Francesco Piazza. Risorgiva (1984)

I VARI TIPI DEL RAGIONARE MATEMATICO: L'ANALISI E LA SINTESI, LA DEDUZIONE, IL FORMALISMO E LA FANTASIA

Davanti alle critiche che si fanno da parte di qualche matematico sull'insegnamento della Geometria a livello universitario, vale anche la pena di analizzare le motivazioni per le quali ci pare utile che un insegnamento cosiffatto venga mantenuto nella nostra università, anche se siamo d'accordo che occorre sempre tener conto dei nuovi sviluppi dei criteri informatori e dei progressi della didattica e della scienza. Vogliamo perciò fare qualche considerazione a proposito dei vari tipi di ragionamento matematico che si possono dare. Infatti, a chi non conosce la Matematica questa scienza appare come un insieme di formule e di ragionamenti astratti, di solito abbastanza ripugnanti ed astrusi. Quando si incomincia a conoscerla un poco più da vicino si incomincia anche a distinguere i vari tipi di ragionamento matematico, così come si incomincia a riconoscere lo "stile" della ricerca e del modo di esporre dei vari Autori che sono passati alla Storia della scienza. Per prendere qualche esempio dalla storia della Matematica italiana, è abbastanza facile per un esperto, anche modesto, distinguere una pagina di G. Peano da una di Tonelli, una pagina di F. Enriques da una di F. Severi. La ragione di questo sta nel fatto che la matematica non si fa soltanto con le formule e con i calcoli. Abbiamo già detto che non intendiamo dare una definizione della Geometria; lo stesso potremmo a maggior ragione ripetere a proposito della matematica. Al massimo potremmo descrivere qualche tipo di modo di fare la matematica, il che già ci permetterà di spiegare le nostre considerazioni precedenti.

Anzitutto ricordiamo che in ogni stadio della Scienza vi sono dei procedimenti che sono per così dire opposti e che sarà bene distinguere, anche se nella pratica è impossibile separare. Si tratta dei procedimenti di analisi e di sintesi, che distinguono ogni tipo di ragionare e che permettono di scindere i concetti nelle parti che li compongono e permettono poi di ricostruirli avendo però una coscienza nuova dell'importanza delle singole parti, delle gerarchie logiche che stanno in una costruzione scientifica, delle strutture portanti di una teoria. Per esempio la meditazione matematica moderna ha condotto ad analizzare in quello che era una volta un capitolo della Matematica superiore e che oggi si chiama l'Analisi matematica (con una espressione che è ormai classica) i concetti che nascono dalla Topologia e i concetti che provengono dall'Algebra.

Una analisi analoga potrebbe essere fatta a proposito della teoria dei numeri reali ovvero di quello che si chiama il campo dei numeri reali. È chiaro che tra le proprietà dei numeri reali ve ne sono di quelle che provengono dall'Algebra, perché su questi numeri si possono eseguire delle operazioni che hanno certe proprietà formali, e delle altre proprietà che provengono da quella che si chiama oggi la Topologia, e che sono state suggerite storicamente dal fatto che il campo dei numeri reali è nato per rendere aritmeticamente la struttura del continuo geometrico. Si potrebbe anzi dire che nel corso della storia della Matematica la intuizione o meglio la fantasia del continuo geometrico ha avuto una importanza fondamentale e quindi anche il collegamento con la Fisica e con le nostre sensazioni ha pure una importanza ispiratrice che possiamo ben dire fondamentale. È chiaro che la intuizione geometrica non serve per la dimostrazione dei teoremi: questa deve essere conseguita in termini di solo ragionamento logico, se si tratta di Geometria oppure in termini di deduzione e di calcoli se si tratta di Analisi matematica. Ma potremmo anche affermare, con una certa probabilità di essere nel giusto, che senza la intuizione della verità questa ben poco avrebbe di probabilità di essere scoperta. Una prova di ciò che stiamo dicendo è data dal procedimento che viene abitualmente suggerito per la risoluzione dei problemi di Geometria elementare. Vorremmo anzitutto dire che la Geometria elementare (ed anche quella non elementare) almeno fino a quando riguarda enti che cadono sotto la nostra intuizione spaziale diretta, ben difficilmente ammette dei "metodi" di risoluzione; potremmo anche dire che esistono dei trattati che pretendono di insegnare la risoluzione degli esercizi e dei problemi di Geometria elementare, ma che questi trattati si riducono sostanzialmente a delle classificazioni dei problemi; si potrebbe dire che sono dei "magazzini" di problemi, che aiutano talvolta a classificare un problema quando esso sia dato e quindi implicitamente suggeriscono.

CHE COSA RIMANE DELLA GEOMETRIA NELLA MATEMATICA OGGI.

Dopo quanto abbiamo esposto a proposito del carattere della ricerca matematica oggi, sarebbe anche legittimo domandarsi quale sia il posto oggi occupato dalla Geometria nell'ambito della scienza matematica. Questa domanda è già stata avanzata da varie parti; non è superfluo dire che la risposta a questa domanda condizionerebbe in modo radicale anche la didattica. Infatti ognuno capisce che qualora si rispondesse che la Geometria non trova più posto nella Matematica oggi, seguirebbe abbastanza facilmente la domanda del perché si continui ad insegnare Geometria ad ogni livello di scuola. Abbiamo anche detto che questa domanda è stata avanzata da varie parti; diremo anche che la risposta radicalmente negativa è stata data, anche recentemente, per esempio da Bourbaki. Nelle opere di questo gruppo (che per comodità, e per tener fede alla omertà che questi invocano e pretendono, denoteremo con un solo nome) troviamo dichiaratamente enunciato che la Geometria non esiste più. E di questa condanna radicale e definitiva si avvalgono anche oggi molti che pretendono di riformare le strutture dei piani di studio ed i programmi delle scuole, espellendo rigorosamente da questi piani e da questi programmi la Geometria, con sentenza inappellabile e definitiva. Vale quindi la pena di analizzare un poco il significato del processo che è stato fatto da varie parti alla Geometria e di valutare le ragioni delle sentenze emesse, per poter anche vagliare il fondamento di tali sentenze.

