radiazione nell'interno della goccia, il fascio emergente forma col fascio incidente un angolo di circa 42°, leggermente maggiore per le onde di maggior lunghezza d'onda (quelle che stanno alla base della percezione del rosso) e via via minore fino a quello per le onde di minor lunghezza d'onda (che stanno alla base della percezione del violetto). Piú precisamente egli dimostrò che si ha come una costipazione del flusso luminoso in questa direzione, che è una direzione limite. Anche per angoli inferiori si ha la riflessione della radiazione da parte della gocciolina, ma essa è piú distribuita e quindi meno intensa. Gli effetti nella direzione limite sono invece esaltati dalla concentrazione del flusso luminoso in quella direzione particolare.

Cartesio dimostrò ancora che se la radiazione nell'interno della goccia compie una seconda riflessione, emerge poi con una concentrazione simile alla precedente, ma con un'inclinazione di circa 51° rispetto alla direzione di incidenza e con una successione dei colori invertita rispetto alla precedente. Questo provoca la formazione di un secondo arco esterno e concentrico a quello dovuto alla riflessione singola, coi colori invertiti. Naturalmente il secondo arco è molto meno luminoso del primo e non sempre è visibile.

Veramente Cartesio, che non aveva ancora alcuna idea circa la dispersione e la natura dei colori, non diede precisazioni in merito. Il ragionamento di Cartesio si sosteneva bene nel caso di radiazioni monocromatiche, ma cadeva nel tentativo di spiegare il colore: fu Isaac Newton che spiegò la dispersione e quindi la formazione degli spettri mediante variazioni dell'indice di rifrazione.

Con ciò il fenomeno era essenzialmente spiegato. Ogni gocciolina di acqua sospesa nell'aria rimanda il fascetto di radiazione che riceve dal Sole, prevalentemente, in due coni di 42° e di 51° di semiapertura. L'osservatore riceve la radiazione da tante goccioline come se provenisse da un arco circolare (o da due archi) dell'apertura suddetta.

Date però le dimensioni piccolissime delle goccioline di acqua che danno origine all'arcobaleno, lo studio non poteva esser fatto con semplici criteri geometrici, come era stato fatto da Cartesio e da Newton; Thomas Young e G. B. Airy ne studiarono particolarità e anomalie assai fini, dovute anche queste alla diffrazione delle onde ottiche.

L'ultimo contributo agli studi sull'arcobaleno è stato apportato da V. Ronchi che ne ha studiato la localizzazione nello spazio da parte della psiche dell'osservatore.

Gli studi di cui si è fatto cenno qui sopra, infatti, si limitavano a definire il percorso della radiazione nelle goccioline di acqua e la direzione con cui la radiazione emergente da esse arriva all'occhio dell'osservatore. Ronchi ha posto invece il problema della localizzazione dell'arcobaleno, cioè si è proposto di definire gli elementi in base ai quali l'osservatore localizza la figura degli archi colorati alla distanza alla quale li vede e di conseguenza ne determina le dimensioni apparenti. Questa indagine ha portato alla conclusione che la localizzazione è determinata esclusivamente da elementi psichici, da parte dell'osservatore.

Per ciò che concerne la scomposizione della radiazione nell'interno delle goccioline di acqua, si rimanda alle voci RIFRAZIONE; DISPERSIONE DELLE RADIAZIONI; DIFFRAZIONE; le questioni relative alla localizzazione dell'arcobaleno nello spazio sono esposte alla voce VISIONE.

VASCO RONCHI

Bibliografia: V. Ronchi, *L'arcobaleno nella storia e nell'arte*, in Atti della Fondazione G. Ronchi, Firenze, 15, 1 (1960); C. E. Boyer, *The rainbow. From myth to Mathematics*, Londra (1960).

