Pubblicazione infrasemestrale
Spedizione in abbonamento postale
GRUPPO IV
Serie IV
Volume XLIV

3

Giugno 1966

Manara

Periodico di matematiche

storia . didattica . filosofia

Bologna
NICOLA ZANICHELLI
Editore

Divagazioni sul concetto di grandezza

Premessa.

Quasi mezzo secolo fa G. PEANO, in un suo lavoro pubblicato negli atti della Accademia di Torino (V. 57, 1922, p. 311) criticava la «nomenclatura multipla e sovrabbondante» usata nei libri scolastici di matematica elementare. Una tale nomenclatura incoraggia l'illusione di poter definire un vocabolo mediante un sinonimo, così che si trovano stampate — dice PEANO — frasi come «*due grandezze della stessa specie (o meglio dello stesso genere) si dicono omogenee*», senza che si sia mai precisato il significato delle parole *specie* o *genere*, ma con la preoccupazione di lasciar intendere che sia doveroso dire dello stesso genere e non dire della stessa specie. Questa frase appare particolarmente significativa per mettere bene a fuoco certe esasperazioni della esigenza del rigore le quali sono tutt'altro che rigorose (peggio: non hanno alcun senso).

Mi sia anche consentito riferire un fatto personale: quando un vecchio operaio, nostro amico, seppe della mia decisione di studiare matematica, si mise a «declamare» varie definizioni che aveva imparato a memoria molti anni prima alle scuole professionali serali. Oggi mi ricordo (oltre all'arrabbiatura che mi portò quasi alla decisione di cambiar mestiere) soltanto la prima — la definizione di definizione — e mi par proprio degna di essere qui citata: «*Si dice definizione l'esposizione chiara, precisa e concisa di che cosa è una cosa*». Non voglio invece citare i commenti — molto sensati — di quell'ottima persona perchè sono troppo rudi per essere pubblicabili.

Un capitolo in cui è estremamente facile trovare idee inopportune (oserei dire idee storte) è il capitolo sulle grandezze, come è spesso svolto nella scuola media inferiore; valgano le seguenti citazioni (autentiche): «il rapporto di due grandezze, che non siano della stessa specie, si può fare in fisica *ma* non in matematica »; « la definizione secondo la quale si dice grandezza tutto ciò che è misurabile è sbagliata, *infatti* ci sono anche le grandezze incommensurabili »; ma anche: « se uno scolaro mi scrive su un compito che un segmento è lungo dieci metri, io gli metto quattro (senza leggere oltre) *così impara* che si *deve* dire che non il segmento ma la sua misura è lunga dieci metri ».

Mi rendo ben conto che questa premessa lascia intendere un mio giudizio piuttosto pesante su certi libri di testo e su alcuni nostri colleghi: io mi auguro che questo giudizio sia sbagliato e pubblicheremo volentieri le lettere di coloro che vorranno rettificarlo.

Peraltro lo scopo di questa premessa è anche quello di chieder scusa ai Lettori che troveranno assolutamente banali le osservazioni che seguono: è infatti mia convinzione che questi Lettori siano numerosi, il che — in definitiva — implica un giudizio positivo sulla preparazone dei nostri insegnanti di matematica.

La parola grandezza.

Credo che valga anzitutto la pena di sottolineare quanto già scriveva O. Chisini, su questo « Periodico » (nell'articolo *Qualità, numeri indici, grandezze*) nel 1939, e cioè che la parola grandezza, considerata come parola di un linguaggio scientifico, ha un significato *convenzionale* e che pertanto ogni trattatista ha — entro certi limiti — il diritto di attribuirle il significato che più gli piace, diritto che è solò limitato da qualche dovere giuridico o metodologico (a parte — ovviamente — il dovere di non essere contradditorio). Se ad esempio vi fosse una convenzione internazionale, sottoscritta dall'Italia, che disciplinasse l'uso della parola grandezza, sarebbe obbligo giuridico accettare il significato prescritto (cito questo esempio perchè la maggior parte degli autori di libri di testo ignora l'esistenza di questo obbligo rispetto a certe convenzioni internazionali, accettate dall'Italia, sulla metrologia). Inoltre è buona norma didattica quella di non peggiorare la babele che già esiste nel linguaggio scientifico, cioè di non usare la parola grandezza in modo del tutto diverso da quanto è fatto nella più diffusa trattatistica qualificata.