Anzitutto possiamo dire che se la Geometria viene considerata secondo il senso classico di questa scienza, per intenderci come la considerava Euclide e come la considerava Cartesio, allora la sentenza di condanna non può essere evitata. Ciò invero non significa una condanna del genio di questi matematici che abbiamo ricordato (e che abbiamo scelto apposta di statura tale che non possano sorgere dubbi in proposito) ma significa soltanto chela loro concezione della Geometria non può più essere accettata. Ed intendiamo dire che non possiamo più accettare la descrizione della Geometria come quella di un ramo della scienza matematica qualificato dai contenuti del proprio studio e dagli oggetti delle proprie ricerche. In altre parole non possiamo più accettare la Geometria che viene definita, cosi come si faceva una volta, come “scienza dello spazio” oppure anche come “scienza della quantità continua”. Queste descrizioni in certo senso potrebbero essere appaiate a quelle che si davano dalla Meccanica come “Scienza che studia il moto dei corpi e le cause che lo producono” e suddividevano poi la Meccanica in capitoli: Cinematica (intesa come “studio del moto”), Statica (intesa come “studio delle forze”) ed infine Dinamica (intesa come “studio del moto causato dalle forze”).

Da questo punto di vista si potrebbe dire che la Geometria nel senso classico è morta quando sono nate le varie “Geometrie”; per spiegare meglio ciò che intendiamo dire enunciando una frase di questo tipo, ricordiamo che nella concezione classica la Geometria era intesa come una scienza che osservava certi oggetti, ne rilevava le proprietà considerate come “evidenti” e deduceva con la logica le proprietà meno evidenti. Era questa la impostazione che troviamo negli “Elementi” di Euclide: infatti ivi troviamo enunciati i postulati, cioè delle proposizioni date senza dimostrazione, che vennero considerati nel corso dei secoli seguenti come delle proposizioni vere, nel senso che dicevano che le cose stavano così come esse proposizioni dicevano. Vi è stata l’unica eccezione storica del cosiddetto “quinto postulato” detto anche “postulato della parallela”, che ha dato luogo alle discussioni ed alle ricerche secolari che a loro volta hanno dato luogo alla Geometria non euclidea ed alla revisione critica non solo della Geometria ma addirittura di tutta la Matematica. La concezione classica era originata evidentemente dalla convinzione che in qualche modo esistessero quelle “cose” che venivano chiamate “punti, rette, piani, figure geometriche”; e che pertanto esse non potessero avere proprietà contraddittorie tra loro.

La dimostrazione della compatibilità logica delle Geometrie non euclidee portava un colpo mortale a questo modo di vedere e conduceva di conseguenza i matematici a considerare la Geometria come un “sistema ipotetico-deduttivo”. In altre parole quelle proposizioni che venivano classificate come “Postulati” non venivano più accettate come verità evidenti e non controvertibili, ma venivano semplicemente poste come “ipotesi” del ragionamento successivo. Naturalmente con questo atteggiamento non vogliamo per nulla asserire che la Geometria sia del tutto staccata dalla realtà, almeno nella parte che si riferisce alla Geometria elementare, classica. Solo vogliamo dire che l'osservazione della realtà, per quanto ci appaia "evidente", non è sufficiente per garantire la verità assoluta degli enunciati, di tutti gli enunciati. L'osservazione della realtà dovrebbe servire per suggerire le proposizioni iniziali di una teoria che si possa chiamare Geometria, ma non può servire come fondamento assoluto della verità. Questa viene garantita soltanto dalla coerenza perfetta, dalla consequenzialità logica dei ragionamenti che si fanno a partire dalle ipotesi accettate, non come garanzia assoluta della verità dei contenuti delle proposizioni accettate ipoteticamente.

È questo l'atteggiamento che è tipico della scienza di oggi; oggi non vediamo più la Fisica per esempio come la si vedeva nel secolo scorso, cioè come un insieme di teorie che sono o vere o false, ma la vediamo come un insieme di modelli astratti che sono stati bensì costruiti per descrivere la realtà e per scoprirne degli aspetti riposti, ma che non pretendono affatto di dire tutta la verità. Questi modelli, e le leggi fisiche che se ne traggono, sono sempre soltanto più o meno approssimati e sono validi soltanto entro certi limiti di approssimazione, che andrebbero precisati sempre di volta in volta. Per esempio se pensiamo al problema pratico di rendere la figura della Terra, è chiaro che la validità della rappresentazione dipende dagli scopi che si vogliono conseguire. Se si vuole per esempio descrivere una regione abbastanza limitata della superficie terrestre, come una città, è possibile tracciare una carta topografica, nella quale la porzione che ci interessa della superficie della Terra viene rappresentata su di un piano, anche se ben sappiamo che la superficie terrestre non è piana e quindi sappiamo che tale rappresentazione è certamente "sbagliata". Ma possiamo anche verificare che gli errori che commettiamo sono trascurabili nei confronti dei risultati che vogliamo conseguire. Analogamente per descrivere una porzione notevole di questa superficie usiamo una figura geometrica, quella della sfera, anche se ben sappiamo che la terra non è una sfera perfetta. Gli esempi si potrebbero ripetere e moltiplicare e portano alla conclusione alla quale già era arrivata la Matematica da vari decenni.

