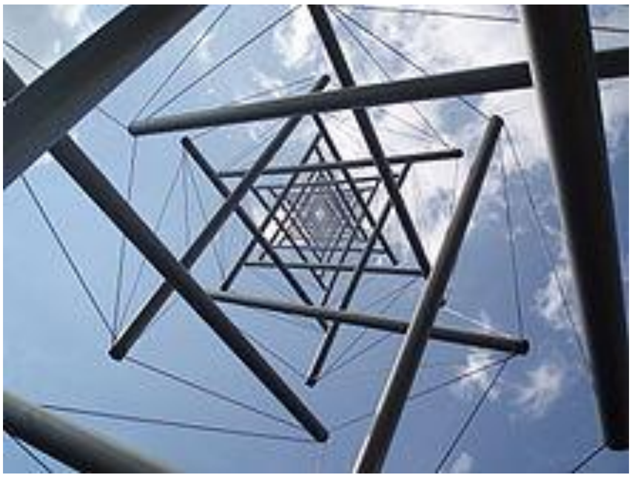


Needle Tower II by Kenneth Snelson (1969) at the Kröller-Müller Museum in the Netherlands

Files reimpaginati febbraio 2016

PROGRAMMA 063001 Il programma di cui al titolo del File vorrebbe raccogliere le riflessioni sparse qua e là, in vista della risposta alla domanda che figura in titolo ad un capitolo del libro di TOTH: "*Di che cosa parlano i geometri quando enunciano le loro proposizion*i?" Per questa ragione ho dato come titolo alla cartella il sintagma DICHECO, in parte anche per suscitare le curiosità o per facilitare la memorizzazione di una parola strana e priva di significato abituale.

A dire il vero, la risposta, almeno parziale, sta nel celebre passo di Platone (della Repubblica), ma c'è forse un'ulteriore riflessione da fare, riflessione che può avere degli addentellati tanto nella direzione della ricerca nell'ambito della epistemologia matematica, quanto nella didattica di questa dottrina. La riflessione dovrebbe infatti riguardare le immagini mentali che accompagnano quasi sempre i concetti e che hanno una grande importanza nel lavoro creativo ed in particolare nella costruzione dei concetti della geometria.

Vorrei infatti limitare le mie considerazioni alla geometria; intendendo questo termine secondo la accezione moderna abituale, senza voler infognarmi nella discussione relativa alla genesi del termine stesso, e nella citazione classica di Erodoto e delle piene del Nilo. 070301

I geometri si servono di figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui quelle sono le immagini, ragionando sul quadrato in sé, sulla diagonale in sé, e non su quelle che disegnano. Lo stesso si dice per tutte le figure che essi modellano o disegnano, di cui si *servono come immagini (a guisa di ombre o di immagini riflesse sulle acque) cercando di vedere certe verità che non si possono vedere se non col pensiero*. Platone. Repubblica. 510 d, e.

(CFM 2002) Ho scritto in passato (*) che il "fare geometria" implica porsi razionalmente nei rapporti dell'ambiente in cui siamo e degli oggetti che vi si trovano, e che noi maneggiamo e manipoliamo. Ed in questo contesto l'avverbio "razionalmente" vorrebbe significare che intendiamo giungere ad una conoscenza di questi enti che non si limiti alla pura sensazione, ma permetta anche di ottenere, attraverso la deduzione, la certezza dell'esistere di altri elementi , o di relazioni tra essi, che non appartengono al campo della nostra attuale percezione.

1 - Nel caso della geometria la conoscenza cui accennavamo si ottiene e si concreta in vari stadi, che si possono descrivere sommariamente e grossolanamente nel modo seguente:

a) Un'operazione che si potrebbe chiamare di "astrazione" con la quale noi concentriamo la nostra attenzione soltanto su certi contenuti della nostra percezione, facendo astrazione da altri, pure presenti: per esempio se osserviamo un dado da gioco, di forma cubica, dal punto di vista della geometria noi prescindiamo dal suo colore , o dal suo peso, o dalle proprietà chimiche della materia della quale esso è costituito.


CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
MONOGRAFIE DI MATEMATICA APPLICATA

GINO FANO

GEOMETRIA NON EUCLIDEA

INTRODUZIONE GEOMETRICA
ALLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1935 - XIII

b) Insieme con l'operazione di astrazione di cui si dice in a) viene costruita un'immagine mentale (che alcuni chiamano anche immagine "ideale") dell'oggetto percepito. Tale immagine non rappresenta tutte le proprietà degli oggetti stessi, ma risulta possederne anche alcune che sono frutto di elaborazione, di arricchimento, di raffinamento, di operazioni che si potrebbero pittorescamente descrivere come di "scarnificazione". Per esempio viene così costruita l'immagine del "punto geometrico"; in modo analogo viene costruita l'immagine della "retta infinita" e l'insieme di immagini collegate ad una proprietà, considerata giustamente come fondamentale, che è spesso denominata "continuità" delle figure geometriche. È facile osservare che l'esperienza materiale concreta e quotidiana porta ad escludere che queste immagini corrispondano a qualche oggetto materiale, effettivamente percepibile dai nostri sensi.