Per la parola grandezza non vi sono norme giuridiche da rispettare; rimane quindi soltanto il problema di esaminare le varie accezioni in cui è usata questa parola. Purtroppo troviamo nella letteratura scientifica diverse sfumature sull'uso di questa parola quali appaiono immediatamente a chi accetti locuzioni del tipo: grandezze orientate (in contrapposizione a grandezze assolute), grandezze discrete (in contrapposizione a grandezze continue), grandezze vettoriali e tensoriali, grandezze non lineari, grandezze immaginarie, grandezze non archimedee, grandezze *p*-adiche, ecc.

Non mancano, soprattutto nella letteratura di qualche anno fa, prese di posizione contrastanti nella discussione su ciò che si può o non si può chiamare grandezza. Basterà citare G. Peano in *Aritmetica generale* (Paravia, 1902) il quale dice esplicitamente che i numeri reali *non* sono grandezze (pag. 137), infatti essi sono *numeri astratti* mentre le grandezze sono *numeri concreti*. Burali Forti invece non si preoccupa più di tale distinzione (si veda ad esempio *Logica Matematica* - Hoepli, 1919, pag. 375) e dice che i numeri reali costituiscono una classe di grandezze (in accordo con la definizione assiomatica presentata a pag. 378, nello stesso libro). È poi quasi inutile ricordare le pseudo definizioni famose, come quella di Erone: « *grandezza è tutto ciò che si può aumentare* (*moltiplicare*) *o dividere indefinitamente* » o quella di Eulero « *grandezza è tutto ciò che è suscettibile di aumento o di diminuzione* », sebbene la loro eco non sia del tutto scomparsa dai libri scolastici dove possiamo trovare frasi del tipo « *grandezza è tutto ciò che si può pensare raddoppiato* »: per altre definizioni di grandezza il lettore può vedere l'articolo di E. Bortolotti su questo « Periodico » (*Definizioni di numero*, 1922, p. 413 e, in particolare, il § 15 a pag. 424).

La sistemazione assiomatica della teoria degli insiemi dotati di strutture ha fatto perdere quasi ogni interesse alla discussione sul concetto di grandezza, al punto che si può presumere che questa parola finirà per scomparire dal vocabolario matematico. Ad es. i redattori della *Enciclopedia della Scienza e della Tecnica* (Mondadori), tra i quali pur figurano eminenti matematici, hanno completamente ignorato la voce « grandezza ».

Lunghezza, area, peso.

In attesa che la matematica cosidetta moderna entri a vele spiegate nell'insegnamento medio e — dicono — nell'insegnamento elementare, rimane il problema di come i nostri insegnanti (tra i quali vi sono — e vi resteranno! — biologi, farmacisti, forestali, commercialisti, ecc.) si possano destreggiare nel «caos» prima denunciato ([1]).

Anzitutto vorrei dire che — a mio parere — si dovrebbe evitare di fare imparare a «declamare» definizioni (di qualunque natura ma soprattutto le definizioni) di enti che è bene assumere come primitivi, ad es. di *numero, frazione, punto, retta, piano*, ecc. e tra questi io metterei anche le *grandezze* (ritengo invece opportuno introdurre — non fare imparare a declamare — qualche definizione rigorosa di enti che si riconducono facilmente ad altri prima introdotti: ad esempio io non darei la definizione di quadrangolo, ma darei quella di parallelogrammo, sottolineando — se la scolaresca è un po' sveglia — anche la differenza tra la proprietà che definisce il parallelogrammo e le altre proprietà che sono conseguenze di questa).