La Geometria può essere considerata almeno in due modi diversi: o come sistema ipotetico-deduttivo oppure come una teoria fisica, molto rudimentale e molto generale. Nel primo modo di vedere la Geometria appare semplicemente come una successione di deduzioni che non pretendono di dire nulla di "vero" nel senso classico del termine. Nel secondo modo di vedere la Geometria appare come una teoria fisica, che si interessa di organizzare e razionalizzare le esperienze più elementari che noi eseguiamo sul mondo esterno: quelle che riguardano i corpi estesi, la loro forma, la loro posizione reciproca, ecc. È chiaro che se vediamo la Geometria secondo il primo punto di vista, si potrebbe affermare che essa è inutile e morta, perché vuota di contenuti e quindi senza alcuna "presa" sulla realtà. Se la consideriamo nel secondo modo possiamo dedurre che varrebbe la pena di fare addirittura della fisica, dicendolo esplicitamente, senza bisogno di tutto l'armamentario concettuale di una scienza decrepita (o pensata tale) come è considerata la Geometria. Se poi ci rivolgiamo alle varie estensioni della Geometria, per esempio alla Geometria degli spazi a più dimensioni, allora la obiezione della "inutilità" appare ancora più valida perché ovviamente nessuna esperienza concreta ci può dare i postulati della Geometria di uno spazio per esempio a 5 dimensioni, quindi lo sviluppare le deduzioni potrebbe essere considerato un puro "gioco" intellettuale analogo al gioco degli scacchi, ma senza alcun contenuto scientifico.

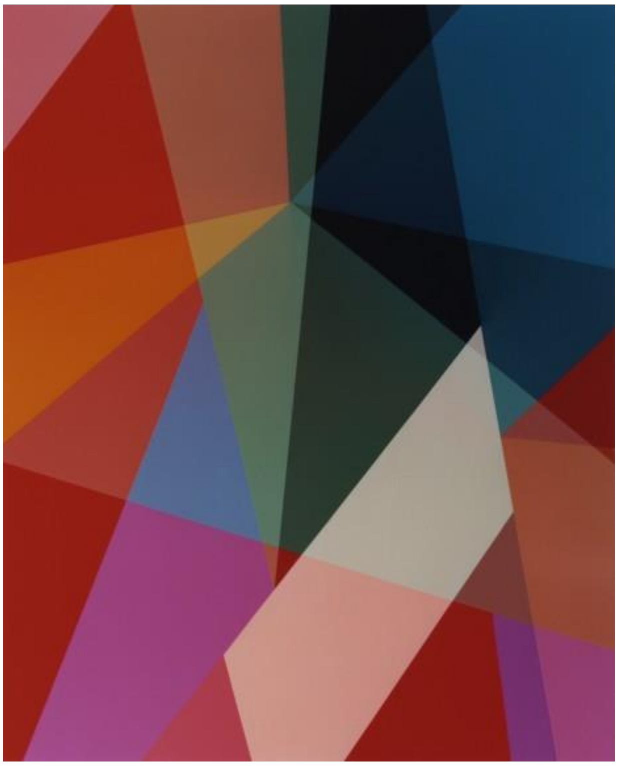
Va osservato tuttavia che tutto questo sarebbe vero anche in parte se la Matematica fosse una scienza rigorosamente deduttiva e formale, come molti se la immaginano. Se fosse vera questa immagine della matematica si dovrebbe concludere che questa scienza consiste tutta nella manovra delle formule e delle deduzioni puramente meccaniche che da questa manovra si possono trarre. Le cose invece stanno in modo abbastanza diverso e l'analisi del ragionamento matematico non si esaurisce nella constatazione della manovra meccanica delle formule. Ciò può essere constatato dalla propria esperienza personale, di chiunque abbia fatto qualche lavoro di ricerca in matematica, ma è assicurato anche dalle testimonianze di matematici valenti che hanno riflettuto sui procedimenti psicologici secondo i quali essi sono giunti alle loro scoperte.

Esiste in proposito un libretto classico di Jacques Hadamard (1945, Princeton University Press. The psychology of invention in the mathematical field), (*) nel quale questo grande matematico mette in rilievo quanto poco si sappia del procedimento di scoperta che si verifica nella mente umana quando fa della Matematica. Qualche matematico afferma addirittura che, per quanto il concetto di numero intero sia del tutto staccato dal concetto di tempo, tuttavia non ci sarebbe il numero se non ci fosse il tempo o meglio la nostra esperienza psicologica che si svolge necessariamente nel tempo.

Si potrebbe affermare anche, senza timore di dire cose troppo sbagliate, che anche nella pratica di tutti i giorni, il procedimento che porta alla determinazione di una proposizione matematica non è sempre e soltanto deduttivo e formale: la Matematica utilizza la induzione non meno che la deduzione, la fantasia non meno che il ragionamento rigoroso. La cosa può apparire immediata a chiunque consideri il procedimento con il quale si giunge alla risoluzione di un problema di Geometria elementare. In questa risoluzione il momento in cui ci si immagina il problema come risolto è spesso fondamentale per giungere al procedimento di costruzione della soluzione.

RAPPORTI DELLA GEOMETRIA CON LE STRUTTURE ALGEBRICHE. IL PROGRAMMA DI ERLANGEN, LA GEOMETRIA ALGEBRICA E LA TOPOLOGIA ALGEBRICA.

1. Potremmo dire che la Geometria è stata considerata in modo classico come una delle branche principali della Matematica. Anche senza aderire alle definizioni classiche, le quali distinguevano nel "genus" della Matematica, intesa come scienza della quantità, la "species" Geometria come scienza della quantità continua, contrapposta alla Aritmetica, intesa come scienza della quantità discreta, potremmo dire che la genesi comune della Geometria e delle altre branche dal tronco della Matematica portava come conseguenza una certa affinità di metodi e di procedure. Questa affinità si è resa molto più stretta nei tempi recenti, attraverso certi episodi storici che ricorderemo. Tuttavia vale la pena di ricordare che anche nell'epoca classica questa affinità era molto stretta. È noto che in Euclide si trovano delle costruzioni geometriche le quali equivalgono alla riso1uzione della equazione algebrica di II° grado. Per meglio dire, quando si accosti ad ogni segmento il numero reale che è la sua misura in una unità prefissata, e si scriva una equazione di II° grado, le costruzioni che Euclide dà riconducono alla costruzione dei segmenti che hanno come lunghezze le radici della equazione di II° grado. Analogamente si potrebbe dire che in Euclide si trovano in forma geometrica le formule fondamentali dell'Algebra. Per esempio la formula elementare che dà il quadrato di un binomio viene rappresentata in forma geometrica, e così altre formule di Algebra elementare. Si potrebbe dire anche, in forma poco precisa ma suggestiva, che la Geometria forniva alla Matematica classica il succedaneo dell'Algebra dei numeri reali.