A questo proposito è interessante citare qui le parole di G. Fano, illustre cultore di geometria: *"I concetti geometrici* - scrive Fano - , *acquisiti a mezzo di elementi sensibili, sono puramente astratti. Non esiste nel mondo fisico nulla che corrisponda con precisione ai concetti astratti di retta e di triangolo; non si possono quindi "misurare" gli angoli di un triangolo (astratto), né affermare che nello spazio fisico sia* verificata *una determinata geometria (astratta). Le proprietà di posizione e grandezza dei corpi possono essere rappresentate da una teoria astratta soltanto in modo più o meno approssimato"* [Gino Fano. Geometria non euclidea. Introduzione geometrica alla teoria della relatività. Bologna (Zanichelli), 1935. Pag.81.] In rete: http://mathematica.sns.it/opere/406/

Tuttavia è anche facile osservare che gli enti costruiti dalla nostra mente non sono totalmente cervellotici, e che la loro costruzione non costituisce un comportamento arbitrario e gratuito: tali immagini sono bensì frutto di una certa elaborazione mentale, ma questa non è ingiustificata; anzi costituisce una specie di "completamento" dell'insieme delle sensazioni fisiche, e di "passaggio al limite" nei riguardi delle manipolazioni che noi eseguiamo sugli oggetti materiali.

Uno dei casi più importanti di costruzione di immagini mentali, dalle quali parte poi la procedura di costruzione dei concetti, espressi verbalmente, è l'immagine di quello che viene chiamato il "continuo geometrico". Questa immagine trae ovviamente la sua origine da sensazioni oculari e tattili; ma la fisica insegna che la struttura della materia che noi osserviamo e manipoliamo è essenzialmente granulare e discontinua. Pertanto la classica immagine della figura geometrica continua, priva di lacune, come la retta, appare chiaramente come nostra elaborazione (ripetiamo non arbitraria né cervellotica) dell'insieme delle nostre sensazioni. Osserviamo tuttavia che questa immagine del "continuo geometrico" risulta poi essere alla base della costruzione dei concetti fondamentali dell'Analisi matematica: primo fra tutti il concetto di numero reale.

Analoga osservazione può essere fatta a proposito dell'immagine mentale di quel fenomeno che viene chiamato "flusso continuo del tempo" o anche "movimento continuo". È noto infatti che la continuità del movimento, quale ci appare, per esempio, nelle ordinarie immagini forniteci dal cinematografo, è il risultato delle proprietà fisiologiche del nostro organo della vista e delle proprietà delle trasmissioni al nostro cervello delle immagini fisiche che la nostra retina registra.

NOTA. Discussioni e citazioni si trovano nei File contenuti nelle cartelle DICHECO (di che cosa parlano i geometri) e DIVUS T (NdR Nel Sito, sezione Inediti, 9606. *Note sulla conoscenza nella filosofia tomistica*.)

A questo punto è di regola la classica citazione di Platone già riportata:*…I geometri si servono di figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui quelle sono le immagini, ragionando sul quadrato in sé, sulla diagonale in sé, e non su quelle che disegnano. Lo stesso si dice per tutte le figure che essi modellano o disegnano, di cui si servono come immagini (a guisa di ombre o di immagini riflesse sulle acque) cercando di vedere certe verità che non si possono vedere se non col pensiero.* [Platone. Repubblica. 510 d, e.]

Rimandiamo ad un altro momento i commenti al pensiero qui espresso dal filosofo greco; basti osservare qui, per ora, che il problema di determinare "di che cosa parlano i geometri" era ben vivo nella problematica della filosofia greca.

2 - L'immagine costruita dalla nostra mente è la base da cui parte l'operazione della costruzione del concetto, il quale viene codificato ed espresso con simboli (verbali, scritti o grafici) ed è principio e fondamento della deduzione logica. Infatti la sola immagine non può essere fondamento per una deduzione certa: citiamo a questo proposito l'opinione di B. Spinoza: *"...la semplice immaginazione non implica per sua natura alcuna certezza, quale è connessa invece ad ogni idea chiara e distinta , ma, per poter essere certi delle cose che immaginiamo, si deve necessariamente aggiungere qualche altra cosa, cioè il ragionamento…"* [Baruch Spinoza. Trattato teologico-politico. Torino (Einaudi), 1972. Titolo originale: Tractatus theologico-politicus. Traduzione e commenti di Antonino Droetto e Emilia Giancotti Boscherini. Introduzione di quest'ultima. Pag. 82]

OSSERVAZIONE 1 - Ciò che abbiamo finora presentato è frutto di una sommaria analisi, la quale conduce a distinguere vari livelli nelle operazioni che la nostra mente compie. Quindi in particolare il processo che conduce al concetto è stato qui descritto in forma discorsiva, e quindi con una necessaria successione cronologica; tuttavia non è detto che l'operazione mentale si realizzi esattamente con questa scansione temporale e che le operazioni che abbiamo qui presentate come distinte siano di fatto sempre separate nel tempo. (Fine dell'osservazione)

3 - Nel caso di quella che viene chiamata la "Geometria elementare" si potrebbe dire che essa si articola con una successione di operazioni: la costruzione di immagini mentali, la precisazione dei concetti, accompagnata dalla costruzione di un vocabolario preciso ed inequivocabile, la presentazione delle relazioni fondamentali, attraverso l'enunciazione di poche proposizioni non dimostrate (i postulati), ed infine la deduzione rigorosa di tutte le altre proprietà con l'impiego del linguaggio comune e delle leggi logiche che reggono il ragionamento ineccepibile; tutto ciò caratterizza la struttura della geometria classica: quella, per esempio, che ci viene presentata dalla geometria greca. In particolare si potrebbe dire che uno dei punti di partenza della geometria classica, che viene convenzionalmente chiamata euclidea, è fornito dalla immagine di corpo rigido (o oggetto rigido) e dalle nostre manipolazioni di oggetti cosiffatti.