Rimane però — doverosamente — il problema di chiarire le *proprie* idee. A questo scopo appare quasi necessario avere una qualche idea preliminare su quel che (oggi) si chiama insieme quoziente; meglio ancora se si hanno idee chiare anche su ciò che (una volta) si chiamavano definizioni per astrazione o definizioni per classi; insomma occorre avere una idea sufficientemente chiara della differenza che intercorre, ad esempio, tra un segmento, la sua lunghezza e la misura di questa sua lunghezza. Il segmento è (almeno secondo le concezioni classiche) un ente geometrico; tra i segmenti si definisce una relazione di uguaglianza (forse meglio dire congruenza o isometria, per riservare il nome uguaglianza all'identità logica): nelle abituali trattazioni scolastiche uguaglianza di segmenti è sinonimo di sovrapponi-

---

([1]) A scanso di equivoci, vorrei fare un'altra «divagazione»: io non ho proprio nulla in contrario a che vengano introdotti — fin nei primissimi anni di scuola — concetti e mètodi di matematica moderna. Le mie riserve vanno all'aggettivo «moderno» (per qualcuno è solo sinonimo di «alla moda») che non potrà non essere ridicolizzato quando — e certi sintomi indicano che sarà presto — questa matematica sarà giudicata «antiquata»; le mie riserve vanno poi, soprattutto, alla possibilità concreta che *tutti* i nostri insegnanti (tra cui, insisto, vi sono biologi, farmacisti, ecc.) e autori di libri di testo possano (e vogliano) non solo imparare, ma *assimilare* questi metodi in modo da saperli adeguatamente presentare ai nostri scolari.

bilità. L'uguaglianza tra segmenti gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva ed è pertanto una relazione (oggi detta di equivalenza) che consente di ripartire i segmenti in *classi di equivalenza,* classi tali che segmenti uguali appartengono (e definiscono) una stessa classe. L'insieme di queste classi è il cosidetto *insieme quoziente* dell'insieme dei segmenti rispetto alla relazione di uguaglianza. La *lunghezza* di un segmento può così essere definita come la classe di equivalenza (l'elemento dell'insieme quoziente) definita dal segmento stesso.

Val forse la pena di dire quasi le stesse cose con la vecchia nomenclatura: *lunghezza* è l'ente astratto di tutti i segmenti che sono sovrapponibili ad un segmento dato (definizione per astrazione) oppure (in forma più intuitiva): *lunghezza* è quella proprietà di un segmento che lo fa appartenere alla classe di tutti i segmenti ad esso sovrapponibili.

Non è qui il caso di riportare le discussioni sui raffronti critici tra queste definizioni: spero di aver già raggiunto il mio scopo che era soltanto quello di sottolineare che la lunghezza di un segmento non è il segmento stesso e non è neppure la sua misura: infatti questa è un numero, mentre il concetto di lunghezza non ha, per ora, nulla a che vedere con i numeri.

La stessa distinzione va fatta per le superfici, le aree delle superfici e le misure di queste aree; per i solidi, i volumi e le misure di questi volumi.

Sono moltissime le circostanze analoghe che si presentano, oltre che in matematica, in fisica, chimica, biologia, economia, ecc. Anche in tutti questi casi è bene tener presente che il linguaggio corrente (sia pure un linguaggio scientifico) *sottintende* (ma non può eliminare) queste distinzioni. Ad esempio ritengo che piuttosto raramente, anche in una esposizione accurata, si faccia una esplicita distinzione tra un grave, il suo peso e la misura del suo peso. E vorrei aggiungere che è bene che sia così, soprattutto in un libro scolastico; e che *deve* essere così nell'insegnamento medio. Infatti mi sembra controproducente esigere dai nostri scolari che distinguano le due parole « lunghezza » e « misura » prima che sappiano afferrare la diversità dei due concetti. Inoltre è bene ricordare che anche queste parole hanno solo significati *convenzionali* e che esse vengono confuse (senza danno) anche nella letteratura scolastica molto qualificata: così in Enriques-Amaldi, *Geometria piana,* Zanichelli 1927, a pag. 112

si parla di segmenti ma si allude, ovviamente, alle loro lunghezze e ciò — evidentemente — non perchè i due illustri autori non conoscessero la differenza che intercorre tra i due concetti, ma perchè non hanno ritenuto didatticamente opportuno introdurre una distinzione tra le due parole, e ciò non può produrre guaio alcuno. I guai sorgono quando vengono confuse non le due parole ma i due concetti, perchè in questo caso si ha quella pseudo proprietà di linguaggio che conduce ad enunciati inaccettabili, come quelli ricordati nella premessa.