Shirana Shahbazi 2013

La limitazione che tratteneva i Greci, cioè la preoccupazione di non poter rappresentare prodotti di più di tre fattori, fu superata da Cartesio. Notiamo infatti che, considerato un numero reale come misura di un segmento, il prodotto di due numeri reali veniva interpretato come rappresentativo dell'area del rettangolo costruito sui due segmenti che avevano le misure date dai due numeri reali, il prodotto di tre veniva interpretato come la misure del volume del parallelepipedo che aveva come spigoli i tre segmenti corrispondenti ai numeri. Data la tridimensionalità dello spazio fisico del quale abbiamo esperienza risultava ovvia la impossibilità di dare una rappresentazione geometrica del prodotto di più che tre numeri. Tale difficoltà venne superata da Cartesio associando al prodotto di due segmenti un segmento (con la costruzione dovuta al teorema di Talete) e quindi con la possibilità di dare la rappresentazione geometrica concreta di ogni espressione razionale comprendente un numero quale si voglia di termini monomi e polinomi. L'uso del compasso porta poi alla possibilità di rappresentare anche espressioni che contengono irrazionali quadrati in numero qualunque, purché finito. Di qui alla convenzione di rappresentare qualunque figura geometrica mediante numeri e relazioni algebriche il passo è stato breve. Nasceva così la Geometria analitica, che può essere considerata come un insieme di convenzioni per rappresentare gli enti della Geometria con quelli dell'Algebra. Per esempio una retta di un piano viene fatta corrispondere ad una equazione di primo grado nelle coordinate cartesiane di punto, e il fatto geometrico di appartenenza di un dato punto ad una data retta viene tradotto con il fatto algebrico che le coordinate del punto costituiscano una soluzione della equazione. Il problema dì intersecare due rette viene ricondotto al problema di trovare la soluzione comune a due equazioni di primo grado, e l'insieme dei punti di un semipiano viene rappresentato mediante una disequazione lineare .

Naturalmente questa rappresentazione di enti e questa traduzione dei problemi e delle relative soluzioni non sarebbe possibile senza la esistenza di un certo parallelismo tra le strutture della Geometria e quelle dell'Algebra. Si potrebbe dire addirittura che la Geometria analitica prosegue l' impostazione classica che vede la continuità della Geometria e dell'Algebra, questa volta non più conferendo alla

Geometria il compito di rappresentare gli enti dell'Algebra, come avveniva per la Geometria greca, ma conferendo all'Algebra il compito di tradurre e di risolvere i problemi della Geometria. Questa situazione è anche stata fonte di grande progresso per ciascuna della due scienze, perché è chiaro che per esempio la rappresentazione di curve quali si vogliano mediante i metodi della Geometria analitica ha avuto una grande influenza sulla posizione e sulla risoluzione del problema delle tangenti, che è uno dei problemi dai quali ha avuto nascita il Calcolo infinitesimale. Si potrebbe dire anche che la immagine geometrica e la necessità di rendere con perfetto rigore alcuni concetti della Geometria che erano considerati come oggetti di "intuizione", cioè venivano presi da una esperienza idealizzata e trasfigurata dalla immaginazione senza ulteriore analisi critica, ha portato a maturazione il processo di ricerca del rigore, per il quale si ricorda la Matematica del secolo XIX. Pertanto si potrebbe dire che il parallelismo dei procedimenti e dei concetti della Geometria e del resto della Matematica ha costituito uno stimolo fecondo per tutta questa scienza.

La cosa ha avuto un rilievo particolare quando, nella seconda metà del secolo scorso, l'Algebra ha incominciato a costruire ed a studiare certe nuove strutture, che hanno costituito il germe per l'Algebra di oggi. Come è noto, la struttura che è stata investigata storicamente per prima è la struttura di gruppo, che oggi riceve una grande quantità di applicazioni, nella Matematica ed anche fuori, come per esempio nella Fisica. La struttura algebrica di gruppo ha dato luogo ad una celebre interpretazione del concetto di Geometria che risale al 1802 e che è dovuta a Felix Klein. Questi, nella dissertazione inaugurale dei suoi corsi alla Università di Erlangen (dissertazione che viene anche conosciuta nella Matematica con l'espressione di "Programma di Erlangen"), mise in relazione la geometria con il concetto di gruppo e precisamente con il concetto di "gruppo di trasformazioni".

Che cosa si intenda con questa espressione può essere mostrato facilmente con un esempio che prendiamo dalla Geometria elementare. Consideriamo dunque un piano e supponiamo di conoscere il significato della frase seguente: "movimento rigido di una figura del piano". Se volessimo descrivere il significato della frase potremmo dire che, con altre parole, un movimento rigido è una operazione che fa corrispondere ad una figura piana una certa altra figura pure piana. La cosa più interessante è che l'insieme dei movimenti può ricevere una struttura, mediante la operazione che viene abitualmente chiamata "composizione" dei movimenti. Consideriamo a tal fine un movimento α e supponiamo che tale movimento porti una figura *F* in un'altra figura *F'*; indicheremo questa circostanza scrivendo simbolicamente $\alpha\colon F \to F'$.

T. M. Escher. Bird/Fish 1938

Supponiamo ora che un altro movimento, chiamiamolo β, porti la figura *F'* in una figura *F''*; si abbia cioè $\beta\colon F' \to F''$.

Possiamo osservare che esiste un terzo movimento, chiamiamolo γ, che porta *F* in *F''*, cioè tale che $\gamma\colon F \to F''$.

