Carlo Felice MANARA

GIROLAMO CARDANO E LE ORIGINI DELL'ALGEBRA.

1 - È molto difficile commemorare degnamente, con un solo breve discorso, un personaggio della statura intellettuale di Girolamo Cardano; sono quindi costretto a fare una scelta tra le molte cose che si potrebbero dire; e scelgo di parlare di lui come matematico, perché da una parte mi sento più sicuro in un argomento che è abbastanza vicino alle mie competenze, e dall'altra vorrei anche cogliere l'occasione per presentare alcuni aspetti della matematica e della sua storia che non sono forse molto conosciuti e considerati.

Dovrò nondimeno dire qualche cosa anche degli altri aspetti della personalità del Cardano, scusandomi per la sommarietà del mio discorso.

2 - Girolamo Cardano nacque a Pavia nel 1501 (secondo alcuni storici nel 1506), e morì a Roma nel 1576. Dopo un'infanzia ed una fanciullezza travagliate fu avviato agli studi di grammatica, aritmetica, astrologia e dialettica, prima a Pavia e poi a Padova. Fu dottore in medicina, e condusse una vita errabonda, in Italia e fuori. Esercitò la medicina, ma anche l'astrologia e forse la magia. Ebbe polemiche, dispute, e fu accusato di eresia; e forse per questa ragione dovette soffrire la prigionia in Bologna. Trascorse gli ultimi suoi anni (dal 1571) a Roma, dove il Papa Gregorio XIII gli aveva assegnato una pensione.

La sua "Opera omnia" comprende dieci volumi; in particolare la sua autobiografia permette di gettare uno sguardo sulla mentalità degli ambienti culturali e scientifici del tempo. Su vari argomenti che all'epoca erano considerati scientifici egli manifestò alcune idee originali, ed in certo modo contro corrente rispetto alle opinioni dei suoi contemporanei; occorre dire tuttavia che tali idee sono molto spesso esposte entro l'inquadratura scolastica, tipica del tempo, anche se in alcuni passi egli tenta di confutare Aristotele, e di impostare una metodologia fondata sull'esperimento.

Ovviamente, per comprendere il significato e la portata di una personalità come quella di Cardano non possiamo far riferimento alla nostra visione della scienza, ma dobbiamo necessariamente tener conto della mentalità dell'epoca in cui egli visse. Questa precauzione sarà da tenersi presente in modo particolare per quanto riguarda le ricerche di matematica, perché questa scienza ha cambiato molto la propria struttura ed il proprio aspetto esteriore dall'epoca di Cardano ad oggi; benché alcuni elementi fondamentali della problematica matematica fossero presenti anche a quell'epoca, che oggi ci appare remota.

3 - Come ho detto, mi soffermerò quasi esclusivamente sull'apporto che Cardano ha dato alla matematica; tuttavia non posso passare sotto silenzio l'invenzione di un giunto meccanico

che trasmette il moto di rotazione da un albero ad un altro, concorrente ma non allineato; giunto che viene chiamato "cardanico" nel vocabolario tecnico mondiale, e che è impiegato ancora oggi in varie macchine, ed in particolare nelle automobili.

Ho ricordato questa invenzione perché anche da questo fatto si può avere qualche idea sulla intelligenza di quest'uomo straordinario; e soprattutto perché questa invenzione testimonia che egli dimostrò di avere, in molti campi, creatività e fantasia realizzatrice, qualità fondamentali per costruire il progresso autentico della scienza.

4 - Per tornare alla matematica, vorrei osservare che, nelle opere di divulgazione, si legge spesso che i Greci possedevano la soluzione dell'equazione di II grado. Questo modo di esprimersi può essere un po' fuorviante: io penso che sarebbe forse meglio dire che i Greci sapevano risolvere in forma geometrica i problemi che oggi noi formalizziamo e risolviamo con equazioni algebriche di II grado. La soluzione delle equazioni algebriche di terzo e di quarto grado è una gloria della matematica italiana del secolo XVI, che aprì nuove strade alla scienza per opera di grandi ricercatori: Girolamo Cardano, Ludovico Ferrari, Niccolò Tartaglia, Scipione del Ferro, Rafael Bombelli.