Il concetto di grandezza nell'insegnamento medio.

Come abbiamo più volte ripetuto, non ci proponiamo di dare *la* definizione di grandezza, ma vogliamo analizzare quegli attributi di questo concetto sui quali c'è un certo consenso tra i trattatisti qualificati.

Mi pare che tutti si possano trovare d'accordo almeno su questi due punti:

i) Non ha alcun senso attribuire il nome grandezza ad un solo oggetto; si dovranno quindi mettere in luce non le proprietà di una grandezza, ma le proprietà di *una classe di grandezze omogenee.*

ii) Sembra essenziale che si debba poter parlare di *confronto* tra due grandezze di una stessa classe e di *somma* di due grandezze: la somma deve essere univocamente definita e appartenere alla classe, inoltre devono valere le abituali proprietà formali della addizione.

Accettati questi due punti sorge subito il quesito: *i segmenti costituiscono una classe di grandezze omogenee?* A stretto rigore no, perchè la somma di due segmenti non è univocamente definita, infatti nelle abituali trattazioni essa è presentata come uno degli infiniti segmenti (di una classe di equivalenza) sovrapponibili al segmento che si ottiene portando, in qualche modo, uno di seguito all'altro i due segmenti dati. Si dovrebbe quindi dire che non i segmenti ma le loro lunghezze costituiscono una classe di grandezze omogenee: infatti per le lunghezze il confronto deriva immediatamente dalla identità logica delle lunghezze di segmenti sovrapponibili e la somma di due lunghezze è chiaramente definibile in un modo univoco.

E allora è tutto sbagliato quanto sta scritto in molti libri pur qualificati (ad es. nel citato libro di ENRIQUES-AMALDI)? Io non darò certamente un giudizio così drastico: anzitutto si può pensare che — come ho già detto — gli autori abbiano voluto evitare la distinzione tra le due *parole* segmento e sua lunghezza, onde evitare argomentazioni troppo sottili per gli scolari; ma non possiamo neppure escludere altre interpretazioni che ristabiliscono in pieno il rigore. Ad esempio si potrebbe convenire — in modo esplicito o sottinteso — che la somma di due segmenti debba essere fatta su una determinata retta, a partire da un determinato punto (origine) e secondo un determinato verso (se si preferisce, su una determinata semiretta, a partire dalla sua origine). Se si vuole adoperare un linguaggio « moderno » si potrà dire che si pensa alla « suriezione » dell'insieme di tutti i segmenti sull'insieme dei segmenti (rispettivamente congruenti) di una semiretta; o anche che i segmenti della semiretta costituiscono un modello di rappresentanti delle suddette classi di equivalenza.

In modo del tutto analogo si possono criticare le affermazioni che le *superfici* o i *solidi* costituiscono classi di grandezze (anche qui i pignoli dovranno dire *aree* e *volumi*): sorge però un grosso problema sul confronto e sulla somma di aree e volumi, problema risolto dalla teoria dell'equivalenza (compresa la fondamentale proposizione di DE ZOLT).

Nuove obbiezioni sorgono quando si esamina criticamente l'affermazione che gli angoli costituiscono una classe di grandezze: a parte il fatto che anche qui si dovrebbe parlare di *ampiezze* degli angoli, resta sempre il problema di sapere se la somma risulta definita anche nel caso in cui — ad esempio — gli angoli siano concavi. Converrà introdurre le ampiezze come ampiezze di *rotazioni,* intendendo che una rotazione possa anche essere maggiore di un angolo giro.

Risulta più difficile giustificare con tutto rigore che gli archi o i settori (di una stessa circonferenza o cerchio) possano formare una classe di grandezze. Però io — nell'insegnamento medio — non mi preoccuperei fino a questo punto del rigore e accetterei (con le indicate riserve critiche, fatte soltanto per mio « uso e consumo ») la corrente nomenclatura dei libri scolastici; infatti mi sembra che non vi sia altra alternativa che quella di escludere archi e settori da qualsiasi trattazione elementare.