Il risultato del movimento γ ovviamente si ottiene applicando il movimento β alla figura *F'*, che già risulta dall'applicazione di α alla figura *F*; esso viene anche detto ottenuto per "composizione" dei due movimenti α e β, e si scrive simbolicamente $\gamma = \alpha \cdot \beta$.

Si ottiene così una operazione di composizione di due enti (i "movimenti rigidi") che possiede certe proprietà formali e che di conseguenza viene studiata, sotto questo aspetto, dall'Algebra. Le proprietà formali sono le seguenti:

a) l'operazione di composizione possiede la proprietà associativa; in altre parole, indicati con α, β, γ tre movimenti quali si vogliano, si ha $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

b) esiste un movimento i, chiamato "identità", tale che ogni figura viene mutata in se stessa da i; si ha quindi, quale che sia α, $i \cdot \alpha = \alpha \cdot i = \alpha$.

c) considerato un movimento α qualunque, esiste un unico movimento, indicato con α^{-1}, tale che $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = i$. I due movimenti α e α^{-1}vengono chiamati "inversi" l'uno all'altro.

Nel linguaggio dell'Algebra di oggi si suole esprimere tutto ciò dicendo che i movimenti rigidi del piano su se stesso formano un gruppo. Orbene sappiamo che storicamente la struttura algebrica che oggi chiamiamo gruppo è stata introdotta nella Matematica attraverso il concetto di "Gruppo di trasformazioni". Consideriamo per esempio un insieme *T* che sia l'insieme delle figure del piano. Indicheremo con *F* un elemento di *T*; sia cioè *F* una figura del piano; indicheremo con $F' = \alpha(F)$ la figura che si ottiene dalla *F* applicandole la trasformazione α. Sia poi $F'' = \beta(F)$ la figura che si ottiene dalla *F'* applicandole la trasformazione β. È chiaro che si può passare dalla *F* alla *F''* mediante un'unica trasformazione γ, che possiamo chiamare "composta" di α e di β , ed indicare con il simbolo $\gamma(F) = \beta(\alpha(F))$.

Orbene la considerazione dei gruppi di trasformazioni ha condotto alla risoluzione di un problema che aveva molto interesse all'epoca della "Dissertazione inaugurale" di Klein e che comunque riveste anche interesse per oggi, perché stabilisce in termini rigorosi quale significato sia quello da dare alla "obbiettività" della conoscenza e della scienza. Infatti le considerazioni di Klein hanno condotto a prendere in considerazione le proprietà delle figure geometriche le quali non variano rispetto a determinati gruppi di trasformazioni alle quali sottoponiamo le figure stesse. In altre parole questi "invarianti" caratterizzano le proprietà per così dire "obbiettive" che i vari tipi di Geometrie potevano studiare e determinavano d'altra parte la Geometria che le studiava. Per esempio la Geometria elementare (detta anche Geometria metrica) viene in questo ordine di idee caratterizzata dal gruppo delle similitudini e parallelamente viene caratterizzata come lo studio delle proprietà delle figure geometriche che risultano essere invarianti per similitudine. In altro modo la Geometria proiettiva veniva caratterizzata attraverso un gruppo più vasto di quello della Geometria elementare e quindi quest'ultima veniva in questo senso subordinata a quella.

T. M. Escher. Two birds 1938

In questo modo quindi una struttura algebrica di tipo apparentemente "nuovo", come la struttura di gruppo, si introduceva nella Geometria e rendeva più generale il parallelismo tra lo studio delle proprietà geometriche e lo studio dell'Algebra. Si potrebbe dire che la evoluzione nei decenni seguenti ha avuto la stessa direzione. Oggi moltissime strutture algebriche hanno il loro vocabolario geometrico ed hanno legami più o meno diretti con la intuizione geometrica e le suggestioni della fantasia che ne conseguono.

È vero che, come ripetono gli Autori, la Geometria e la intuizione sperimentale non hanno più alcun ufficio di sostegno logico delle deduzioni, ma è anche vero che il linguaggio geometrico risulta essere utilissimo nella espressione delle proprietà e soprattutto la fantasia geometrica risulta essere uno strumento spesso indispensabile per la scoperta delle proprietà che debbono essere dimostrate. Tutto ciò che abbiamo detto si adatta mirabilmente a quella che era chiamata la Geometria algebrica di scuola italiana. In questa dottrina era ben noto ai ricercatori (almeno a quelli aventi capacità di critica più fine) che il sostegno della trattazione era dato dalle note proprietà delle funzioni analitiche, ma era pure altrettanto noto il fatto che la intuizione geometrica giocava un ruolo fondamentale nella scoperta delle proprietà riposte che si ricercavano.

IDEE PER UN CORSO DI MATEMATICA ORIENTATO VERSO LE SCIENZE DELL'UOMO.

1. Il fatto che la Matematica possa essere applicata utilmente alle scienze dell'uomo è stato talvolta accettato poco volentieri. Si potrebbe dire che questo atteggiamento è dovuto ad una concezione della Matematica che riflette il carattere che questa scienza aveva forse qualche decennio fa; non appare più giustificato questo atteggiamento nei riguardi della Matematica di oggi. Infatti nella concezione classica la Matematica veniva considerata quasi sempre ed esclusivamente come la scienza dei numeri o magari anche come la scienza della quantità. Ne conseguiva la critica molto comune contro l'uso della Matematica nelle scienze dell'uomo, obiezione che faceva perno sulla osservazione che ben poche cose che riguardano l'uomo sono quantificabili e certamente non delle più interessanti. Infatti l'attività dell'uomo risulta caratterizzata sostanzialmente dalla presenza della libertà e quindi qualcuno difficilmente accettava che si potessero scrivere delle relazioni quantitative che potessero dominare il comportamento dell'uomo. Il tentativo di spiegare il comportamento stesso con la introduzione di funzioni di utilità o di "ofelimità" (per dirla con la espressione di V. Pareto) soggiaceva alla critica analoga a quella che abbiamo già esposto; critica la quale metteva in evidenza sostanzialmente che la scala dei valori in base alla quale l'uomo fa le sue scelte difficilmente può essere tradotta con numeri e con funzioni della Matematica.