La dimostrazione dei teoremi e la soluzione dei problemi è inoltre costantemente raggiunta con la realizzazione delle due procedure logiche correlative, di analisi e di sintesi, che già erano state oggetto di riflessione da parte di Aristotele, e che sono state ampiamente ricordate da Proclo e dalla geometria dell'epoca alessandrina. Tutto questo schema teorico trae la sua origine - come abbiamo detto - dalle osservazioni sugli oggetti che ci circondano e dall'elaborazione mentale di queste osservazioni. Appare pertanto del tutto naturale che le argomentazioni verbali siano molto spesso accompagnate o addirittura appoggiate su illustrazioni e disegni. Non è il caso di dilungarsi qui sul significato di questa pratica, che è del resto molto antica se già Platone la prende in considerazione in un celebre passo (già citato sopra) in cui tratta l'ardua questione dell'oggetto della geometria. Sta di fatto che, a quanto pare, il disegno accompagna quasi sempre le operazioni della geometria, a tal punto che spesso il fare geometria viene confuso con il tracciare dei disegni.

Tuttavia, anche se le cose non stanno così, rimane pur vero che il tracciare disegni risulta essere spesso utile per il ragionamento, perché questa pratica aiuta a fissare le idee, e spesso suggerisce procedure di dimostrazione o di risoluzione di problemi. Addirittura ci si potrebbe spingere fino a dire che "le figure sono come formule disegnate"; espressione questa che pare venga attribuita ad un grande matematico del passato, e che potrebbe diventare molto pericolosa, perché potrebbe indurre qualcuno ad ignorare la differenza essenziale che corre tra la formula dell'algebra ed il disegno della geometria: infatti la formula può essere il punto di partenza di un ragionamento rigoroso, che si esplica applicando le leggi sintattiche dei simboli usati; mentre il disegno può solo stimolare, suggerire l'argomentazione logica indispensabile.

A queste osservazioni è forse utile aggiungere anche ulteriori riflessioni, per convalidare le precauzioni che si rendono necessarie per fare buon uso del disegno, nel momento in cui si vuole fare geometria: infatti occorre anche ricordare che il disegno è fatalmente sempre parziale, e può rappresentare soltanto un numero limitato di casi particolari.

OSSERVAZIONE 2 - A proposito dell'atto cognitivo, e della conseguente procedura di apprendimento, è noto che diverse teorie correnti tra i cognitivisti odierni distinguono diversi risultati di atti (ovviamente) interiori della nostra mente, parlando per esempio di *script* e di *frame*.

Riporto qui di seguito alcune osservazioni e riflessioni sul libro: Carla Antoniotti. La didattica del pensiero. Progetto Frame. (Per la scuola elementare e la continuità). Edizioni Omega.
(NOTA. Le citazioni dal libro suddetto saranno precedute dalla sigla ANT e chiuse con il simbolo $$). Le riflessioni complete sono nel file FRAME (*NdR*: vedere nel Sito, nella sezione Inediti: 9401*La didattica del pensiero)*.

La Antoniotti presenta questi due concetti nella forma seguente:
a) per quanto riguarda lo "script", leggiamo:

ANT (pag. 45). *"Lo script è una rappresentazione mentale schematica di eventi, costruita dall'individuo in rapporto a determinate esperienze personali e culturali.*

Si tratta in particolare di rappresentazioni che contengono sequenze di azioni routinarie (sic) e stereotipate, eseguite in un contesto situazionale secondo un ordine spazio-temporale e un concatenamento causale per il raggiungimento di uno scopo (Schank e Abelson, 1977).§§

b) Per quanto riguarda il "frame", leggiamo:

ANT *"D'altra parte M. Minski concepisce il FRAME, o quadro di rappresentazione concettuale, come una struttura di dati acquisiti durante l'esperienza per rappresentare ed anticipare concetti e situazioni del mondo (Minski, 1979). Il frame indica uno "schema" di pensiero che comprende elementi costanti e ricorrenti che consentono di generare inferenze e di espandere le conoscenze di base (?).*

Inoltre l'autore postula l'esistenza di un'architettura cerebrale e mentale [COME SE FOSSE LA STESSA COSA!] *organizzata gerarchicamente secondo modalità non lineari (?), in una vasta società di agenti, di strati di agenzie (?), nonché di fasce di livello suddivise in categorie quali: superiore, intermedia, inferiore, preposte tutte all'indagine concettuale. La fascia di livello inferiore corrisponde al rapporto che l'individuo stabilisce, interiorizza ed evoca rispetto alla funzionalità degli oggetti (?); manifestando azioni cognitive e relazioni emotive mirate egli sa costruire una cornice di rappresentazione degli oggetti. Secondo l'autore, per afferrare il significato più immediato delle "cose" l'individuo costruisce rappresentazioni mentali volte prima a decodificare la funzione degli oggetti (?), per completare una cornice di conoscenze basilari e proseguire all'arricchimento delle conoscenze."* $$
NOTA - Soltanto a pag.107 la Antoniotti trova l'opportunità di spiegare che :
ANT *"(Frame in inglese vuol dire "cornice") che organizza le conoscenze che hanno formato nella nostra testa una parola-concetto, ad esempio PAGLIACCIO."* $$

Non appare quindi arbitrario accostare l'analisi fatta sopra, che distingue tra "immagine" e "concetto", e quella dei cognitivisti moderni; appare poi sempre valido, anche in questo contesto, il contenuto dell'Oss. 1 (Fine dell'osservazione 2)

4 - Nel N. precedente abbiamo accennato alla procedura di dimostrazione delle proposizioni ed a quella di soluzione dei problemi. Già nella civiltà greca filosofi e matematici avevano meditato su questi argomenti; che sono fondamentali per ogni conoscenza scientifica della realtà: infatti ogni conoscenza cosiffatta si fonda sulla osservazione della realtà percepibile e sulla spiegazione della sua natura, spiegazione che ha nella deduzione il suo momento fondamentale. Pertanto tutti noi, che apparteniamo alla cosiddetta "civiltà occidentale", dobbiamo alla civiltà dell'antica Grecia non

soltanto il primo trattato scientifico che l'umanità possegga (quello degli "Elementi" di Euclide) ma anche la prima meditazione sulla portata e sul valore del nostro ragionare coerente.