Quando sia definita la somma, risulta anche definito il multiplo di una grandezza, ma non si può ancora dire se esiste il sottomultiplo (e neppure se esiste una grandezza non nulla minore di una grandezza non nulla assegnata) o se vale il postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE. È opportuno chiamare classi di grandezze anche quelle classi che non soddisfano a queste proprietà? Nell'insegnamento medio io direi di no, anzi io ammetterei — sia pure tacitamente — che valesse per le nostre grandezze anche il principio di continuità, in modo che per tutte le grandezze che si considerano abbia senso parlare di *misura*; le nostre grandezze risultano così in corrispondenza biunivoca con i numeri reali assoluti, corrispondenza che è precisamente un isomorfismo rispetto alla somma (alla somma di due grandezze corrisponde la somma delle loro misure): i numeri reali diventano così i prototipi delle grandezze. Se si vuole precisare che riteniamo valide tutte le proprietà derivanti da questo isomorfismo, possiamo indicare queste classi come classi *complete* di grandezze omogenee o classi *lineari* (con allusione alla retta numerica) di grandezze omogenee: si ha così il vantaggio di una precisazione che non condanna altre accezioni del vocabolo grandezza perchè si potranno considerare anche classi non complete o non lineari di grandezze.

Vorrei infine aggiungere che non ci sono obbiezioni logiche ad estendere l'isomorfismo anzidetto anche alla operazione prodotto e quindi accettare come perfettamente legittimi — *anche* in matematica — prodotti e quozienti di grandezze anche non omogenee (i quali, ovviamente, non saranno grandezze della stessa specie).

Il concetto di grandezza come meta dell'approfondimento di un concetto fisico, economico o morale.

Voglio ora aggiungere un'ultima « divagazione » che vorrebbe mettere in luce l'importanza che ha il concetto di grandezza in certe fasi dello sviluppo del pensiero scientifico.

Si suol dire che la bellezza, la bontà, l'intelligenza, l'abilità non sono grandezze. Così sembra proprio che non abbia alcun senso la frase: « la bellezza della Venere di Milo è la somma della bellezza dell'Apollo del Belvedere e della bellezza del Davide di Michelangelo ».

Non ha alcuna importanza che io dichiari se io auspico o non l'avvento di un tempo in cui la parola bellezza avrà un significato compatibile con la frase precedente (potrei dire che questi sono fatti miei!) ma non vedo proprio la possibilità di poter affermare che non si presenterà mai la necessità o la opportunità di schematizzare il concetto di bellezza in modo da dare un senso alla frase precedente. Ad esempio è fin troppo facile — anche se banale — immaginare che a queste statue venga attribuito un prezzo di inventario, in tal caso questa frase acquista già un certo significato (almeno per coloro che hanno attribuito questo prezzo). Ma voglio anche aggiungere che il giorno in cui questa frase avesse acquistato un significato oggettivo, si sarebbe fatto un notevole passo innanzi nell'approfondimento del concetto di bellezza. E anche qui non vorrei essere frainteso: non so se ciò sarà mai possibile, nè se sarà utile per tutti; inoltre è chiaro che accanto ad un concetto di bellezza così elaborato, potranno trovare sempre posto quegli altri valori non razionali dei quali io non voglio affatto sottovalutare il peso.

A parte questa «divagazione» piuttosto stravagante, si potrebbero effettivamente citare molti concetti fisici, economici, biologici il cui approfondimento ha consentito di classificarli tra le grandezze. Esula dagli scopi che mi sono proposto l'interessante problema di analizzare le successive tappe di questo approfondimento, anche perchè questa analisi è svolta con l'abituale acume da O. Chisini nell'articolo citato. Vorrei solo brevemente ricordare un esempio: *le temperature* non si possono chiamare grandezze fintantochè questo concetto non sia stato sufficientemente approfondito in modo da precisare un livello di temperatura fisicamente privilegiato — lo zero assoluto — e una sostanza termometrica fisicamente privilegiata — il gas perfetto. Il notevole grado di approfondimento del concetto è messo in luce dal fatto che la temperatura così definita coincide con quella definita con considerazioni puramente termodinamiche.

M. Dedò