2. Le osservazioni che abbiamo riportato come tipiche, ed altre che si sentono spesso ripetere, trascurano il carattere che la Matematica ha di suo e che ha messo in evidenza sempre di più nei decenni recenti. Infatti si può accettare la affermazione che la Matematica tratta dei numeri e delle quantità, ma certamente sarebbe una concezione troppo limitata e ristretta quella che porta a considerare la Matematica <u>esclusivamente</u> come la scienza della quantità. Sta di fatto invece che la Matematica si presenta sempre di più con il carattere di un linguaggio e di una metodica, che si presenta come uno schema tipico e generale di ogni procedimento scientifico di pensiero.

Appare infatti che la Matematica usa sostanzialmente di certi procedimenti mentali che potrebbero essere brevemente descritti con le seguenti osservazioni:
a) anzitutto la creazione di simboli artificiali per la rappresentazione degli oggetti del "reale" (quale che sia il significato che vogliamo dare a questo termine);
b) in secondo luogo la creazione di sintassi pure artificiali e di regole di deduzione, che si presentano come regole algebriche o sintattiche dei simboli artificiali che sono stati creati in precedenza e che permettono la formazione di 'teorie', cioè di sequenze di simboli, che sono formate con il rispetto delle regole artificiali stabilite.

3. In presenza di queste caratteristiche la Matematica si presenta quindi con l'aspetto sostanziale di un linguaggio. Le regole dell'Algebra classica, che riguardavano i numeri e la quantità, non sono che casi particolari di linguaggi artificiali. La loro considerazione esclusiva, che ha portato alla falsa idea che identifica la Matematica con esse, è dovuta semplicemente alla limitazione delle concezioni e delle conoscenza che si avevano all'epoca che formò questa concezione della Matematica.

La concezione moderna è sostanzialmente dominata da due caratteri. Il primo si potrebbe descrivere come la esasperazione della formalizzazione. Ne è prova la importanza grandissima assunta dall'Algebra nella Matematica che viene detta "moderna".
Il secondo carattere è la utilizzazione sempre più estesa e capillare di metodi automatici di calcolo. L'esistenza di circuiti che possono fare delle operazioni che vengono dette "logiche" è una prova di ciò che vogliamo dire. Non si vuole evidentemente dire che le macchine, per quanto meravigliose siano, possono sostituire la mente umana; si vuole soltanto ricordare che la Matematica non consiste soltanto di operazioni su numeri e che quindi anche quella delle operazioni della logica formale (quella che gli antichi chiamavano *logica minor*) è materia delle ricerche della matematica.

4. Cadono quindi alcune tra le obiezioni che sono state elevate anche troppe volte contro la utilizzazione della Matematica nelle scienze dell'uomo. Si acquisisce anche la certezza del fatto che la Matematica possiede degli strumenti che le permettono di dominare anche dei fatti della "realtà" che forse una volta si pensavano estranei alla sua portata.

A titolo puramente esemplificativo possiamo ricordare per esempio le strutture dell'Algebra moderna, che permettono una vasta gamma di applicazioni: pensiamo alla teoria dei reticoli che permette di rappresentare le strutture gerarchiche della realtà sociale, oppure pensiamo alla teoria degli insiemi, che permette di formalizzare e di trattare con simboli artificiali le operazioni più elementari che la nostra mente riesce ad eseguire; pensiamo all'Algebra di Boole, che riproduce certe operazioni della logica delle proposizioni. Tutte queste strumentazioni permettono alla Matematica moderna di rappresentare una estensione molto più grande della realtà di quanto non si pensasse qualche decennio fa. Pensiamo anche alla possibilità dì rappresentare le relazioni; possibilità che permette alla logica formale una trattazione rigorosa di certi ragionamenti che sfuggivano alla strumentazione della logica classica.

Il ricordo dell'Algebra di Boole ci permette di fare qui una osservazione, sulla quale ritorneremo, ma che facciamo subito prima che si avanzino delle critiche fuori luogo. Come è noto, l'opera di Boole era stata concepita per dare alla dimostrazione della esistenza di Dio un fondamento assolutamente non attaccabile. Questa almeno era la illusione del Boole, illusione che fu superata dalla critica filosofica posteriore. È infatti impossibile sostituire la mente umana in quanto ha di caratteristico e di peculiare, cioè nella capacità di astrazione. Illusioni analoghe, che provocano critiche analoghe, si radicano oggi a proposito della utilizzazione dei calcolatori, chiamati pittorescamente "macchine pensanti". Anche in questo caso il timore che queste macchine possano sostituire l'uomo in quanto ha di peculiare nel suo pensiero è assolutamente infondato, così come si è rivelata infondata la illusione del Boole di stabilire su basi granitiche ciò che invece è materia di speculazione filosofica. Al posto dei circuiti dei calcolatori elettronici Boole poneva chiaramente le regole della sua Algebra, regole che dovevano funzionare automaticamente. Naturalmente la non esistenza di "macchine per convertire" (come si esprime pittorescamente un Autore) non toglie che questi nuovi strumenti possano essere applicati per rendere più rigoroso il nostro ragionamento e per rendere più facile il compito della astrazione scientifica, laddove essa gioca un ruolo essenziale. Come avviene per il calcolatore, si può dire per tutti gli strumenti che la Matematica moderna mette a disposizione dell'uomo che viene dilatata la possibilità deduttiva, e quindi viene aumentata di molto la conoscenza delle implicazioni di certe ipotesi, poste oppure accettate. Si può quindi dire, come avviene per la Economia matematica, che la introduzione della strumentazione matematica nelle scienze sociali non diminuisce l'uomo, ma lo libera dalla fatica di deduzione e rende facile e rigorosa l'impresa di dominare una grande congerie di fatti e di relazioni.