Mi piace aggiungere che, due secoli e mezzo più tardi, un altro geniale italiano, il modenese Paolo Ruffini, intuì che non è possibile risolvere, con espressioni contenenti soltanto radicali, l'equazione algebrica generale di grado superiore al quarto, e diede la prima dimostrazione di questo fondamentale teorema; l'opera di Ruffini concludeva così una vicenda scientifica secolare, che aveva visto la matematica italiana in primo piano; vicenda nella quale i matematici italiani hanno ottenuto il massimo risultato che si potesse conseguire, percorrendo una certa strada e con certi strumenti concettuali.

5 - La procedura per la soluzione dell'equazione algebrica di terzo grado è al centro di un celebre episodio, molto interessante per la storia della cultura e della scienza. Vorrei far notare che ho parlato di procedura e non di formula risolutiva: infatti non era ancora stato inventato un simbolismo algebrico che permettesse di tradurre le procedure con formule convenzionali, così come oggi noi usiamo fare. Lo stesso Niccolò Tartaglia (1499-1557), del quale dovremo subito riparlare a proposito della polemica con Cardano, nel 1546 espone la procedura risolutiva con parole, anzi addirittura in versi, nel libro IX della sua opera intitolata "Quesiti et inventioni diverse".

I termini della polemica riguardante la scoperta della procedura risolutiva dell'equazione cubica si potrebbero esporre in breve nel modo seguente: nel 1505 (secondo altri nel 1515) Scipione del Ferro, lettore di aritmetica e geometria nello studio di Bologna, risolve le equazioni di terzo grado, senza tuttavia pubblicare la procedura. Nel 1530 e nel 1535 il bresciano Niccolò Tartaglia costruisce e risolve alcune equazioni di terzo grado. Egli afferma di essere giunto alla soluzione generale partendo dalla sola notizia dell'esistenza di una procedura inventata dal Del Ferro. Nel 1539 il Tartaglia comunica la procedura al Cardano, nella casa milanese di questi, ed alla presenza di Ludovico Ferrari, allievo e collaboratore di Cardano: quest'ultimo si impegna con giuramento a non pubblicare la scoperta. Invece nel 1545 il Cardano pubblica a Norimberga la sua opera intitolata Ars magna", nella quale espone la procedura risolutiva dell'equazione cubica, attribuendola tuttavia al Del Ferro ed a Tartaglia.

Quest'ultimo si risentì per quello che egli considerò lo spergiuro di Cardano, e nella sua opera citata si esprime in modo offensivo nei riguardi di costui. La polemica tra i due dotti potrebbe anche essere considerata poco interessante, se non fosse sfociata nella vicenda dei "Cartelli di sfida matematica", che costituiscono un episodio notevole della storia della matematica.

A. Mazzotta. ***La disfida***

6 - Abbiamo detto che la disfida matematica, che fu lanciata a Tartaglia da Ludovico Ferrari in difesa del proprio maestro, Girolamo Cardano, rappresenta un episodio notevole della storia della matematica. Tale episodio tuttavia non è unico; infatti si ricorda, per esempio, che Leonardo da Pisa, detto il Fibonacci, ebbe delle dispute con Maestro Giovanni da Palermo, filosofo dell'imperatore Federico II. Altre dispute si ebbero nel secolo XVII tra Pietro Fermat e Renato Cartesio (due grandissimi matematici); ed un'altra sfida fu lanciata, nello stesso secolo, da Blaise Pascal (grande matematico, filosofo e teologo) a tutti i matematici suoi contemporanei, a proposito delle proprietà di quella curva che noi oggi chiamiamo "cicloide" e che egli allora

chiamava "roulette". I cartelli scambiati tra Ludovico Ferrari e Tartaglia sono sei, e riguardano argomenti di algebra, geometria, astronomia, architettura, filosofia.