Area

Il concetto di area di una figura (e in particolare di una figura piana) è stato considerato per molto tempo come un concetto 'primitivo' che non ha bisogno di definizione né di chiarimenti; al massimo, in certe trattazioni che precedono le analisi critiche moderne, viene presentato come significato 'evidente' del termine quello di 'misura della estensione della figura' o anche 'misura della parte di piano compresa nella figura'. Questa impostazione è conforme alla concezione classica: troviamo per esempio in Euclide che vengono qualificate come 'uguali' (tra loro) due figure che hanno la stessa area e che con locuzione piú moderna indicheremmo come 'equivalenti' (due figure uguali, o meglio, congruenti secondo la accezione moderna del termine vengono dette da Euclide 'uguali e simili'). Analogamente, in Archimede troviamo dimostrati i due celebri teoremi: «Un cerchio ha la stessa area del triangolo che ha come base la circonferenza e come altezza il raggio» e l'altro: «L'area della superficie sferica è uguale al quadruplo di quella del suo cerchio massimo», senza che appaia dalla trattazione il minimo dubbio critico sulla esistenza di una 'area' per il cerchio o per la superficie sferica e sul significato del termine.

Nella impostazione moderna il concetto di area viene definito rigorosamente in molti modi e con diversi atteggiamenti, a seconda delle preferenze dei vari autori e della struttura della teoria matematica nella quale viene trattato.

Nelle trattazioni abituali della Geometria è molto seguito il procedimento seguente: si definisce anzitutto il concetto di area per un poligono convesso e non intrecciato, tale cioè che la retta che contiene uno dei lati lasci da una stessa parte tutti i punti appartenenti al poligono. Si definisce poi il concetto di area per una figura piana che non abbia contorno poligonale, per esempio per la circonferenza, o per altre figure limitate da curve chiuse regolari, dotate cioè di tangente in ogni punto che vari con continuità insieme con il punto stesso (al piú esclusi certi punti in numero finito).

Infine si definisce l'area delle figure che appartengono a una superficie non piana (per esempio, superficie laterale del cono, superficie del cilindro, della sfera, ecc.).

Il primo passo di quelli che abbiamo sopra ricordati è in certo senso il piú importante e a sua volta può essere compiuto con vari procedimenti. Uno dei piú adottati è quello che conduce a definire l'area di un poligono attraverso la rigorosa impostazione della nozione di equivalenza tra poligoni. A questa si giunge definendo due poligoni come equivalenti se essi possono venir decomposti mediante rette in parti (pure poligonali) che sono a due a due uguali (nel senso abituale del termine).

Si giunge cosí a definire tra poligoni una relazione che ha le abituali proprietà formali della uguaglianza e cioè è riflessiva (ogni poligono è equivalente a se stesso), simmetrica (se un poligono A è equivalente a un altro poligono B, anche B è equivalente ad A) e transitiva (se un poligono A è equivalente a un poligono B e B a sua volta è equivalente a un terzo poligono C, anche A è equivalente a C).

L'area di un poligono risulta quindi definita come l'astratto della classe di tutti i poligoni a esso equivalenti; con parole piú usuali ma meno precise potremmo dire che in questo senso l'area viene presentata come la 'proprietà comune' a un poligono e a tutti i poligoni equivalenti a esso.

Nella trattazione abituale, in base alle proprietà dell'uguaglianza dei poligoni e in particolare dei triangoli, si dimostra con relativa facilità che due triangoli aventi uguali basi e uguali altezze sono equivalenti; e poi si giunge a costruire con mezzi elementari (riga e compasso) il triangolo oppure il quadrato equivalente a un poligono dato o infine il rettangolo che ha una data base (oppure una data altezza) ed è equivalente a un poligono dato.

Per questa via si giunge a stabilire rigorosamente le proposizioni sulle quali sono basate le regole elementari per il calcolo delle aree dei poligoni: fissando una unità di misura opportuna (e precisamente scegliendo come unità di misura delle aree l'area del quadrato che ha come lato il segmento scelto come unità di misura per i segmenti), si ottiene cosí che l'area del rettangolo ha per misura il numero che si ricava moltiplicando le misure delle lunghezze dei lati; di qui, con ovvie 'decomposizioni', si giunge alle regole che abbiamo ricordate.