Infatti si può constatare facilmente che ogni scienza che si crea un linguaggio formalizzato non torna più indietro, perché tale ritorno sarebbe una indubbia involuzione; si pensi per esempio a che cosa sarebbe la Chimica senza le formule; a che cosa sarebbe la Fisica senza la possibilità di utilizzare il linguaggio della Matematica. Anche se, come osserva acutamente Carnap, i problemi logici della Fisica sono ben diversi dai problemi propri del linguaggio matematico. Lo stesso si può constatare quando si confronti il linguaggio puramente qualitativo che è stato usato dai primi economisti (e che purtroppo viene usato anche troppo spesso anche oggi), con il linguaggio rigoroso della Economia Matematica.

5. Si potrebbe a questo punto ricordare che un acuto Autore, J.B. Fourier, ha dichiarato che la Matematica non ha simboli per le idee confuse e che non ha la possibilità di servire per le emozioni degli affetti. Da un certo punto di vista questa è una confessione di limitazione della possibilità della Matematica, perché appare evidente che la vita dell'uomo comprende anche le emozioni e che quindi il linguaggio naturale ha una sua ricchezza che il linguaggio matematico artificiale non si sogna di contestargli. Ma da un altro punto di vista si potrebbe affermare che questa limitazione è provvidenziale perché toglie al linguaggio che si vuole scientifico la incertezza, la sfumatura, la equivocità del linguaggio naturale. Pertanto la scelta qui da farsi non è tra la Matematica e non Matematica, ma tra linguaggio naturale e linguaggio artificiale formalizzato. Infatti è essenziale al linguaggio matematico la caratteristica di avere una sua sintassi; la Matematica in quanto linguaggio non è soltanto un modo per "cifrare" la realtà, ma è anche un insieme di regole di sintassi (potremmo magari chiamarle genericamente "regole di Algebra") che permettono la deduzione rigorosa. Tale rigore di deduzione è proprio conseguito in forza della artificialità del linguaggio e delle sue leggi ed in forza della astrattezza del linguaggio stesso.

MATEMATICA E SOCIETÀ

È un luogo comune quello che si sente enunciare da varie parti, cioè il fatto che la civiltà che stiamo vivendo è strettamente legata alla tecnica. Non vogliamo dare un giudizio di questo fatto; forse ci stiamo accorgendo che il nostro modo di vivere ci conduce al dominio sulle forze della Natura (e ben scarso dominio d'altronde), ma non ci dà la felicità e la pace. Forse ci stiamo anche accorgendo che la conoscenza che noi abbiamo di questo mondo in cui viviamo pur essendo molto vasta, ci lascia sempre maggiori margini di oscurità e di insicurezza. Quella che era la atmosfera di incertezza e di angoscia che l'uomo primitivo aveva attorno a sé, perché vedeva incarnate forze misteriose nelle potenze della natura che gli erano sconosciute, è diventata per noi angoscia di altro genere, ma sempre angoscia nello scoprire che siamo ancora lontani dalla pace e dalla felicità.

Tuttavia la verità che stiamo per considerare, e cioè che questa nostra società di oggi è fondata sul dominio che la tecnica ci fornisce della natura che ci circonda, è una cosa scontata. Così come pare cosa scontata la constatazione del fatto che questa tecnica che viene di volta in volta benedetta o maledetta è strettamente collegata con la scienza.

Si potrebbe dire che è questo uno dei fenomeni più interessanti della vita che conduciamo; infatti se guardiamo alla storia della tecnica nei secoli che ci hanno preceduti, troviamo che spesso la realizzazione tecnica che ha portato anche ad un progresso sensibile nella vita e nella comodità era staccata dalla scienza vera e propria. Beninteso non è questa una legge generale e basterebbe a smentirla l'episodio che fa parte della storia romanzata e che ricorda Archimede che con le sue invenzioni aiuta la propria patria in pericolo. Tuttavia è anche vero che molte delle scoperte della tecnica sono state frutto di una ingegnosità spicciola, che poteva anche essere staccata dalla scienza ufficiale e che comunque portava ad un migliore dominio dell'uomo sulle forze della natura. Non possiamo dimenticare gli episodi della storia della tecnica, per esempio la invenzione del telaio meccanico, oppure altre invenzioni che prima dell'epoca industriale, anche agli albori di questa, si presentavano più come frutto di pazienti ricerche e di ingegnose realizzazioni che come frutto di conoscenza sistematica applicata alla pratica. Soltanto con l'epoca industriale cominciano la Chimica e la Fisica a far parte integrante della applicazione della energia al dominio della natura. Fino alla imponente fioritura di industrie che oggi ricavano direttamente dalla scienza le direttive ed i fondamenti per la loro produzione.

E ciò si badi non soltanto per quanto riguarda il fenomeno di produzione isolatamente preso, ma anche per quanto riguarda tutto il ciclo che va dalla conduzione della azienda (ispirata a criteri scientifici, suggeriti dalla economia e dalle branche della scienza delle aziende) alla presentazione sul mercato di prodotto finito (che utilizza studi di psicologia e campagne di informazione). È bensì vero che ancora oggi il mondo produce degli "inventori" che si illudono di poter imprimere una svolta fondamentale alla vita di tutti mediante la loro opera isolata: ancora oggi ci sono inventori di esplosivi, che credono di poter fare a meno dei bilanci termochimici, inventori di motori che credono di poter fare a meno di bilanci energetici, inventori di grandi “trovate” che credono di poter saltare il fosso incolmabile che li divide dalla vera “scoperta” con l'ingegno del singolo. Ancora oggi ci sono quella patetiche figure che non si rendono conto del fatto che la scienza è lungo lavoro e richiede assiduo studio e profonda preparazione, che la tecnica non può più essere improvvisazione e “trovata” geniale, ma è strettamente legata alla scienza. Si potrebbe addirittura dire che oggi la frontiera tra scienza pura e tecnica diventa sempre più sfumata e che ciò che è scienza pura oggi può diventare tecnica domani o posdomani. D'altra parte la tecnica offre sempre di più i suoi poteri alla scienza; pensiamo alla Fisica che oggi si vale di strumenti costruiti soltanto da una industria potentissima e raffinatissima. Pensiamo alla biologia che sfrutta gli strumenti della tecnica elettronica e della tecnica degli elementi radioattivi ecc.