La procedura codificata da Aristotele, da Euclide e poi da Proclo viene realizzata in due momenti, che vengono tradizionalmente chiamati di *analisi* e di *sintesi*. Essi si trovano chiaramente descritti per esempio nella voce "ANALISI" dell'Enciclopedia Treccani, voce compilata dal matematico italiano Federigo Enriques.

Tale procedura si trova descritta sostanzialmente anche nei testi moderni, sotto le diciture inglesi *Top down* e *Bottom up*; diciture spesso adottate anche da molti trattatisti italiani, dei quali non si sa se più ammirare il servilismo o deplorare l'ignoranza; voci di "dottori" le cui candide anime non sono mai state contaminate dal più piccolo dubbio che il pensiero scientifico rigoroso sia nato un po' prima della Coca Cola ed un po' lontano dal Connecticut o dall'Idaho.

Limitandoci per ora a considerare la procedura di *analisi* diretta alla soluzione di un problema geometrico, si può dire che essa parte dall'immaginare il problema risolto. Sia per esempio da determinare un elemento geometrico in base a certi altri elementi, che vengono abitualmente chiamati "dati": dall'immagine della situazione riguardante il problema risolto si deducono certe condizioni che devono essere soddisfatte dalla figura che si cerca. In tal modo dal problema enunciato (chiamiamolo *P*) nasce, per così dire, un secondo problema (chiamiamolo *P'*); può avvenire che si sappia risolvere il problema *P'*, e che, tra le sue soluzioni si trovi qualche elemento che conduce alla soluzione di *P*. Se ciò non avviene, si può di nuovo applicare la procedura di deduzione, ottenendo un problema *P''*, e così via, fino anche si giunga ad un problema che si sa risolvere. Dalla soluzione di quest'ultimo, facendo il cammino a ritroso, si può risalire alla soluzione del problema originario.

La procedura che si realizza con questo cammino a ritroso viene chiamata procedura di *sintesi*; in ogni stadio di essa si assume come dato il risultato di una deduzione, cioè una delle soluzioni di un problema della catena costruita con la procedura precedente. È da ricordare che la procedura di deduzione, messa in opera nell'analisi, mette in luce delle condizioni *necessarie* per la soluzione del problema originario; quindi le soluzioni di quest'ultimo vanno cercate tra quelle dei problemi dedotti.

OSSERVAZIONE 3 - A ben guardare, anche la procedura di soluzione dei problemi numerici con i mezzi dell'Algebra realizza i momenti di analisi e di sintesi di cui abbiamo detto, nei riguardi dei problemi geometrici.

Sia per esempio il problema di "trovare un numero il cui doppio uguagli il numero stesso aumentato di 5." Supponiamo il problema risolto, e chiamiamo il numero cercato col nome magico di x; se esso risolve il problema, si deve avere ovviamente: $2x = x + 5$.

Dall'ipotesi che x sia un numero, deduciamo che si può "trasformare" la relazione scritta, eseguendo dei calcoli che equivalgono a (anzi sono effettivamente) delle deduzioni logiche; si ottiene quindi, dopo tali deduzioni il risultato $x = 5$, con il quale ha termine la procedura di analisi. A questo punto dovrebbe avere inizio la procedura di sintesi. Nel caso semplicissimo in parola questa si limita ad una banale verifica; ma può avvenire che il risultato dei calcoli sia un numero che non soddisfa a tutte le condizioni del problema, a quelle esplicite ed anche a quelle sottaciute che si evincono dal contesto, più o meno immediato, del problema posto; per esempio può accadere che la procedura di analisi abbia dato come risultato un numero frazionario, mentre il contesto del problema trattato implicava che la soluzione fosse un numero intero; oppure abbia dato un numero negativo quando il contesto del problema richiedeva un numero naturale ecc. ecc.

È noto che l'abitudine didattica chiama "discussione" la procedura di sintesi; ma ovviamente il cambiamento di nome non cambia la natura logica della situazione; spesso confonde le idee, ma questo è un altro discorso. (Fine dell'Osservazione 3).

5 - Il noto sistema di convenzioni che viene abitualmente chiamato "Geometria analitica" permette di utilizzare il linguaggio dell'algebra per formulare relazioni geometriche; e quindi permette di formulare un problema geometrico per mezzo di equazioni algebriche. Alla luce di quanto è stato detto fin qui, con questi metodi i calcoli algebrici realizzano la procedura di analisi, e la discussione delle eventuali soluzioni dei problemi algebrici realizza la procedura di sintesi. Inoltre le convenzioni della Geometria analitica permettono di ottenere qualche precisazione sulla questione riguardante le costruzioni e gli strumenti di disegno con i quali vengono costruiti gli elementi geometrici che sono soluzioni di problemi.

È noto che, secondo una lunga tradizione, certi strumenti di disegno vengono chiamati "elementari": essi sono la riga (non graduata, senza tacche o segni) ed il compasso ad apertura variabile. E si conviene che questi strumenti siano impiegati in determinati modi: la riga per tracciare la retta determinata da due punti, o per determinare il punto intersezione di due rette o i punti di intersezione di una retta con una circonferenza; il compasso per tracciare una circonferenza di centro noto e di raggio dato. Non sono ammesse delle costruzioni "per tentativi": per esempio non è permesso determinare per tentativi una retta che passi per un punto dato, esterno ad una circonferenza data, e sia tangente alla circonferenza stessa.

Si sa dalla geometria elementare che questi strumenti permettono certe costruzioni, che sono considerate elementari, di certi segmenti le cui misure sono ottenute mediante calcoli algebrici che coinvolgono operazioni razionali od operazioni di estrazione di radici quadrate in numero finito.