Non mi pare questo il luogo per entrare nei particolari della disputa; dirò soltanto che l'incontro pubblico tra Ludovico Ferrari e Niccolò Tartaglia ebbe luogo il 10 agosto 1548 a Milano, nella chiesa di S. Maria del Giardino dei Minori osservanti (la chiesa oggi non esiste più, e sorgeva sull'area dell'attuale via Romagnosi). Secondo il Cardano, il Tartaglia fu vinto e costretto a ritrattare la accuse lanciate contro di lui; l'opinione di Tartaglia è ovviamente diversa, ma a noi non interessa dirimere qui la questione, che ha appassionato gli storici. Mi limito quindi a ricordare che in molti luoghi dei suoi scritti il Tartaglia insiste che vuole incontrare Cardano e non il Ferrari: egli infatti era ben conscio del fatto che quest'ultimo agiva in nome ed a difesa del suo maestro, e si appoggiava all'autorità ed all'intelligenza di questi.

7 - I cartelli di disfida matematica non rappresentano soltanto una curiosità storica, che ci fornisce informazioni sui costumi dell'epoca; essi hanno anche dato occasione, tra l'altro, al Cardano di dimostrare, insieme con il Ferrari, un notevole teorema di geometria elementare. Arnaldo Masotti, storico della matematica, nel volume da lui curato ed intitolato "Lodovico Ferrari e Niccolò Tartaglia - Cartelli di sfida matematica" (Brescia, 1974), propone di chiamare tale proposizione "Teorema di Ferrari - Cardano".

Esso afferma che ogni costruzione di geometria elementare, che richieda per la sua esecuzione l'impiego della riga e del compasso (ad apertura variabile), può essere eseguita anche utilizzando soltanto la riga ed il compasso ad apertura fissa. Nel secolo XIX questo risultato verrà inquadrato nella grande teoria algebrico-geometrica che riguarda i problemi classici della geometria; pertanto il teorema, considerato in se stesso, potrebbe essere giudicato come poco importante, se non fosse, ancora una volta, una testimonianza dell'acume matematico e dell'inventiva dei due matematici milanesi.

8 - Insieme con il risultato di geometria di cui ho fatto cenno, si deve a Cardano anche un primo spunto per l'invenzione di quegli enti matematici che oggi vengono chiamati "numeri complessi"; infatti egli, nei suoi calcoli, operò anche con numeri il cui quadrato è negativo.

Come è noto, l'introduzione rigorosa di questi nuovi enti è stata opera dell'algebrista bolognese Rafael Bombelli, il quale per primo formulò per tali numeri delle regole coerenti di calcolo. Oggi noi sappiamo bene che i cosiddetti "numeri immaginari" non hanno nulla di strano o di magico, ma sono elementi di certe strutture algebriche più ampie di quelle tradizionali; infatti queste ultime riguardano soltanto quei numeri che vengono tradizionalmente chiamati "reali", e che forniscono gli strumenti classici della geometria elementare e dell'analisi matematica tradizionale.

Con molta probabilità, all'epoca di Cardano l'introduzione di questi enti era considerata quasi come un'opera di magia, e le operazioni su di essi erano considerate in qualche modo strane, ed erano accettate soltanto in forza delle verifiche che si facevano alla fine dei calcoli. E del resto a quell'epoca la matematica era considerata come una scienza un po' misteriosa, che era quasi affine alla stregoneria e veniva utilizzata per ottenere oroscopi, e per calcoli di astrologia. Il che del resto è coerente con l'impiego del termine latino "mathematicus", che in molti autori dell'epoca è usato spesso come sinonimo di mago o stregone. Non possiamo escludere che presso il Nostro autore le ricerche di matematica rivestissero in parte anche questo carattere; resta tuttavia il fatto che il suo nome è legato alla nascita di una dottrina fondamentale che oggi viene comunemente chiamata algebra.

