizioni liberamente poste, sulle quali si intende di operare con leggi convenzionali e leganti dei termini sul cui significato non si prende posizione. Avviene lo stesso, p. es., per il gioco degli scacchi o per altri giochi analoghi.

Si supera la difficoltà, almeno momentaneamente, considerando i concetti per così dire totalmente « vuoti » e poi cercando se esistono dei sistemi di enti i quali possano essere interpretati come i concetti così posti e le cui relazioni mutue corrispondano ai postulati enunciati. P. es., si conviene che si intenda per « punto » una terna di numeri, per « piano » un'equazione di I° grado in tre variabili, per « retta » un sistema di due equazioni cosiffatte e così via; allora ai postulati abitualmente posti corrispondono proprietà dei numeri reali e dei sistemi di equazioni; la compatibilità del sistema di postulati è quindi garantita dalla validità delle leggi dell'analisi matematica. Si realizza così una g. come giuoco logico astratto, il cui valore di verità sta non tanto nel rendere le proprietà dello spazio reale quanto nella stretta connessione dei teoremi dedotti dalle premesse poste. Tale posizione, che potrà sembrare a taluno del tutto astratta e sterile, è tuttavia stata raggiunta appunto in conseguenza delle antinomie e degli errori a cui ha portato l'affidare l'enunciazione dei postulati a (supposte) constatazioni delle proprietà di un supposto « spazio reale ».

Ciò tuttavia non porta necessariamente come conseguenza che l'intuizione spaziale non abbia più alcun compito nella costruzione della g., né che questa non sia più applicabile agli oggetti del mondo fisico.

Per quanto riguarda il primo argomento si può dire che, benché la g. moderna abbia rinunciato a fissare i postulati in quanto « imposti » da osservazioni eseguite sul mondo esterno, tuttavia l'intuizione geometrica ha ancora un gran posto sia nella scelta del sistema di postulati sia nel suggerire la via nelle dimostrazioni. Soltanto il compito dell'intuizione è stato in certo senso degradato dal piano logico ad un altro che è molto prossimo al piano estetico, in quanto sull'intuizione così concepita molto influiscono l'immaginazione, la fantasia creatrice ed il gusto del singolo ricercatore.

Per quanto riguarda infine l'applicazione della g. agli oggetti materiali del mondo reale, appare che la questione della « validità » di una g. sia sullo stesso piano della « validità » di una o un'altra teoria fisica. È ovvio che nessun oggetto reale realizza « in toto » le proprietà di una figura geometrica. In altre parole: p. es. non è possibile enunciare una proposizione del tipo: « questo oggetto è una sfera », ma piuttosto è possibile dire: « entro questi limiti di approssimazione delle misure, le proprietà di questo oggetto sono quelle della sfera geometrica ». In tale ordine di idee si comprende come diverse « g. » possono essere usate per rendere le proprietà di un determinato oggetto (che può essere anche l'Universo o una parte di esso), così come diverse teorie gravitazionali possono essere usate per rendere il comportamento del sistema solare ed essere contemporaneamente « valide » entro determinati limiti di approssimazione, senza che ciò implichi contraddizione.

BIBL.: Un orientamento di carattere generale può essere trovato nella « Enciclopedia delle matematiche elementari » (a cura di L. BERZOLARI, G. VIVANTI e D. GIGLI, Milano 1930), il cui II vol. è dedicato alla g. Collegamenti di questioni geometriche con la storia, la filosofia e la didattica si troveranno in F. ENRIQUES, *Prinzipien der Geometrie*, in « Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften », III, 1, Lipsia-Berlino 1907; ID. (e collab.), *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, 2 voll., Roma 1925; ID., *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Bologna 1928 (soprattutto negli aa.: 1-5, 7-8, 10-11, 16). Più precisamente dedicate ai fondamenti della g. sono le opere seguenti: M. PASCH-M. DEHN, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Berlino 1926; F. KLEIN, *Elementarmathematik von höherem Standpunkte aus.*, ivi 1928; D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 7ª ed., ivi 1930; B. L. VAN DER WAERDEN, *Einführung in die algebraische Geometrie*, ivi 1939; G. DE ROBINSON, *The Foundations of Geometry*, Toronto 1940; T. WAHLEN, *Abstrakte Geometrie*, 2ª ed., Lipsia 1940; e con più stretti collegamenti a questioni di logica e psicologia: V. BORNSTEIN, *Geometrical Logic*, Varsavia 1939; T. GREENWOOD, *Essais sur la pensée géométrique*, Ottawa 1943; E. BOREL - R. DELTHEIL, *La géométrie et les imaginaires*, rist., Parigi 1948; F. GONSETH, *La Géométrie et le problème de l'espace*, 6 voll., Neuchâtel 1948-55; per il problema della conoscenza, v.: P. HOENEN, *De noetica geometriae, origine theoriae cognitionis*, Roma 1954. Discussioni strettamente connesse a questioni filosofiche sono contenute in opere che riguardano la g. non euclidea, tra le quali ricordiamo: J. L. COOLIDGE, *The Elements of non Euclidean Geometry*, Oxford 1927; G. FANO, *G. non euclidea*, Bologna 1935. Per quanto riguarda le opere che possono dare un'inquadratura di carattere storico segnaliamo: G. LORIA, *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, 4ª ed., Padova 1931; J. L. COOLIDGE, *A History of Geometrical Methods*, Oxford 1940; E. T. WHITTAKER, *From Euclid to Eddington*, Nuova York 1949.

C. F. Manara