Si scelga infatti un segmento come unità di misura dei segmenti, e lo si indichi con u; siano poi $a, b, c, \dots x, y, z$ altri segmenti e conveniamo di scrivere:

$$(\S)\ x = a + b$$

per indicare il segmento x la cui misura (rispetto all'unità u) è la somma delle misure dei segmenti a e b; adotteremo analoghe convenzioni per indicare i segmenti le cui misure si ottengono con determinate operazioni algebriche dalle misure di segmenti dati.

Allora è noto che il segmento (§), che diremo "somma" di due altri, può essere costruito con operazioni elementari, eseguibili con gli strumenti elementari, utilizzati come è stato detto sopra; analoga osservazione vale per il segmento "differenza".

Il segmento:

$$(\S\S)\ y = a\,b$$

può essere costruito utilizzando il noto teorema detto "di Talete", in base alla proporzione:

$$u : a = b : y;$$

ed il segmento:

$$(\S\S\S)\ z = \sqrt{a}$$

può essere costruito in base alla proporzione:

$$u : z = z : a.$$

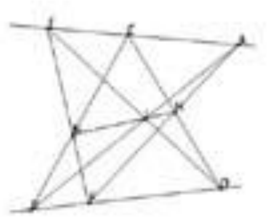
Analoghi artifici che non stiamo ad elencare conducono alla costruzione di un segmento che sia una potenza ad esponente intero di un segmento dato.

Si può ora osservare che le convenzioni della geometria analitica conducono a rappresentare ogni punto del piano mediante le misure di due opportuni segmenti, beninteso una volta che sia stato stabilito un sistema di coordinate detta “cartesiane”. Pertanto le operazioni che abbiamo sommariamente indicato poco sopra conducono a costruire ogni punto le cui coordinate si ottengano dai dati mediante operazioni razionali o di estrazioni di radice quadrata (in numero finito).

NdR (*) Si può vedere nel Sito, nella sezione Didattica -> Una proposta per l’insegnamento della Geometria, il richiamo *Proposte per un itinerario didattico*.

(CFM 2004) METODO

1 - Le riflessioni che seguono vorrebbero indagare i percorsi psicologici che conducono alla soluzione dei problemi geometrici. Non si tratta ovviamente di un’analisi logica: questa sta nelle pagine precedenti; ivi sono date anche le citazioni di Platone, Fano e Spinoza e si ricorda che tutta la struttura di ragionamento è codificata in Aristotele. Pretesto della meditazione è la figura piana che viene chiamata *Configurazione di Pappo - Pascal*, costituita da 9 punti e 9 rette, in modo che per ogni punto passino tre rette e su ogni retta giacciano tre punti.



2 - Ho incontrato per la prima volta questa configurazione non sotto la forma in cui è stata presentata nelle righe precedenti, ma sotto la forma di "*esistenza dell'asse di collineazione di una proiettività tra due punteggiate complanari*". Dette r ed r' le due punteggiate, e scelte due terne di punti: A, B, C e A', B', C' rispettivamente su r ed r', si definisce la proiettività come corrispondenza tra due punti X e X' tali che si abbia l'uguaglianza dei birapporti:

$$(1)\ (ABCX) = (A'B'C'X').$$

Si dimostra che la corrispondenza esiste ed è determinata univocamente dalle condizioni di portare la prima terna (appartenente ad r) sulla seconda (appartenente ad r'). Il punto di intersezione tra le due rette: H se viene considerato appartenente ad r, e K' se appartenente ad r' possiede allora due corrispondenti: H' e K appartenenti rispettivamente ad r' e ad r. Si costruisce poi graficamente la proiettività mediante il prodotto di due prospettività aventi i centri O ed O' rispettivamente coincidenti con due punti corrispondenti; per esempio prendendo O coincidente con A' ed O' coincidente con A. In questo modo le rette proiettanti B e C da O e quelle corrispondenti proiettanti B' e C' da O' determinano una retta u, e si dimostra che questa interseca le due punteggiate rispettivamente nei punti H' e K (Cfr. fig.2a) i quali sono univocamente determinati dalla proiettività, cioè dalle due terne date di punti. Pertanto scegliendo i centri O ed O' in maniera diversa, ma sempre in due punti corrispondenti (per esempio in C' e C) si ottiene sempre la stessa retta u come retta di passaggio da una all'altra delle prospettività che costruiscono la proiettività. In particolare si ha quindi che le coppie di rette (chiamate talvolta "associate"): AB' ed $A'B$, AC' ed

A'C, *BC'* e *B'C* si incontrano sulla u. Pertanto la configurazione in questo caso è costituita da questi tre punti e dai punti delle terne originarie: A, B, C e A', B', C'.

Questa dimostrazione fa intervenire molte nozioni, come quella di "birapporto" e di "proiettività" che appaiono abbastanza lontane dallo scopo del dimostrare l'esistenza della configurazione. Inoltre occorre svolgere una dimostrazione speciale in relazione al caso in cui la proiettività si riduca ad una sola prospettività e quindi il punto comune alle due punteggiate risulti unito per la corrispondenza e la retta *u* non sia pertanto più definita come congiungente di *H'* e *K*. Tale scopo particolare viene raggiunto facendo riferimento a proprietà dei gruppi armonici di rette e dei quadrangoli piani completi. Tutto ciò si comprende osservando che l'esistenza della configurazione è soltanto un "sottoprodotto" delle dimostrazioni riguardanti la corrispondenza proiettiva.

3 - Si possono dare dimostrazioni dirette e quindi in certo senso più "eleganti". Una di queste si può ottenere con il cosiddetto "Metodo di Poncelet". [Jean Victor PONCELET. N. Metz (Lorena) 1/7/1788. M.Parigi 22/12/1867. Durante la sua prigionia in Russia, come ufficiale dell'esercito napoleonico, scrisse il "*Traité des proprietés projectives des figures*", che viene considerato il documento iniziale della geometria proiettiva].
Tale metodo consiste sostanzialmente nell'interpretare in forma proiettiva i risultati della geometria tradizionale (chiamata spesso "geometria metrica") dando quindi loro una validità molto più generale.