9 - Chi conosce la matematica nel senso moderno del termine trova forse qualche ostacolo nel comprendere e valutare le difficoltà che dovettero essere superate per porre i fondamenti di un capitolo della matematica che a noi appare del tutto semplice ed elementare. Tuttavia una breve riflessione permette di renderci conto della situazione in cui si trovavano i matematici del secolo XV e della grandezza delle loro imprese. Vorrei osservare a questo punto che le convenzioni oggi universalmente usate per la rappresentazione dei numeri naturali furono introdotte nella civiltà occidentale soltanto nel secolo XIII, per opera del pisano Leonardo, detto il Fibonacci (1170 (?)-1230); prima di allora non si possedevano strumenti simbolici comodi per rappresentare i numeri, e soprattutto per eseguire le operazioni su di essi. Di conseguenza le argomentazioni matematiche erano svolte prevalentemente ricorrendo alle immagini geometriche, ereditate dalla matematica greca. Ma queste immagini, pur essendo molto valide, presentano dei limiti, che hanno il loro fondamento nella nostra immaginazione. Lo stesso Cardano osserva, in un passo della "Ars Magna": "Una positio (prima potenza) può essere rappresentata da una lunghezza, un quadrato può essere rappresentato da una superficie, un cubo può essere rappresentato da un volume; sarebbe una follia cercare di andare oltre. La natura non lo permette."

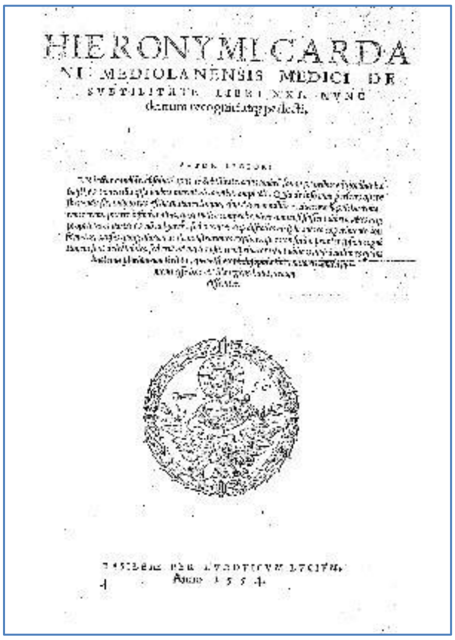
Soltanto quando i matematici possedettero gli strumenti validi per rappresentare comodamente e semplicemente dei numeri comunque grandi, e soprattutto per eseguire speditamente le operazioni su di essi, iniziò quel movimento di idee che condusse alla rivoluzione scientifica del Rinascimento. Per queste ragioni io penso che la pubblicazione del "Liber abaci" di Leonardo Pisano, avvenuta nel 1202, sia uno dei fatti culturali più importanti della nostra civilizzazione. Tuttavia soltanto nel secolo XVI, per opera degli algebristi italiani, si gettarono le basi per un calcolo che operasse sulle "cose" (come essi chiamarono le incognite) non determinate, e quindi si fondasse soltanto sulle proprietà formali delle operazioni e non sui valori dei numeri.

In seguito, nel secolo XVII, Renato Cartesio spezzò i legami posti dall'immagine geometrica, (legami di cui abbiamo letto poco fa in Cardano), e giunse a dare significato geometrico a potenze qualsivogliano delle variabili; si potrebbe dire che da quell'epoca si invertirono le reciproche relazioni tra l'algebra e la geometria; quest'ultima perdette la posizione preminente che aveva prima occupato, ed anzi dovette ricorrere all'algebra per la risoluzione di quei problemi che sfuggivano alla portata dei suoi strumenti. Ma per giungere a questa situazione si dovette costruire un sistema di simboli per rappresentare le operazioni algebriche, simboli che all'epoca di Cardano e Tartaglia non erano posseduti dai matematici. Ciò aumenta ancora di più la nostra ammirazione per il loro acume e per la loro creatività.

Possiamo dunque affermare serenamente che essi aprirono la strada per la scienza moderna, profondamente matematizzata. Infatti poco meno di un secolo dopo le scoperte di Cardano e degli altri matematici italiani poteva Galileo scrivere la celebre pagina in cui afferma che il gran libro dell'universo che continuamente ci sta aperto davanti agli occhi è scritto in caratteri matematici, e che chi non conosce questi caratteri non saprà mai leggere in quel libro, e si aggirerà nell'universo come in un "*oscuro laberinto*".