Secondo questa impostazione si giunge, in modo abbastanza naturale, alla distinzione di varie 'specie di grandezze'; si chiamano abitualmente *di prima specie* quelle grandezze (come i segmenti, gli angoli, i diedri, gli archi di una stessa circonferenza o di due circonferenze aventi uguali raggi, ecc.) per le quali si può costruire una teoria della misura in modo tale che grandezze uguali (nel senso abituale del termine) abbiano una stessa misura e viceversa; si chiamano grandezze *di seconda specie* quelle grandezze (come l'area di un poligono) per le quali la uguaglianza nel senso abituale trae con sé la uguaglianza delle misure, ma non vale il viceversa. Invero, consideriamo due poligoni A e B che siano stati ottenuti come *somme* di due coppie di poligoni, rispettivamente A_1 e A_2, B_1 e B_2 (intendendosi per somma di due poligoni il poligono che si ottiene 'accostando' i due dati in modo che gli *addendi* abbiano in comune una parte almeno di un lato e giacciano da bande opposte rispetto alla retta cui appartiene il lato stesso); orbene, può darsi che si abbia rispettivamente A_1 uguale a B_1, A_2 uguale a B_2, senza che sia anche A uguale a B; tuttavia A e B risultano tra loro equivalenti, cioè hanno uguale area.

La sistemazione rigorosa della relazione di equivalenza con un indirizzo assiomatico ha portato D. Hilbert a distinguere ulteriormente due nozioni e precisamente quella della uguaglianza per somma (*Zerlegungsgleichheit*) e della uguaglianza per differenza (*Inhaltsgleichheit*), chiamando nel primo caso equivalenti soltanto due poligoni che si possano decomporre in parti che sono a due a due uguali, nel secondo caso considerando come equivalenti anche due poligoni che sono differenze di poligoni equivalenti. Distinzione a prima vista poco rilevante, ma che si presenta come fondamentale quando si sia dimostrato che la seconda nozione (uguaglianza per differenza) può valere anche in un 'piano non archimedeo', cioè in un sistema geometrico nel quale non sia stato enunciato il cosiddetto postulato di Eudosso-Archimede, mentre la prima nozione di equivalenza non può essere estesa a un sistema cosiffatto.

La trattazione che abbiamo esposto fin qui, e la corrispondente distinzione delle grandezze in varie specie, può condurre a qualche difficoltà, che si presenta quando si tenti di invertire il teorema fondamentale che afferma essere equivalenti due parallelogrammi che hanno basi uguali e altezze uguali. Invero per dimostrare la proposizione inversa, per dimostrare cioè che due parallelogrammi che siano equivalenti e che abbiano uguali basi hanno anche uguale altezza, occorre far ricorso alla proposizione seguente, che in alcune trattazioni viene enunciata senza dimostrazione e chiamata postulato di De Zolt: « Decomposto un poligono A in certe parti poligonali in numero finito, con tutte le parti suddette meno una non è possibile comporre un poligono che sia equivalente al dato ».

Il ricorso alla introduzione di un postulato cosiffatto può essere evitato con ingegnosi procedimenti (dovuti per esempio a Veronese e a Hilbert) nei quali a ogni triangolo e poi a ogni poligono viene associato con opportune convenzioni un ben determinato segmento la cui misura viene detta area del triangolo o rispettivamente del poligono. Pertanto la relazione di equivalenza valida tra grandezze di seconda specie viene ricondotta a quella di uguaglianza tra opportune grandezze di prima specie (segmenti).

L'estensione della definizione di area dalle figure a contorno poligonale a quelle aventi contorno curvilineo viene fatta con opportuni postulati, che in ultima analisi conducono a stabilire per le aree le proprietà dei sistemi di grandezze continue, per le quali non soltanto sia possibile stabilire una relazione di uguaglianza, con le relative proprietà formali, ma anche delle relazioni analoghe a quelle che esistono tra numeri e tra segmenti e che vengono indicate dalle note espressioni 'maggiore di', 'minore di', e infine ad affermare che per le aree vale la proprietà che è enunciata dal classico postulato della continuità.

In tal modo, cioè con il ricorso al postulato della continuità, è possibile definire, per esempio, l'area del cerchio come elemento separatore delle aree dei poligoni (non intrecciati) inscritti e circoscritti.

È possibile giungere alla introduzione di grandezze *di terza specie*, chiamando cosí delle grandezze (come le aree di regioni piane limitate da curve) tra le quali si stabilisce una relazione avente le proprietà formali della uguaglianza ma tali che per verificare il sussistere della relazione stessa sia necessario ricorrere a procedimenti infiniti oppure a procedimenti nei quali intervengono coppie di classi contigue.