BIRAPPORTO

In un piano è dato un punto *O* e per esso 4 rette (tra loro distinte) a, b, c, d. Sia *r* una retta del piano non passante per *O* e non parallela a nessuna delle rette prima nominate; indichiamo con A, B, C, D rispettivamente i punti in cui la *r* interseca le rette in parola. Mandiamo da *A* e da *B* le perpendicolari alla retta *c* (ed indichiamo con *C'* e *C"* rispettivamente i punti in cui la retta *c* viene intersecata dalle due perpendicolari, mandate per *A* e *B*. Analogamente mandiamo da *A* e da *B* le perpendicolari alla retta *d* ed indichiamo con *D'* e *D"* i punti in cui la retta *d* viene intersecata dalle rette per *A* e per *B*.

I triangoli CAC' e CBC" sono ovviamente simili e si ha dunque:
(1) $AC \ / \ BC \quad = \quad AC' \ / \ BC$".
Analogamente si ha:
(2) $BD \ / \ AD \quad = \quad BD$"$/AD'$.
Dalla trigonometria elementare si ha:

(3) $$AC' = OA \sin(ac) \ ; \qquad AD' = OA \ \sin(ad) \, ;$$

$$BC'' \ = \ OB \sin(bc) \, ; \qquad BD'' \ = \quad OB \sin(bd).$$
Quindi si ha:
(4) $AC \cdot BD \ / \ AD \ \cdot \ BC \quad = \quad sin(ac) \ \ sin(bd) \ / \ sin(ad) \ \ sin(bc)$.
Il numero a primo membro della (4) viene chiamato "birapporto" dei punti $A, B, \ C, D$ ed indicato con il simbolo $(ABCD)$, avendosi quindi, per definizione:
(5) $(ABCD) \quad = \quad AC \cdot BD \ / \ AD \cdot BC$.

OSSERVAZIONE. Dalla (4) segue che il valore del birapporto $(ABCD)$ è fornito *soltanto* dalla mutua posizione delle quattro rette a, b, c, d, posizione determinata dagli angoli di cui le rette in parola sono i lati; si deduce da qui che se si secassero queste quattro rette con un'altra retta, chiamiamola r^*, diversa dalla r, si otterrebbero sulla r^* quattro punti, chiamiamoli $A*, B*, C*, D*$, e si avrebbe:

$$(6)\ \ (A*B*C*D*) \ = \ (ABCD).$$

Si suole presentare il risultato simbolizzato dalla (6) immaginando che la quaterna di punti a sinistra (appartenenti alla retta r^*) sia stata ottenuta dalla quaterna A, B, C, D con un'operazione di "proiezione" dal centro O; e pertanto, in questo modo di esprimersi, la (6) esprime la "invarianza" del birapporto di quattro punti allineati per le operazioni di proiezione.

CONFIGURAZIONE DI PAPPO-PASCAL

(CFM 1999) La configurazione di Pappo-Pascal (espressione che nel seguito sarà indicata, in forma abbreviata convenzionale, con la sigla CPP) è una figura nel piano proiettivo reale costituita da 9 punti e 9 rette, situati in modo tale che per ogni punto passino 3 rette (ovviamente della configurazione) e su ogni retta stiano 3 punti (sempre della configurazione). L'esistenza di questa configurazione era nota dai tempi di Pappo, in forza del Teorema che porta il suo nome. Vale infatti la seguente proposizione:

Siano date in un piano due rette, r ed r', distinte tra loro; e siano dati tre punti A, B, C su r e tre punti A', B', C' su r'. Si considerino le 6 rette:

(1) $< AB' >,\ < A'B >,\ < BC' >, < B'C >,\ < CA' >, < C'A >,$

e si considerino i 3 punti:

(2)$C'' = < AB' > \cap < A'B >\ ;\ A'' = < BC' > \cap < B'C >\ ,\ \ B'' = < CA' > \cap < C'A.$

Vale allora il

TEOREMA (di Pappo). I tre punti A'', B'', C'' appartengono ad una stessa retta r''.

Daremo la dimostrazione chiamando provvisoriamente s la retta che unisce A'' e B'', cioè ponendo:

(3) $s = < A''B'' >,$

e dimostrando che anche C'' appartiene ad s; dimostrando cioè che si ha:

(4) $C'' \in s.$

Osserviamo anzitutto che la proprietà che intendiamo dimostrare è un invariante proiettivo della figura considerata: si tratta infatti dell'appartenenza di tre punti ad una medesima retta; proprietà che rimane valida quando la figura sia proiettata da un piano sopra un altro. Possiamo quindi partire dall'ipotesi che la retta s sia la retta impropria del piano, e dimostrare che il punto C'' è improprio, cioè che le due rette $< AB' >$ ed $< A'B >$ sono parallele tra loro. Indichiamo per un momento con O il punto comune alle due rette r ed r' (distinte per ipotesi). Prendiamo in considerazione le due ipotesi seguenti: A) la retta s passa per O; B) la retta s non passa per O.

A) Si abbia anzitutto: $O \in s$.

Poiché s è la retta impropria, ciò significa che le due rette r ed r' sono parallele tra loro. Inoltre, per l'ipotesi fatta, espressa dalla (3), le rette delle coppie $< AC' >$ ed $< A'C >$, e $< BC' >$ e $< B'C >$

sono parallele tra loro; si hanno quindi due parallelogrammi di vertici A, C, A', C' e B, C, B', C'; si trae facilmente di qui che i due segmenti *AB* ed *A'B'* sono uguali tra loro; poiché essi appartengono a due rette parallele tra loro, si conclude facilmente che anche il quadrilatero di vertici A, B, A', B' è un parallelogramma, e quindi che le rette <*AB'*> ed <*A'B*> sono parallele tra loro, cioè che la tesi in questo caso è vera.