Nessuno può presumere, e meno di tutti noi oggi, di aver illuminato ogni angolo di questo labirinto; anzi questo ci si presenta ogni giorno più complicato, con l'ampliarsi delle nostre conoscenze; ma certo i nostri maestri e predecessori hanno acceso molte luci. E mi pare che questo sia uno dei pochi titoli di gloria al quale l'uomo può aspirare.   Milano, 4 giugno 1991.

Testo reimpaginato da file gennaio 2016


HIERONYMI CARDA
NI MEDIOLANENSIS MEDICI DE
SVBTILITATE LIBRI XXI. NVNC

In :http://mathematica.sns.it/autori/1358/

CALCOLI SUL GIUNTO CARDANICO

In un riferimento cartesiano ortogonale *O, x, y, z* sia *a* una retta del piano *x = 0*, passante per *O* e formante un angolo γ con l'asse delle *z*.

Si considerino i 4 punti seguenti:

(1) $A = (1,0,0)$, $A' = (-1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $B' = (0,-1,0)$.

La "croce" rigida a bracci uguali, avente per estremi i quattro punti (1), è incernierata nei punti *A* ed *A'* con una "forchetta" avente per manico la retta *a* (nella parte giacente nel quadrante positivo del piano degli assi *y* e *z*), ed è incernierata nei punti *B* e *B'* ad una "forchetta" avente per manico l'asse delle z (parte negativa).

Il segmento rigido *OA* ruota in un piano α perpendicolare alla retta *a*. Indichiamo con φ l'angolo di rotazione, contando gli angoli dal segmento *OA* in verso positivo rispetto a chi guarda il piano α dalla parte dell'asse di rotazione *a*. Il punto *A* descrive così nel piano α una circonferenza di centro *O*, la cui proiezione ortogonale sul piano $z = 0$ (dal punto improprio dell'asse z), è l'ellisse di equazione:

(2) $x^2 + \left(\frac{y}{\cos\gamma}\right)^2 = 1.$

Nello spazio, rispetto al riferimento scelto, le equazioni che danno le coordinate del punto ruotante *A* sono espresse, in funzione dell'angolo di rotazione φ, dalle formule:

(3) $x = \cos\varphi$; $y = \sin\varphi\cos\gamma$; $z = -\sin\varphi\sin\gamma$.

L'eliminazione di φ tra le prime due equazioni conduce all'equazione (2), l'eliminazione dello stesso parametro tra la prima e la terza equazione conduce all'equazione:

(4) $x^2 + \left(\frac{z}{\sin\gamma}\right)^2 = 1,$

che rappresenta la proiezione ortogonale sul piano $y = 0$, fatta dal punto improprio dell'asse delle *y*, della circonferenza descritta da *A*.

AVVERTENZA. Nel seguito porremo, per comodità e chiarezza:

(5) $\cos\gamma = k,$

avendosi ovviamente, date le scelte fatte:

(6) $0 < k < 1.$

Il punto *B*, ruotando attorno all'asse *z*, descrive nel piano $z = 0$ la circonferenza di equazione:

(7) $x^2 + y^2 = 1.$

Scegliamo in questo caso come parametro l'angolo θ, formato dal segmento *OB* con la parte positiva dell'asse delle *y*. La circonferenza descritta da *B* avrà allora le equazioni parametriche:

(8) $x = -\sin\vartheta,\ y = \cos\vartheta,\ z = 0$

La condizione di perpendicolarità dei due segmenti *OA* ed *OB*, dovuta alla rigidità della croce, viene espressa, ai termini delle equazioni (8) e (3), dalla relazione:

(9) $-\sin\vartheta\cos\varphi + k\cos\vartheta\sin\varphi = 0.$

Dalla (9) si può trarre l'equazione:

(10) $\tan\vartheta = k\tan\varphi.$

Differenziando la (9) si ottiene:

(11) $(\sin\vartheta\ \sin\varphi + k\cos\vartheta\ \cos\varphi)d\varphi = (\cos\vartheta\cos\varphi + k\sin\vartheta\sin\varphi)d\vartheta.$