La definizione di area di una superficie non piana è pure ottenuta con analoghi procedimenti di passaggio al limite.

Nella trattazione classica, che definiva l'area della superficie come limite dell'area di una superficie poligonale inscritta (cioè avente i vertici sulla superficie stessa) quando si fa tendere a zero la massima dimensione delle facce, fu rilevata dal Peano una notevole lacuna; invero il Peano mostrò con un esempio famoso che l'ultima condizione va integrata imponendo che anche il piano che contiene ogni faccetta poligonale tenda al piano tangente alla superficie.

CARLO FELICE MANARA

METODI ANALITICI PER IL CALCOLO DELLE AREE

L'integrale è lo strumento tecnico che l'analisi infinitesimale fornisce per il calcolo effettivo delle aree. In un primo tempo (seguendo le successive fasi di formazione dei concetti fondamentali dell'analisi nei secoli XVII e XVIII, fasi che, nello stesso ordine e con buona ragione, si sogliono ripercorrere nell'insegnamento), l'area di una figura piana R (dominio la cui frontiera sia costituita da un numero finito di porzioni di linee regolari) viene calcolata mediante una o piú *integrazioni semplici*, cioè integrazioni del tipo: $J = \int_a^b f(x)\,dx$. L'idea piú spontanea è quella di decomporre R (dopo aver fissato nel piano una coppia di assi cartesiani ortogonali xy) in un certo numero di regioni, mediante segmenti paralleli agli assi, in modo che le aree delle singole regioni possano calcolarsi ciascuna mediante un integrale del tipo J (l'uno assumendo, per esempio, la x come variabile indipendente, l'altro eventualmente assumendo la y come tale), e poi sommando i singoli risultati trovati. Invero è facile dimostrare che la somma non dipende dalle particolarità di dettaglio con cui la suddivisione viene eseguita. Nella FIG. 1 si dà esempio d'un simile procedimento. R è stata suddivisa in quattro regioni; l'area della regione R_1, per esempio, dev'essere calcolata con un integrale del tipo $\int_a^b f(x)\,dx$ (intendendo che la funzione $y = f(x)$ sia cartesianamente rappresentata dall'arco di linea $\widehat{HK}$, segnato in marrone); quella della regione R_2, invece, con un integrale del tipo $\int_a^b g(y)\,dy$ (la funzione $x = g(y)$ è rappresentata dall'arco di linea $\widehat{KL}$, in chiaro).

Questa prima idea si perfeziona, dal punto di vista concettuale, ma soprattutto da quello tecnico, quando l'area della figura R si pensi originariamente espressa da un integrale doppio, precisamente dall'integrale doppio della costante 1, cioè $\iint_R dx\,dy$, ove il *campo d'integrazione* è proprio la stessa regione R. L'area di R risulterà cosí uguale *numericamente* (non già dimensionalmente, com'è ovvio) al volume del cilindro retto avente per base R, generatrici parallele all'asse z e altezza $= 1$ (tale cilindro rientra, come caso particolare, nella figura detta *cilindroide*, di cui si tratta piú ampiamente alla voce INTEGRALE, CALCOLO). Il teorema di ri-

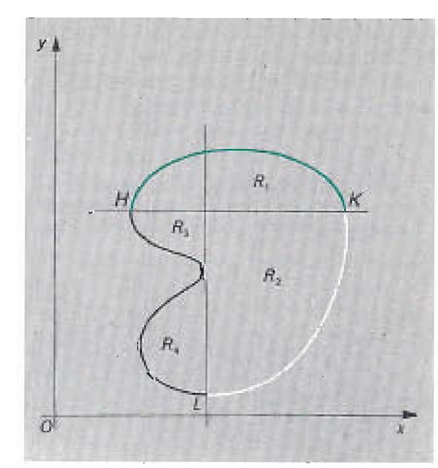

Fig.1 Decomposizione di una generica figura piana in regioni. Questo procedimento tende a semplificare il calcolo dell'area della figura, riconducendolo al calcolo di integrali di forma elementare.