B) Sia *O*, punto comune alle due rette *r* ed *r'*, un punto proprio.

In questo caso, per la similitudine dei due triangoli di vertici O, B, C' e $O,\ B',\ C$, e dei due triangoli di vertici O, A, C' e O, A', C si hanno le relazioni:

(6) $OB/OC' = OC/OB'$, $OA/OC' = OC/OA'$.

Si trae di qui:

(7) $OB/OA = OA'/OB'$,

e quindi la similitudine dei due triangoli di vertici O, A, B' e O, A', B, ed infine il parallelismo delle due rette $< AB' >$ e $< A'B >$.

OSSERVAZIONE 1 - Questa dimostrazione si fonda su concetti e metodi della geometria elementare euclidea: parallelismo, similitudine, proporzionalità. Tuttavia la sua validità sussiste anche nel campo proiettivo: abbiamo infatti osservato che la proprietà. che è oggetto della proposizione è invariante per proiezioni. È questo il fondamento di un metodo di dimostrazione che viene spesso indicato come "Metodo di Poncelet", dal nome del geometra francese Jean-Victor Poncelet [1788-1867].

Diamo qui di seguito altre dimostrazioni della proposizione. La prima fa riferimento al concetto di proiettività fra due rette punteggiate. Si osserva infatti che, a norma del teorema fondamentale della proiettività tra forme di prima specie, esiste ed è unica la proiettività tra le due rette *r* e *r'* che fa corrispondere alla terna di punti A, B, C della *r* la terna A', B', C' della *r'*. In questo contesto la retta *r''* risulta essere l'asse di collineazione della proiettività in parola. La sua esistenza ed unicità si dimostra in modo diverso, a seconda che valgano le ipotesi A) oppure B). Precisamente:

A) nel caso in cui la proiettività tra le due punteggiate si riduca ad essere una prospettività, le coppie di punti corrispondenti: *A* ed *A'*, *B* e *B'*, *C* e *C'* sono allineate con un punto *U* detto centro di prospettività, ed i punti $A'', B'',\ C''$ stanno sulla retta *r''* del fascio *O*, coniugata armonica della retta $< OU >$ rispetto alla coppia di rette *r* e *r'*.

B) Nel caso in cui valga l'ipotesi B), il punto comune alle due punteggiate ha due distinti e ben determinati corrispondenti, a seconda che venga considerato appartenente alla *r* (ed allora ha un corrispondente sulla *r'*) oppure alla *r*' (ed allora ha un corrispondente sulla *r*). La retta *r''* sulla quale stanno i tre punti (2) risulta determinata dalla proprietà di essere la congiungente dei punti corrispondenti del punto comune alle due punteggiate. Le relazioni (6) confermano queste considerazioni: si verifica infatti che, nel caso al quale esse si riferiscono, il punto comune alle due punteggiate ha come corrispondenti i punti impropri delle stesse, e la retta *r''* è la retta impropria del piano.

Un'altra dimostrazione della proposizione di Pappo può essere ottenuta per via analitica nel modo seguente: si assumano le rette *r* ed *r'* come assi coordinati *x* ed *y* rispettivamente di un sistema cartesiano obliquo nel piano, e sia *O* il punto comune, che risulta essere l'origine delle coordinate. Siano a, b, c rispettivamente le ascisse dei punti A, B, C; e siano a', b', c' rispettivamente le ordinate dei punti A', B', C'. Si ha ovviamente :

(8) $a\,b\,c\ \neq 0$; $a'b'c'\ \neq 0$.
Possiamo quindi porre:
(9) $1/a = \alpha$; $1/b = \beta$; $1/c = \gamma$.
Ed analogamente:
(10) $1/a' = \alpha'$; $1/b' = \beta'$; $1/c' = \gamma'$.
Nel sistema di riferimento cartesiano così stabilito, le equazioni delle 6 rette (1) risultano essere le seguenti:

(11) $< AB' > : \alpha x + \beta' y - 1 = 0$; $< AC' > : \alpha x + \gamma' y - 1 = 0$;

$< BC' > : \beta x + \gamma' y - 1 = 0$; $< BA' > : \beta x + \alpha' y - 1 = 0$;

$< CA' > : \gamma x + \alpha' y - 1 = 0$; $< CB' > : \gamma x + \beta' y - 1 = 0$.

Chiamiamo $f(x,y)$ il polinomio di terzo grado che si ottiene moltiplicando tra loro i tre polinomi della colonna sinistra; e chiamiamo $g(x,y)$ il polinomio di terzo grado che si ottiene moltiplicando tra loro i tre polinomi della colonna di destra. Si osserva che ognuna delle due equazioni:
(12) $f(x,y) = 0$; $g(x,y) = 0$
rappresenta una cubica (degenere in tre rette) che passa per i nove punti: A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''. Costruiamo ora il polinomio, pure di terzo grado:
(13) $F(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$,
e osserviamo che l'equazione:
(14) $F(x,y) = 0$
rappresenta pure una cubica, che passa per ognuno dei 9 punti elencati sopra. Si verifica facilmente che si ha identicamente:
(15) $F(0,y) = 0$; $F(x,0) = 0$.
Ciò implica che il polinomio nelle due variabili x e y dato dalla (13) è divisibile per il prodotto xy. Consegue di qui che si deve avere
(16) $F(x,y) = xy(ux + vy + w)$,
e la retta di equazione:
(17) $ux + vy + w = 0$
deve contenere i tre punti A'', B'', C''.