Dopo che abbiamo considerato il posto che la scienza ha nella società di oggi e nella vita che questa conduce, siamo in grado di analizzare brevemente il posto che la Matematica tiene nella scienza di oggi. Senza voler peccare di eccessiva presunzione e senza dimostrare eccessivo “patriottismo di materia” o “spirito di corpo”, potremmo dire senza timore di esagerare che la Matematica oggi tiene uno dei posti più importanti nel quadro delle scienze e che in linea di principio fornisce il quadro ideale della scienza moderna. Per convincerci di questo occorre considerare che i procedimenti tipici della Matematica sono in certo modo anche il modello dei procedimenti tipici di ogni scienza che abbia la pretesa di avere un assetto moderno. Tra questi procedimenti tipici potremmo ricordare: a) il procedimento di astrazione; b) il procedimento di costruzione di simboli artificiali che costituiscono il linguaggio proprio di ogni scienza; c) il procedimento di deduzione in forza delle leggi tipiche dei simboli artificiali che sono stati costruiti.

È chiaro che il passo a) è caratteristico di ogni scienza che voglia essere degna di questo nome. Già la filosofia medievale diceva, con ragione “de singularibus non datur scientia” e così il procedimento di astrazione e di generalizzazione appare come il procedimento tipico di ogni sapere scientifico.

In questo ordine di idee è chiaro che la Matematica offre l’esempio più tipico di procedimenti astrattivi che risultano della massima generalità. Ricordiamo per esempio il concetto di “struttura” che entra nella Matematica moderna come un esempio tipico del procedimento di astrazione, che fa astrazione dei singoli contenuti e dei singoli “oggetti” di conoscenza per studiare soltanto le relazioni fra strutture le loro proprietà.

Reimpaginato agosto 2013

(*) *N. d. R.* Si riporta dal sito

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Hadamard_mathematician.html

…..

Jacques Hadamard's mathematician's mind. In 1945 Princeton University Press published The psychology of invention in the mathematical field, by Jacques Hadamard.

J S Joel writes that the work:... was one of the earliest investigations of the relationship between consciousness and creativity. Hadamard considered the process of invention to progress through several stages, beginning with "preparation", passing through "incubation" to "illumination", and finally reaching "verification". His emphasis on the preparatory stage is at odds with one current theory, which emphasizes the illuminatory one. But it seems that Hadamard's model works very well for mathematics. In this sense the book retains its importance and value for modern psychologists, cognitive scientists, and mathematicians. We reproduce below the Introduction.

Introduction. Concerning the title of this study, two remarks are useful. We speak of invention: it would be more correct to speak of discovery. The distinction between these two words is well known: discovery concerns a phenomenon, a law, a being which already existed, but had not been perceived. Columbus discovered America: it existed before him; on the contrary, Franklin invented the lightning rod: before him there had never been any lightning rod. Such a distinction has proved less evident than appears at first glance. Torricelli has observed that when one inverts a closed tube on the mercury trough, the mercury ascends to a certain determinate height: this is a discovery; but, in doing this, he has invented the barometer; and there are plenty of examples of scientific results which are just as much discoveries as inventions. Franklin's invention of the lightning rod is hardly different from his discovery of the electric nature of thunder. This is a reason why the aforesaid distinction does not truly concern us; and, as a matter of fact, psychological conditions are quite the same for both cases. On the other hand, our title is "Psychology of Invention in the Mathematical Field," and not "Psychology of Mathematical Invention." It may be useful to keep in mind that mathematical invention is but a case of invention in general, a process which can take place in several domains, whether it be in science, literature, in art or also technology. Modern philosophers even say more. They have perceived that intelligence is perpetual and constant invention, that life is perpetual invention. As Ribot says, "Invention in Fine Arts or Sciences is but a special case. In practical life, in mechanical, military, industrial, commercial inventions, in, religious, social, political institutions, the human mind has spent and used as much imagination as anywhere else"; and Bergson, with a still higher and more general intuition, states: The inventive effort which is found in all domains of life by the creation of new species has found in mankind alone the means of continuing itself by individuals on whom has been bestowed, along with intelligence, the faculty of initiative, independence and liberty. Such an audacious comparison has its analogue in Metschnikoff, who observes, at the end of his book on phagocytosis, that, in the human species, the fight against microbes is the work not only of phagocytes, but also of the brain, by creating bacteriology. One cannot say that various kinds of invention proceed exactly in the same way. As the psychologist Souriau has noticed, there is, between the artistic domain and the scientific one, the difference that art enjoys a greater freedom, since the artist is governed only by his own fantasy, so that works of art are truly inventions. Beethoven's symphonies and even Racine's tragedies are inventions. The scientist behaves quite otherwise and his work properly concerns discoveries. As my master, Hermite, told me: "We are rather servants than masters in Mathematics." Although the truth is not yet known to us, it pre-exists and inescapably imposes on us the path we must follow under penalty of going astray. This does not preclude many analogies between these two activities, as we shall have occasion to observe. These analogies appeared when, in 1937, at the Centre de Synthèse in Paris, a series of lectures was delivered on invention of various kinds, with the help of the great Genevese psychologist, Claparède. A whole week was devoted to the various kinds of invention, with one session for mathematics. Especially, invention in experimental sciences was treated by Louis de Broglie and Bauer, poetical invention by Paul Valéry. The comparison between the circumstances of invention in these various fields may prove very fruitful. It is all the more useful, perhaps, to deal with a special case such as the mathematical one, which I shall discuss, since it is the one I know best. Results in one sphere (and we shall see that important achievements have been reached in that field, thanks to a masterly lecture of Henri Poincaré) may always be helpful in order to understand what happens in other ones.

JOC/EFR August 2006