OSSERVAZIONE 2 - La dimostrazione ambienta il teorema di Pappo nell'ambito delle strutture algebriche, ed è pertanto valida anche nel piano proiettivo complesso. Infatti la proposizione può essere considerata come un esempio storico di "Paradosso di Cramer", cioè di una situazione apparentemente contradditoria riguardante il numero di condizioni indipendenti che determinano un polinomio di terzo grado in due variabili (anche complesse) x e y. Infatti i coefficienti omogenei in un polinomio cubico come $F(x,y)$ sono in numero di 9. Ma 9 sono pure i punti di intersezione tra due cubiche piane, a norma del Teorema di Bézout. Pertanto si ha che le condizioni imposte dal passaggio per 9 punti del piano determinano almeno una cubica, perché si esprimono mediante un sistema di 9 equazioni lineari, in 10 incognite omogenee, che sono i coefficienti del polinomio. La cubica risulta essere unica a meno che i 9 punti considerati non siano il gruppo delle intersezioni di due cubiche: in tale caso infatti il sistema lineare risulta avere almeno due soluzioni distinte e quindi infinite soluzioni. In forma geometrica si potrebbe enunciare il cosiddetto "Teorema dei 9 punti base di un fascio di cubiche", affermando che ogni cubica che passa per 8 fra tali punti passa anche per il nono. La dimostrazione esposta sopra costituisce quindi un'applicazione classica di tale teorema.

Altra applicazione potrebbe essere costituita dalla dimostrazione del noto teorema di Pascal riguardante gli esagoni inscritti un una conica.

OSSERVAZIONE 3 - La CPP possiede 2 invarianti proiettivi. Ciò può essere dimostrato con un conteggio dei parametri da cui essa dipende: infatti essa risulta univocamente determinata per esempio dalle due terne di punti A, B, C; A', B', C'; ognuna di tali terne viene determinata da 5 parametri , cioè 6 = 3 · 2 per ogni terna, meno uno, a causa della condizione di allineamento. Ma le omografie del piano su se stesso dipendono da 8 parametri. Quindi la CPP dovrebbe dipendere da 10 - 8 = 2 parametri. Tali parametri potrebbero essere identificati per esempio nei due birapporti delle quaterne di punti costituite, su ognuna delle due rette iniziali, dai tre punti della configurazione e dall'intersezione con la retta degli altri tre.

PROBLEMI E VARIE - Forse potrebbe aver senso indagare sul valore dell'invariante di Salmon della cubiche del fascio (13). È noto infatti che le cubiche di un fascio che hanno un punto doppio sono 12. Nel caso del fascio in parola si avrebbe quindi un'equazione di dodicesimo grado che ha 9 delle sue radici raggruppate a tre a tre. Scommetterei che nella letteratura classica il problema è già stato trattato.

Forse potrebbe essere in qualche modo interessante una codificazione dei punti della CPP con numeri interi modulo 3. Si potrebbe considerare la seguente tabella:

000	111	222
012	120	201
021	102	210

In questa tabella i numeri 0 corrispondono ai punti indicati con lettere senza apici: A, B, C; i numeri 1 a quelli indicati con lettere con un solo apice: A', B', C'; i numeri 2 a quelli indicati con lettere con due apici: A'', B'', C''. In ogni terna il posto del simbolo numerico indica il posto alfabetico della lettera che indica il punto: dunque per esempio il simbolo 1 2 0 indica i punti $A', B'',\ C$. Quindi ogni simbolo ternario indica una retta della CPP.

Sommando i simboli con legge vettoriale e riducendo modulo 3, si ottengono dei simboli ternari che possono avere il seguente significato: quando la somma è 0 0 0 le tre rette passano per un medesimo punto.

(CFM 2002) Nota. A pag. 101 la citazione da J. Hadamard: "La psicologia dell'invenzione in campo matematico. A cura di B. Sassoli (Milano, 1993. Ed. Raffaello Cortina).

"Ogni ragionamento matematico, per quanto complicato, deve apparirmi come qualcosa di unico. Non sento di averlo capito se non ho successo nell'afferrarlo come un'idea globale. […] Esaminiamo ora una questione che, come vorrei mostrare più avanti, è collegata alla precedente: l'aiuto offerto al pensiero dalle rappresentazioni concrete. […] Il genere di segni tipicamente associato alla cooperazione con il pensiero è costituito dalle parole. Abbiamo di fronte un problema curioso, nel quale le opinioni differiscono in modo totale (pag. 101)."

"Quando penso le parole sono totalmente assenti dalla mia mente […]. Ogni parola scompare nel momento stesso in cui inizio a pensarci, e le parole non mi tornano alla coscienza prima che io abbia completato o abbandonato la ricerca [..]. Penso che sia necessario evidenziare il fatto che non mi capita cosi solo con le parole, ma anche con i segni algebrici. Ne faccio uso quando tratto calcoli semplici; ma ogni volta che la materia sembra troppo difficile, diventano un bagaglio troppo pesante per me; allora uso rappresentazioni concrete, ma di natura affatto diversa. " (pag. 102)

Queste citazioni confermano, a mio parere, la posizione dell'Aquinate, ed in particolare della connessione tra immagini mentali e ragionamenti logici deduttivi. Dal punto di vista didattico mi pare chiaro che il procedimento di apprendimento è sottoposto a procedure analoghe; e qui la conferma viene da Freundenthal il quale vuole che in matematica l'apprendimento deve essere re-invenzione. 030901

NdR Si può vedere nel Sito nella sezione Inediti:

6502 *Problemi psicologici dell'invenzione matematica*. (Conferenza tenuta il 9 dicembre 1965 presso la Sede dell'Istituto di Psicologia Sperimentale).